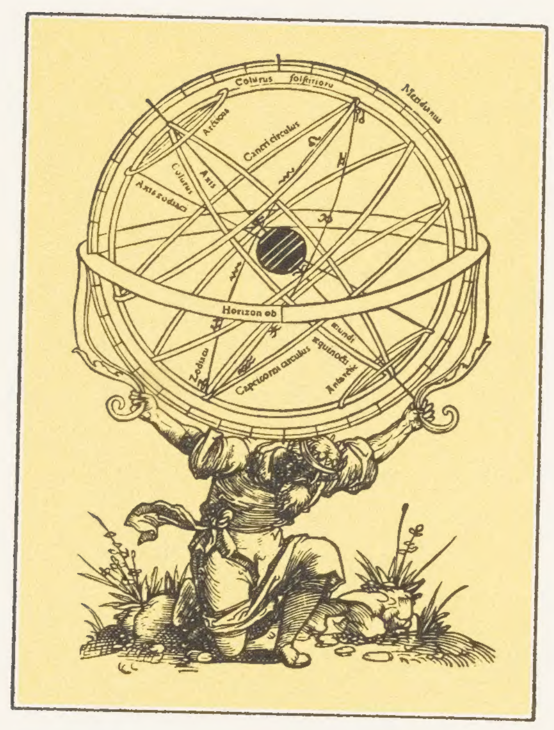

IAC. AVGVST. THVANVS.

1371

89

The Dibner Library
of the History of
Science and Technology

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES





Le President de Thou

1553–1617

Thou (Jacque Auguste de). 1553-1617.

Jacques-Auguste de Thou changed his armorial book-stamps as the years passed.

Firstly he used his simple arms, a chevron between three taons or gadflies. Three different stamps of these arms are represented on Plate XLV as 1a, 1b, and 1c. With these his monogram J.A.D.T. occurs.

Secondly, after his marriage with Marie Barbançon, we find a stamp with her arms, three lions rampant crowned, at the side of his own shield. Two stamps of these arms, numbered 2a and 2b, are represented on Plate XLV. With these is found the monogram J.A.M. (Jacques Auguste Marie).

Thirdly, after his marriage with Gasparde de la Chastre, he used a stamp with her arms beside his own shield, represented on Plate XLV by numbers 3a and 3b, and the monogram J.A.G. (Jacques Auguste Gasparde).

Plates XLVI and XLVII show the various monograms and the small taons as placed on the backs of books from the De Thou library.

– Quaritch, Catalogue of Bookbindings
Dec. 1921

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

*PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX*cellentiſſimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam ſeculis deſiderata, atq; à quàm pauciſſimis hactenus uiſa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uerſa pagina reperies.

Adiecta quoq; ſunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excuſa.

Cum Cæſ. Maieſt. gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

ARCHIMEDIS OPERVM HOC LIBRO CONTENTOrum *Catalogus.*

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου	βιβ. β'.	De ſphæra & cylindro libri	II.
Κύκλου μέτρησις	α'.	Circuli dimenſio	I.
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	α'.	De conoidibus & ſphæroidibus	I.
Περὶ ἑλίκων	α'.	De lineis ſpiralibus	I.
Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων	β'.	Planorum æqueponderantium inuenta, uel centra grauitatis planorũ.	II.
Ψαμμίτης	α'.	De harenæ numero	I.
Τετραγωνισμὸς παραβολῆς	α'.	Quadratura parabolæ	I.
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου		EVTOCII Aſcalonitæ Commentarius in primum & ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro	
Εἰς τὴν τοῦ κύκλου μέτρησιν		In circuli dimenſionem	
Εἰς τὸ α' καὶ β' τῶν ἰσοῤῥοπικῶν.		In primũ & ſecundũ æquepõderantiũ.	

11369

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI REIPVBLICAE NORIMBERGENſis, *Dominis ſuis incomparabiliter obſeruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, ſe ipſum commendat.*

HOMINEM ab ipſomet Opifice rerum, imperium in ipſam terram, adeoq; in ipſas paſſim uniuerſas creaturas accepiſſe: conceſſa etiam, quæ homini, pro modulo ſui ſtatus ſatis eſſet, cognitione rerum, Moſes in ipſo ſtatim libri Geneſeos ueſtibulo, ſcriptum reliquit. Homo autem ſimul atq; mandatum Opificis minus, quàm par erat, ſanctè colere cœpiſſet, prębuiſſetq; iam aures aduerſario lucis, protinus & accepto in rerum creaturas imperio exuitur, & ſummæ felicitatis, ad quam utiq; formatus fuerat, fruitione priuatur: adeò ut iam non tantum longiſſimè à uera felicitate exularet, ſed etiam in ipſa rerum cognitione equidem miſerè cæcutiret. Et meritò quidem. Qui enim ſupremæ contemptor eſt maieſtatis, ſuprema quur non plecteretur pœna? Atqui ne penitus ab ea, ad quam ſemel fabricatus fuerat homo, excideret felicitate: præterquam quod Deus omnipotens bonitatis ſuæ uerbum, ut carnem indueret, miſit, cuius deinde morte, labes illa contractæ impuritatis ablueretur: rurſus etiam hominem, ad præclariſſimarum rerum cognitionem, ceu per gradus quoſdam artium aſcendere uoluit, ut iam conſtanter nobis polliceri poſſimus, habere quãdam cum uirtute ipſa coniunctionem honeſtas artes omnes. Et ſi enim hodie inuentam ueritatem, ſola ſibi iure uendicat Theologia: inuentam una ſecurè poſſidet pietas Chriſtiana: nõ tamen & alias liberales diſciplinas cõtemnere debemus, ob eam duntaxat cauſam, quòd per ipſas adhuc quæritur Veritas: ſed potius & ipſæ in conſuetudinem humanæ uitæ admittendæ, ne quæ uſu adhuc rerum carent ingenia iuuentutis noſtræ, penitus ſylueſcant, dum perpetuò cultura bonarum artium deſtituuntur. Quod enim præſtat cibus hominibus ut uiuant, id præſtant honeſtæ diſciplinæ, ut bene uiuant. Alimenta corporibus ſi ſubduxeris, ipſa protinus uiuere deſinent: & communi mortalium uitæ honeſtas artes, mox ut ſubducere cœperis, ipſa uita noſtra, quid niſi quàm proximè ad brutorum uitam accedere uidebitur? Quare mea quidem ſententia, hoc iuuentuti ſunt artes honeſtę uniuerſæ, quod himber eſt pratis areſcẽtibus, quod riui hortis, quod agris cultus, & ipſis quod eſt uineis putatio. Cultura artium ut rebus humanis non parum adijcit ſplendoris & ornamẽti, ita contemptus earum & morum & uitæ ſinceritatem non infrequen-

ter eneruare uiſus eſt. Literis literatis non exculta uita noſtra, quid aliud quàm barbara quædam cenſenda eſt barbaries? Certe bonarum artium ſtudijs, homini præſertim ad immortalitatem contendenti, nulla eſt poſſeſſio uel certior, uel ſecurior: cum quod hæc una poſſeſſio, animũ ad ſolidæ uirtutis amorem inflammat: tum quod ea ab initio qui uſi ſunt, ut uerè inquit Sapiens, participarunt amicitiæ Dei. Vos uerò P.C. quàm rectiſſimè conſultum eſſe optetis Reipub. literariæ, abunde teſtantur tot paſſim illa ueſtræ liberalitatis collata in ſtudioſos ſubſidia. Et eſt alioqui apud uos in magno precio philoſophiæ ſtudium: tum præcipuè in maiore honore haberi à uobis eos autores, qui Mathemata conſcripſerunt, uel hoc nomine, quod Mathematicarũ rerum cognitionem, numerare ſoletis inter pulcherrimas atq; utiliſſimas philoſophiæ partes: ut inde uobis non ſolum multam utilitatem percipiatis priuatim, ſed apud exteros quoq; & doctos harum rerum, ſummam non rarò inire uiſi ſitis gratiam publicè. Habuit ordo ueſter Senatorius ſemper tales uiros, qui uel pulcherrimarum artiũ fuerint ſtudioſi, uel ſaltem qui à rectis ſtudijs non eſſent prorſus abhorrente animo. Quæ laus cum ipſam ſecum ferat honeſtatem, non poteſt non eſſe pulcherrima. De uobis, qui hodie gubernacula Reipub. tenetis, ut paucis abſoluere, quod dicere uolo, non poſſum: ita à me dedicatum uobis Archimedem Siculum illum, Mathematicarum diſciplinarum facile, iudicio doctorum omniũ, principem, benignè equidem accipere debetis. Hoc enim uno renato, uniuerſa Matheſis renata uideri queat. Fuit hactenus in Mathematicis ſcriptionibus Archimedis nomine celebrius nihil. at qui uerè oculis ſuis tanti autoris monimenta uiderit, quem mihi conſpiciendũ dabitis? Bilibaldus Pirckheymerus, quem uos, dum uiueret, inter doctos doctiſſimum nominari haud grauatim paſſi eſtis: ille inquam, ut erat uir excellentis ingenij, cum Rhoma græcè ſcriptum Archimedis noſtri exemplar, opera amici cuiuſdam, tandem poſt longam expectationem accepiſſet, non tantum quaſi uilem aliquem in ædibus ſuis paſſus eſt habitare hoſpitem, ſed illũ quotidianæ ſtudiorum ſuorum conſuetudini uoluit eſſem conſortem. Quippe qui nõ ignoraret, hoc ſtudiorum genus olim ſemper religioſiſſimè ab ipſis ſummis regnorum moderatoribus, illiſq; ſapientiſſimis, & cultum fuiſſe, & celebratum. Hinc Plato philoſophorũ lumen, in libris *Lib.7.* de Legib. ſcribens, ſuo more præcipere audet, Geometriam (ut alia præteream) diſcẽdam eſſe à liberis hominibus. Quem ſequutus M. Fabius Quintilianus, hanc ipſam diſciplinam futuro Oratori, non tam utilem quàm neceſſariam etiam eſſe putauit. Itaq; rem gratam facturum me ratus ſum, ſi eum autorem ueſtris potiſſimum auſpicijs in diem protruderem, qui unus adhuc ad Mathematicas perfectiones abſoluendas deeſſe uidebatur. Cæterum, quæ animis ueſtris inſita eſt modeſtia, nõ egrè laturi eſtis, ſi extremos huius editionis fructus, ad uniuerſos bonorum ſtu-

rūm ſtudiorum cultores cupiam peruēturos, laudem uerò ad uos unos commigraturam. Hac enim laude cum primis digni eſtis, quod primi ac penè ſoli ſitis hodie in Germania (abſit inuidia dicto) quorum patrocinio rectorum ſtudiorum cauſa ſuſtentatur, fouetur\\q́. Quod exemplum utinam ſequerentur etiam alij, quos habet Germania Principes plures, titulis alioqui non inhoneſtarum rerum inclytos & illuſtres. Certe ab eis res præclarè geſtæ, ad poſteros ut cum laude extendantur, ſine literarum præclariſſimarum adminiculo, rectè ſperare non poſſunt. Sic enim uſu comperimus, neq; nomen ſibi quenquam parare poſſe, neq; locum laudis ullum apud poſteros habiturum, qui hiſce diſciplinis animum ſuum parum bona fide ſtuduit obſirmare. Quare contemptores artium prætèrquam quòd uitam inglorij tranſigunt, in ipſum etiā conditorē rerum ingrati eſſe conuincuntur. Sunt enim artes honeſtæ omnes, non ſine numinis ſummi certa diſpenſatione ad homines allatæ: ut iam neq; uita dignus cenſeri debeat, qui contemptor eſt eorum bonorum, ſine quibus nec ipſe homo rectè ualere queat. Animus quo eſt corpori præſtantior, hoc diligentiori ſtudio curandus uenit. Curatur autem recta ratione potiſſimum, & uirtute, qua cum cognationem quandam habent omnes ſimul honeſtæ artes. Quas non enim (ut de alijs taceam) illa nobis contulit in uita utilitates, quæ à menſuratione terræ Geometria, Græco nomine eſt uocata? Quid illius diſciplinæ ſtudioſi, ad uitæ humanæ conſeruationem, intentatum reliquerunt? Quid non auſi ſunt in lucem producere illi? An non illorum inuenta ſunt machinæ illæ bellicæ, arietes, tela\\q́ & propugnacula, paſſim\\q́ uniuerſa alia quæ in numero, pondere & menſura creaſſe Deum ipſum fides Chriſtiana recepit? Corporum cœleſtiū ordines, interualla, magnitudines, ad noſtram notitiam, non'ne Geometræ attulerunt? Scripſit huiuſmodi de rebus Archimedes Siculus ille multa iucunda, utilia & neceſſaria uitæ: in quibus ſunt de Sphæra & cylindro libri duo, copioſè equidem & feliciſſimè ſcripti. De circuli commenſuratione, nihil æquè doctū tradiderunt ueteres, atq; apud hunc noſtrum legere eſt autorem. Si enim circulus in Geometricis figuris eſt linea infinita, in qua nō eſt terminus à quo, (ut uocant:) nec terminus item ad quem, nēpe cuius principiū & finis eſt in quolibet puncto: quis, quæſo, ueterum ea de re Archimede noſtro apertius uel ſcripſit, uel docuit? Quis terminos illos quatuor, quibus uniuerſa Mathemata conſtant, pūctum, lineam, planiciem, & profundum, clarius oculis humanis unquam ſubiecit? De planis uero corporibus, ſolidis\\q́, de rotundis, conicis quoque, & his quæ more pyramidum aſſurgunt: item de linea, ſuperficie, & corpore, quibus tribus rebus omnis continetur magnitudo: & quia omne corpus tribus conſtat interuallis, longitudine, latitudine, craſſitudine: deniq; de quadrata figura, quæ in architectura principem locum, & iure ſibi congruentem uendicat, cui\\q́ quaſi proprium eſt, quod eſt cu-

bus ſolidus & ſtabilis, firmiter inſiſtens quaquauerſum ceciderit, quia longitudinem latitudinem & profunditatem habeat. Atq; de his omnibus, quis obſecro uel doctius, uel accuratius, uel diligentius noſtro hoc Archimede tradidit? Sunt hodie non pauci, qui hæc ſtudia magno cum honore ſequuntur, digniq; habentur, quibus uel ſtatuæ, ad immortalem ſtudiorum ſuorum memoriam erigantur. quales potiſſimum noſtra etiam ſecula uiderunt, Ioannem Stofflerum Sueuũ, Ioannem Schœnerum Caroloſtadium amicum, & in Mathematis ſtudijs præceptorem unicè mihi dilectum: Bilibaldum quoq; Pyrkheymerum, uirum præclaris rebus obeundis conſultiſſimum: ac paulo ante hæc tempora humanis exutum curis, Simonẽ Grynæum, uirum ex æquo & doctum & pium, cuiq; hoc unum deerat, quòd in tanta diuinarũ humanarũq; rerũ cognitione minimè eſſet inflatus. Chriſtianum quoq; Herlinum, Argentinenſem Mathematicum, uirum longè doctiſſimum, hoc loco uel in primis ac iure celebrandum puto, quippe cui non ſolum bonarum artium ſtudioſi, ſed & ipſi Archimedis noſtri manes plurimũ debent, quòd in hoſce libros, quo cùm emendatiores, tum elegantib. typis illuſtriores prodirent, ſtudium haud leue impendit. Philippus Melanchthon uero hodie purioris literaturæ, ac ſeuerioris philoſophiæ uindex, cum Ioachimo Camerario Franco, ac altero item ciue meo Ioachimo Rhetico, quid non ſalutaris operæ inſumit, ut quàm latiſſimè odorem ſuum diffundãt recta ſtudia? De affine noſtro Achille P. reconditarum artium ſtudioſo, in primis uero Aſtrologiæ ac Medicinæ ſuprà quàm dici queat perito, hoc parcius hic ſum dicturus, quo ſcio illum eſſe modeſtiorem, quàm ut laudes noſtras in ſe agnoſcere uelit ullas, cum ſit alioqui maximis laudibus dignus. Ioannem à Regiomonte olim ut extra communem mortalium aleam poſuit natura, ita mundus hic, in Mathematicis diſciplinis, maiorem an habuerit in aliquot retro ſæculis, dubitare auſis. Is Rhomæ agens, paulo poſt captã, ac crudeliſſime direptam à Turcis Conſtantinopolitanã ciuitatem: cum iam literatæ literæ, bonis auſpicijs, tanquã ex fuga & tempeſtate ſeruatæ, in Italiam eſſent illatæ: is, inquam ego, primæ uocationi ſuæ in Italiam ultro obſequens, ut ampliſſimam nominis ſuæ famam eſt conſequutus, ita ex Conſtantinopolitana clade ereptos Græcos libros & uidit plurimos, & deſcripſit non paucos articulis proprijs. Inter alia autem Archimedis libros, de ſphæra & cylindro, de circuli dimenſione, deq; alijs rebus non tam utilibus quàm neceſſarijs mortalium generi, ueluti palàm eſt legere in iſtis libris, quos Iacobus Cremonenſis uir ea tempeſtate duplici honore dignus, cum quòd Græcè doctus eſſet, tum quod linguarum commercio adiutus, hanc operam ſolus uideretur abſoluere poſſe, in gratiam Nicolai v. Rom. Pont. iam pridem latinos fecerat: oblatos ſibi ab amicis diligentiſſimè deſcripſit, adiectis non rarò in marginibus, Græcis (quod etiam Græcorum codicum facta fuiſſet ſi-

bi

bi copia) ſi quæ uiſa fuiſſent uel uerſa duriuſculè, uel non admodum intelligenter deſcripta. Altera deinde ſuſcepta in Italiam profectio, ut nõ fuit felix, ita nihil bonorum autorũ ad nos reportare potuit. Hominem enim exuens (non ſine dati ueneni ſuſpicione) ad nos, ciues ſuos, quid referret exanimis? Sed hæc miſſa. Cæterum de quibus diximus, omnes haud illibenter Archimedi noſtro ſunt conceſſuri. Etenim quæ ſcripſit ille, in eo eminentiæ poſita ſunt loco, ut qui palmam artis præripere ei contendere auſit, facile inuenias neminem. Claruit autem Archimedes Syracuſis ciuitate Siciliæ, Mathematicus & Geometra inter primos nobilis: à quo metiendi moles quaſcunq; & facilis & expedita inuenta eſt ratio. Quin etiam terræ globum huiuſmodi inueniſſe, memoriæ proditum eſt, ut dicere non dubitarit: Si alter foret terræ globus, ſe illum ad hunc ſuum pertracturum: uel hunc ſuum, ad illum alterum impulſurũ. Et uerè quidem. Nam ipſe artis ſuæ fiducia, haud paruo tempore obſidionem M. Marcelli remoratus, & patriæ ſimul tutatus eſt muros. Placet etiam, in gratiã ſtudioſorum, C. Plinij calculum hic ſubijcere, ita ſcribentis: Grande & Archimedi Geometricæ & machinalis ſcientiæ teſtimonium, M. Marcelli contigit interdicto, cum Syracuſæ caperentur, ne uiolaretur unus, niſi fefelliſſet imperium militaris imprudentia. Et hæc quidem ad hunc modum dicta ſint ſatis, dum illud quoq; ceu auctarij uice adiecerim: Secretiorem eſſe cauſam & uim liberalium ſtudiorum, quàm ut à prophanis ingenijs percipi queat. Nam illa ex ſtudijs noſtris proueniens cùm laus, tum fructus & gloria, ad unam illam ſummamq; rerum omnium cauſam primam dirigenda ueniunt, cuius præuia bonitate fit ut interim dulces ſint omnes illæ, in recta ſtudia collocatæ curæ, labores, uigiliæ, dum mens noſtra quàm fieri poterit perfectiſſimè ad cognitionem honeſtarum artium penetrare & poſſit & ualeat. Quibus uerò ſpreta ſunt honeſta illa ſtudia noſtra, illos neq; Numinis curam, neq; propriæ felicitatis rationem habere, iam ante meritò diximus. Nos autem qui æquiore iudicio quàm uulgus ſtolidum, expendimus omnia, finem noſtrorum ſtudiorum dicimus eſſe: primum ut Opificem rerũ, quàm fieri queat pleniſſimè cognoſcamus: deinde ut donis illius eruditi, per hanc naturalium rerum cognitionem, animis quoque euadamus meliores ac puriores, dum ipſis tandem ſummis ſpiritibus reddamur quàm ſimilimi, gratia & miſericordia Dei & Seruatoris noſtri: qui & uos & unà uobiſcum Rempub. ueſtram tueatur perpetuò. Amen. Ex Vrbe ueſtra, ad Calend. Decembres. Anno MDXLIII.

Lib. 7. cap. 37.

ARCHIMEDES
de ſeipſo.

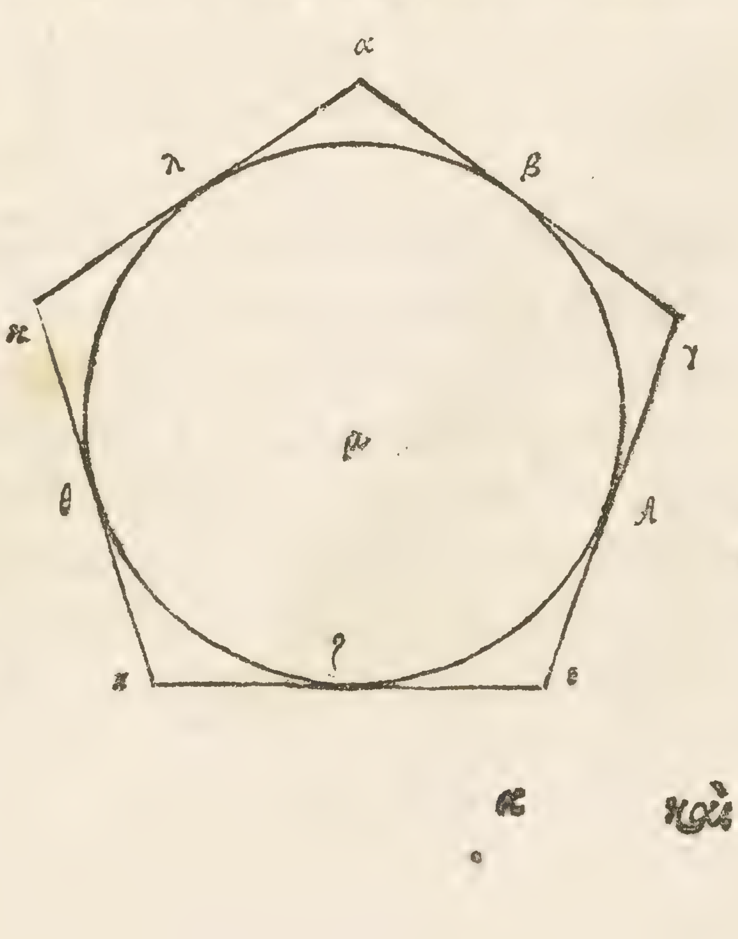
Ipſe Syracuſio ſurgens de ſanguine ciuis,
Corripior patriæ dulcis amore meæ.
Clarus eram ingenio, Siculis cantatus in oris,
Clara ſimul per me Sicilis ora fuit.
Quin rerum domina ut patriam circundaret urbem,
Ars eſt Romanum noſtra morata ducem.
Sed bene quæ uetuit uictor, male corripit arma
Miles, & è multis me tulit auſa manus.
Ni reſpexiſſet miſeram Germania ſortem,
Me ſimul atq; meas commiſerata uices:
Abfuit inde parum mecum monumenta perirent,
Plurima, in extenſos uiuere digna dies.
Quòd ſupero tenebras, cœlo fruiturus aperto
Poſthac, Germanis debeo, non Siculis.

καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀποστελλόμενός σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντος, ὑπὲρ ὧν ἔξεστι τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τάτε ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰ εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς. ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾿ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαι τινές εἰσι πεπερασμέναι. αὗται μὲν οὖν ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὥστε τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας. ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾿ αὐτῶν, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεὸν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ᾿ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ᾿ εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται, ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσας εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεταξὺ τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιοῦτο, ὃ συντιθέμενον ἑαυτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολιγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βα, αλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζη, ηθ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. α

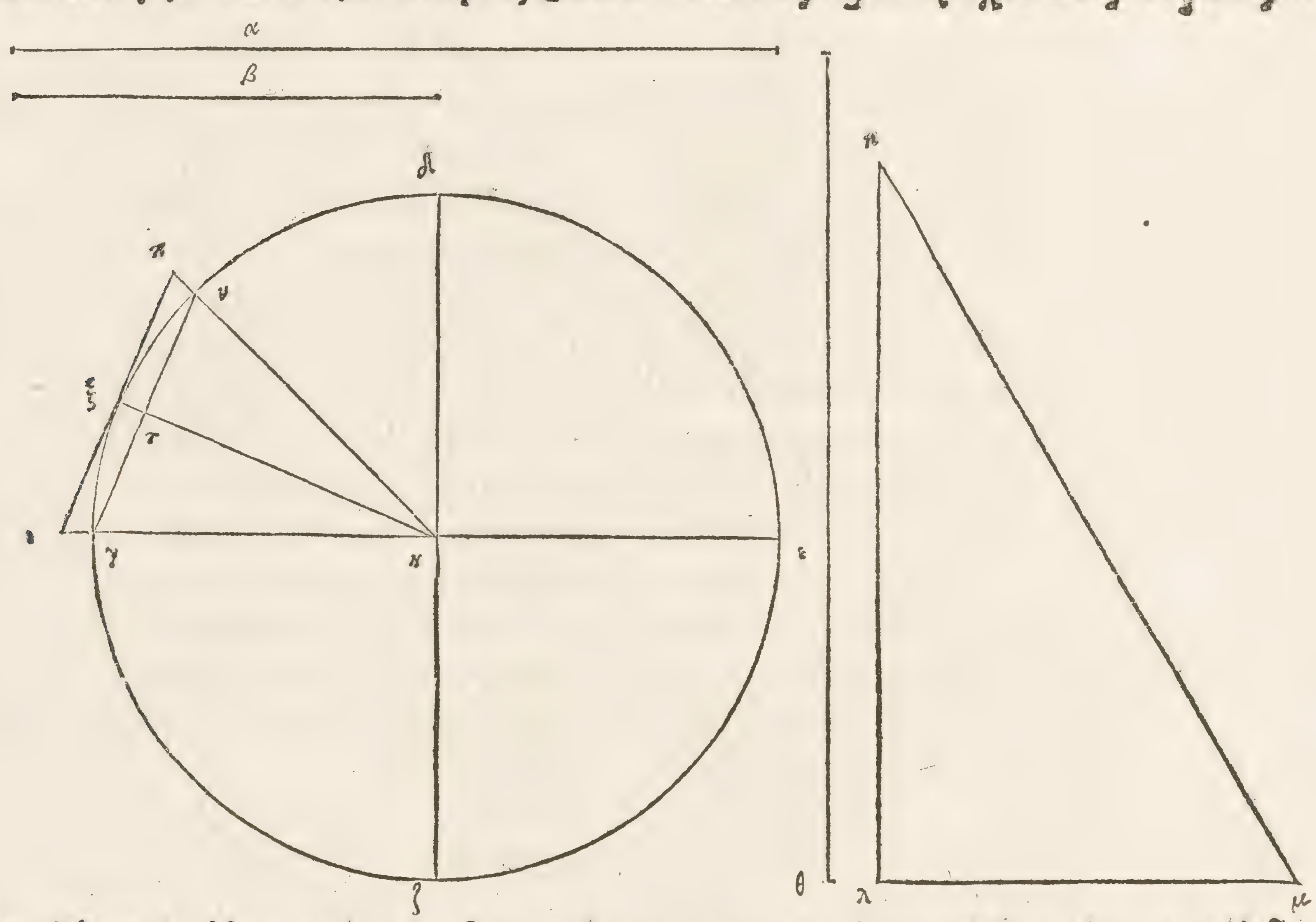


ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ. β

καὶ ἔστω μείζων τὸ α β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσας εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ ἴσον τὸ β γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ η. τὸ δὴ γ α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α θ τοῦ α γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ η τῆς η ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ζ η πρὸς η ε. καὶ ἀνάπαλιν ἔστιν ὡς ἡ ε η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ α γ πρὸς α θ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τὸ α θ τοῦ δ, τουτέστι τοῦ γ β. τὸ ἄρα γ α πρὸς τὸ α θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ α πρὸς γ β. καὶ συνθέντι ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς β γ (διάλημμα) ἴσον δὲ τὸ β γ τῷ δ. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς τὸ δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα. τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

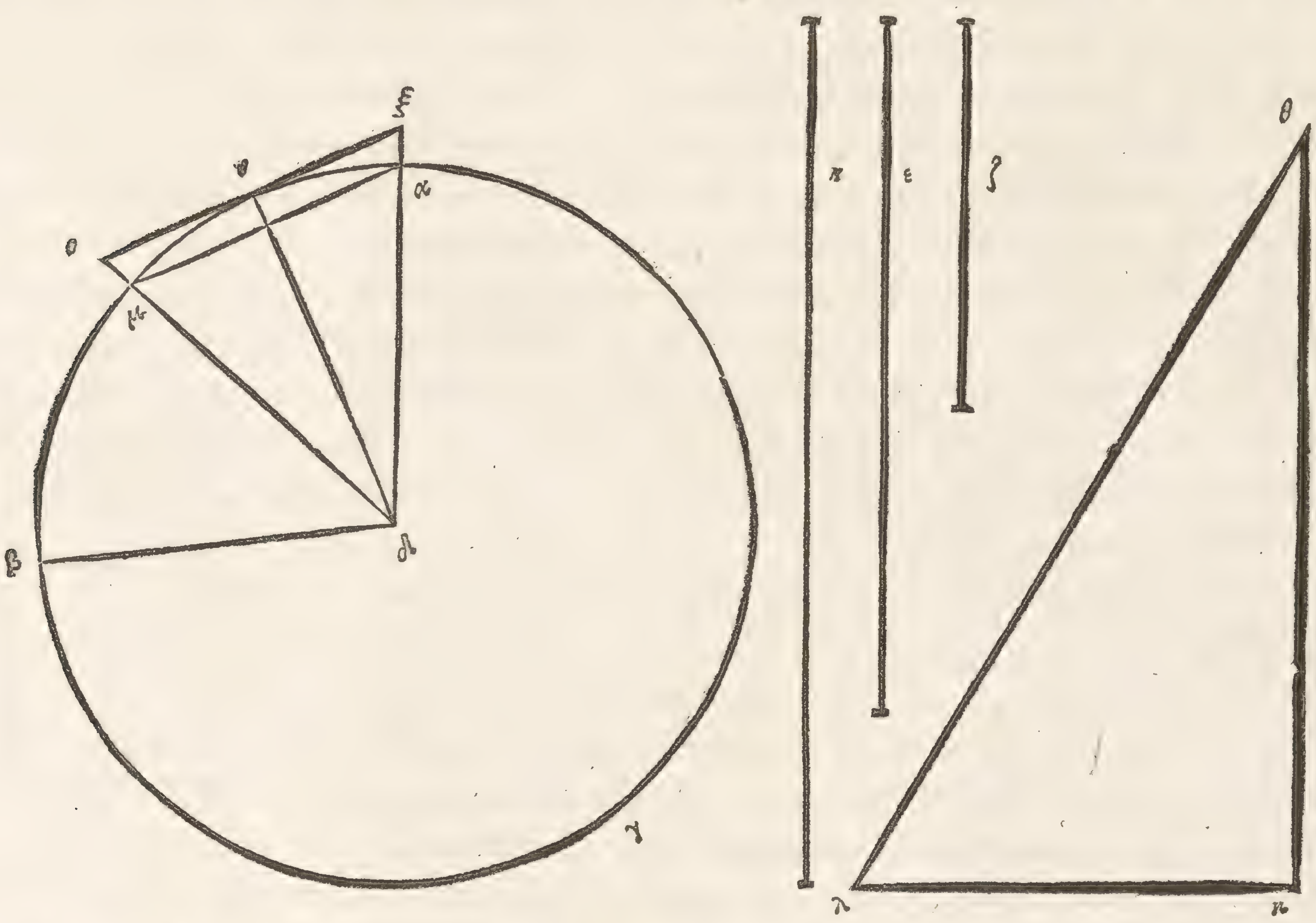


γ Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευράν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α β. ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ, κ λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ. ὥστε τὴν θ πρὸς τὴν κ λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ τῇ κ λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ ε, δ ζ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ η γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ κ μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν η γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. ἡ ἄρα ν γ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν η γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ η γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ η ν γωνία δίχα τῇ η ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο ξ π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ η ν π, η γ ο. ὥστε καὶ ἡ π ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ν η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ η γ, ἐλάσσων ἐστὶ ἄρα ἡ ὑπὸ τ η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ τ. ἡ ἄρα μ κ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ η πρὸς η τ. ἴση δὲ ἡ γ η τῇ η ξ.



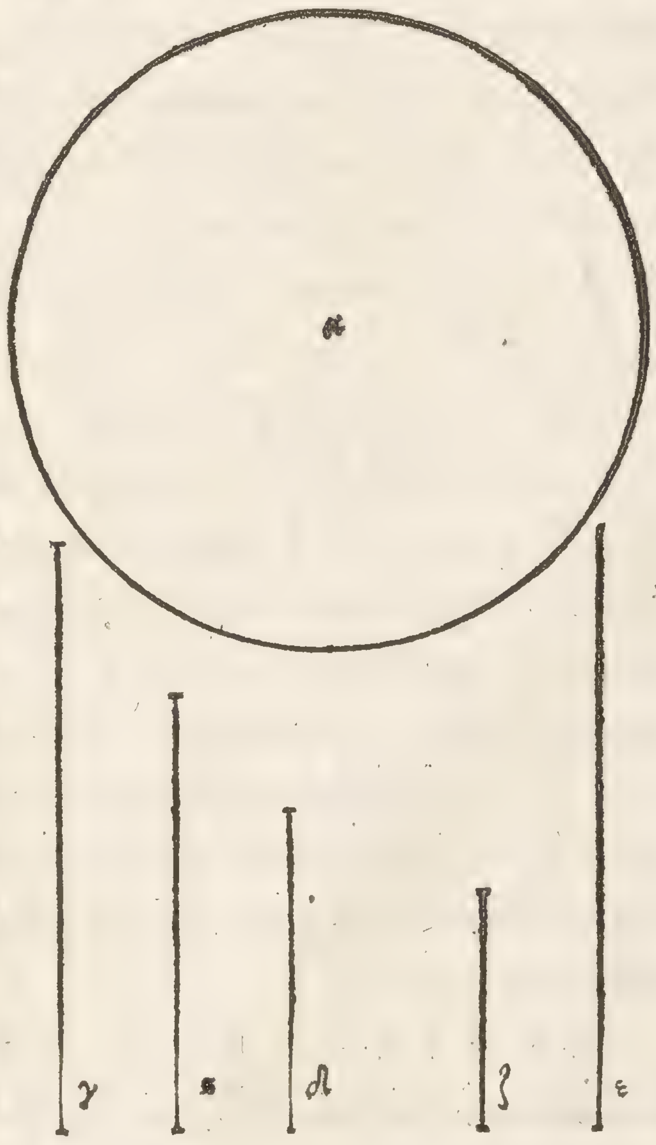
τῇ κ ξ. ὥστε ἡ κ ξ πρὸς κ τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ π ο πρὸς ν γ. ἤπερ ἡ μ κ πρὸς κ λ. ἔτι δὲ ἡ κ μ πρὸς κ λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καί ἐστι μὲν π ο πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γ ν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

Πάλιν δύο μεγέθων ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο δ



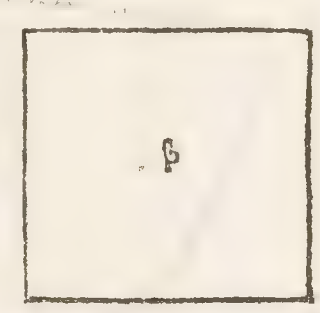
μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δέ τις ὁ α β γ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ α δ β. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν α β δ τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν β δ α, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ η θ κ ἄνισοι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ θ κ τῆς θ λ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κ λ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η παρὰ θ κ, τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν α δ β γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λ κ θ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ α δ μ. ἡ α μ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ α δ μ γωνίαν δίχα τῇ δ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπ' ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ν ξ ο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξ ο πρὸς τὴν α μ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

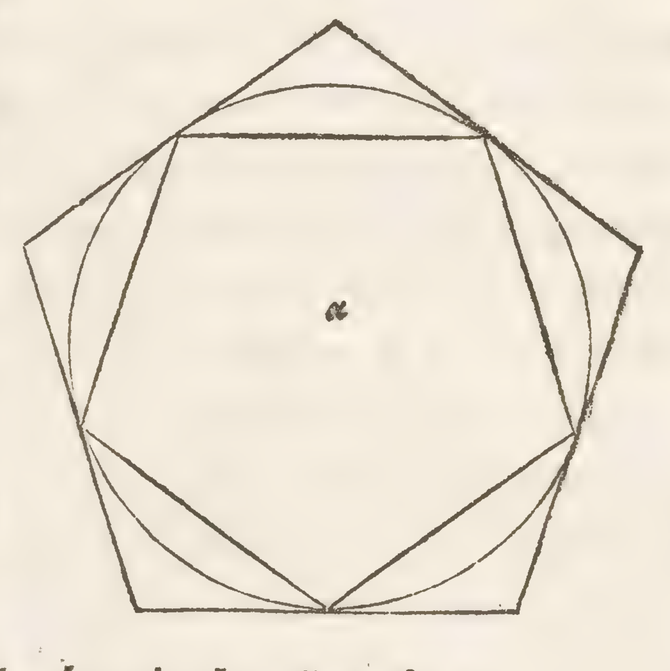
Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγέθων ἀνίσων, περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γ δ. ὧν μείζων ἔστω ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γ δ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθείσης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγρα- ε



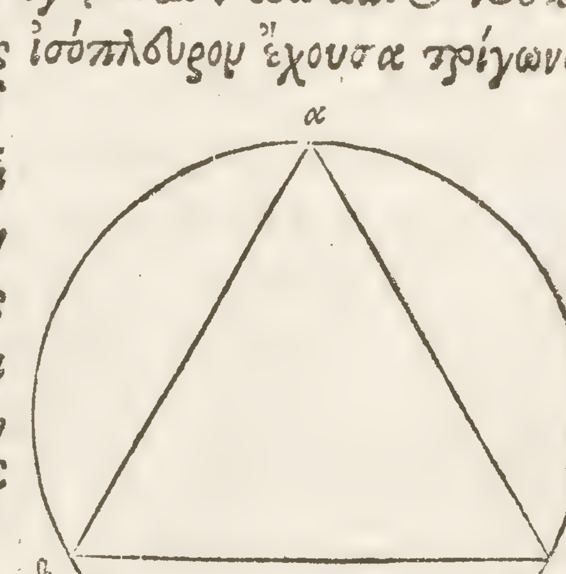
φέντος πολυγώνου πλευρὰν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὴν γ πρὸς τὴν η, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τῆς δὲ γ πρὸς τὴν η, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ. πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεὺς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδέδοται.

ϛ Δεικτέον δὲ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστω γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ α, καὶ χωρίον τι τὸ β, δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β χωρίου, ἢ οὔ. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.





ζ Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ αβγ τριγώνου.

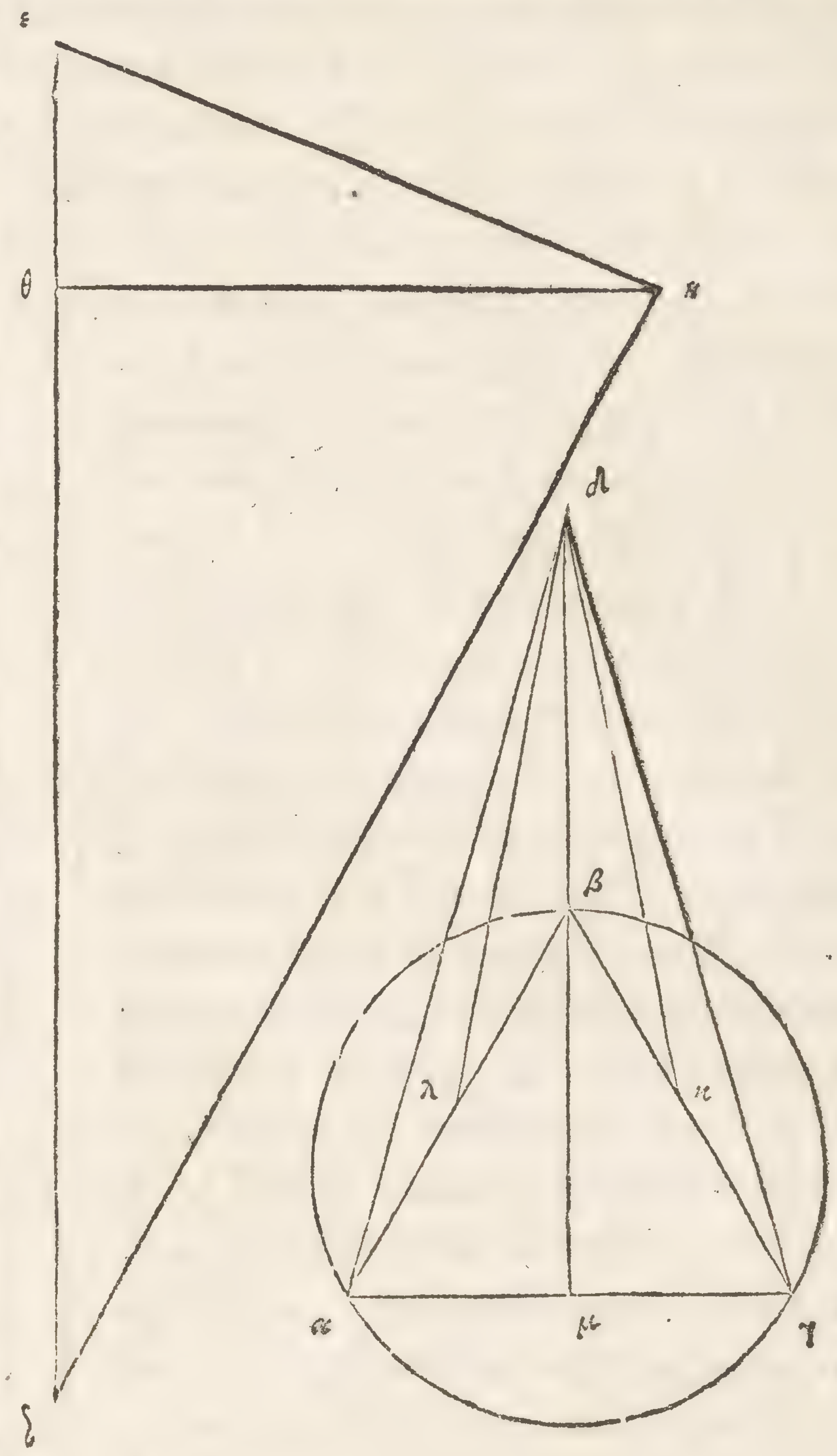


ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

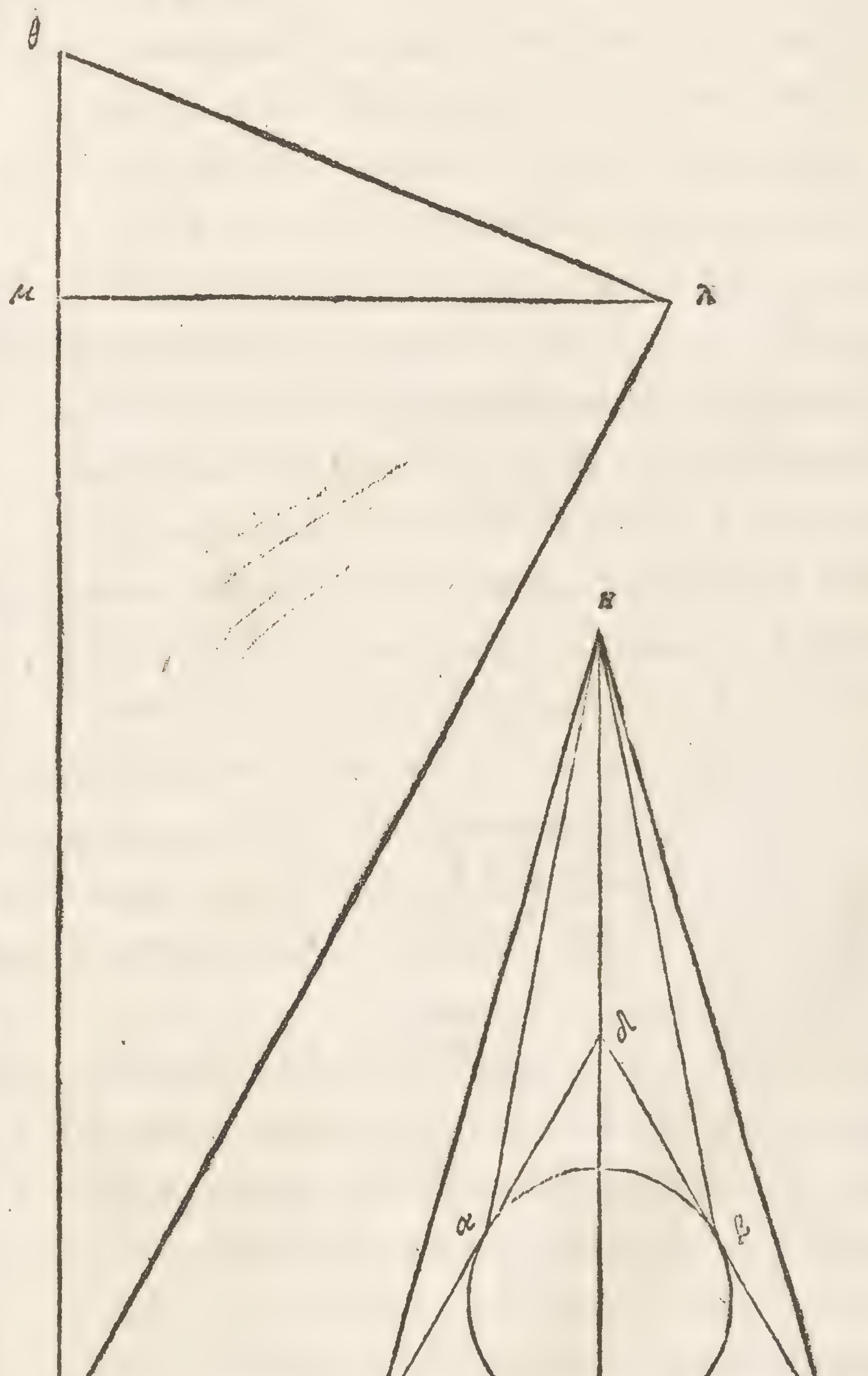
Ἔστω κῶνος ἰσυσκελὴς, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

δ

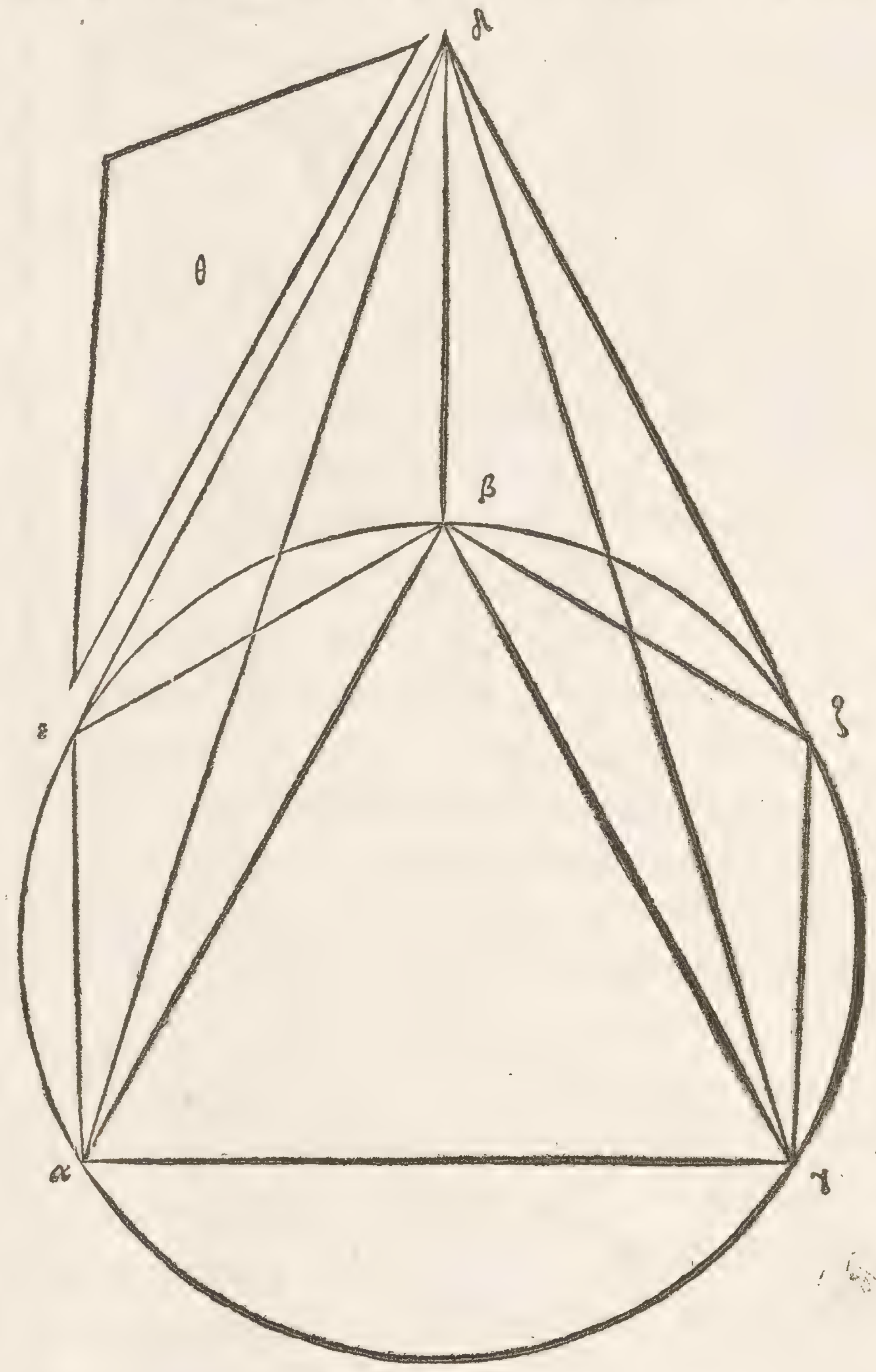
δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένῃ. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αδγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ, καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου. ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, ζε, ζδ, αἱ ηα, ηβ, ηγ. ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εδη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιον ἐστὶ τοῦ εηζ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, εηζ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ, διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διὰ ταῦτα δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ. ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



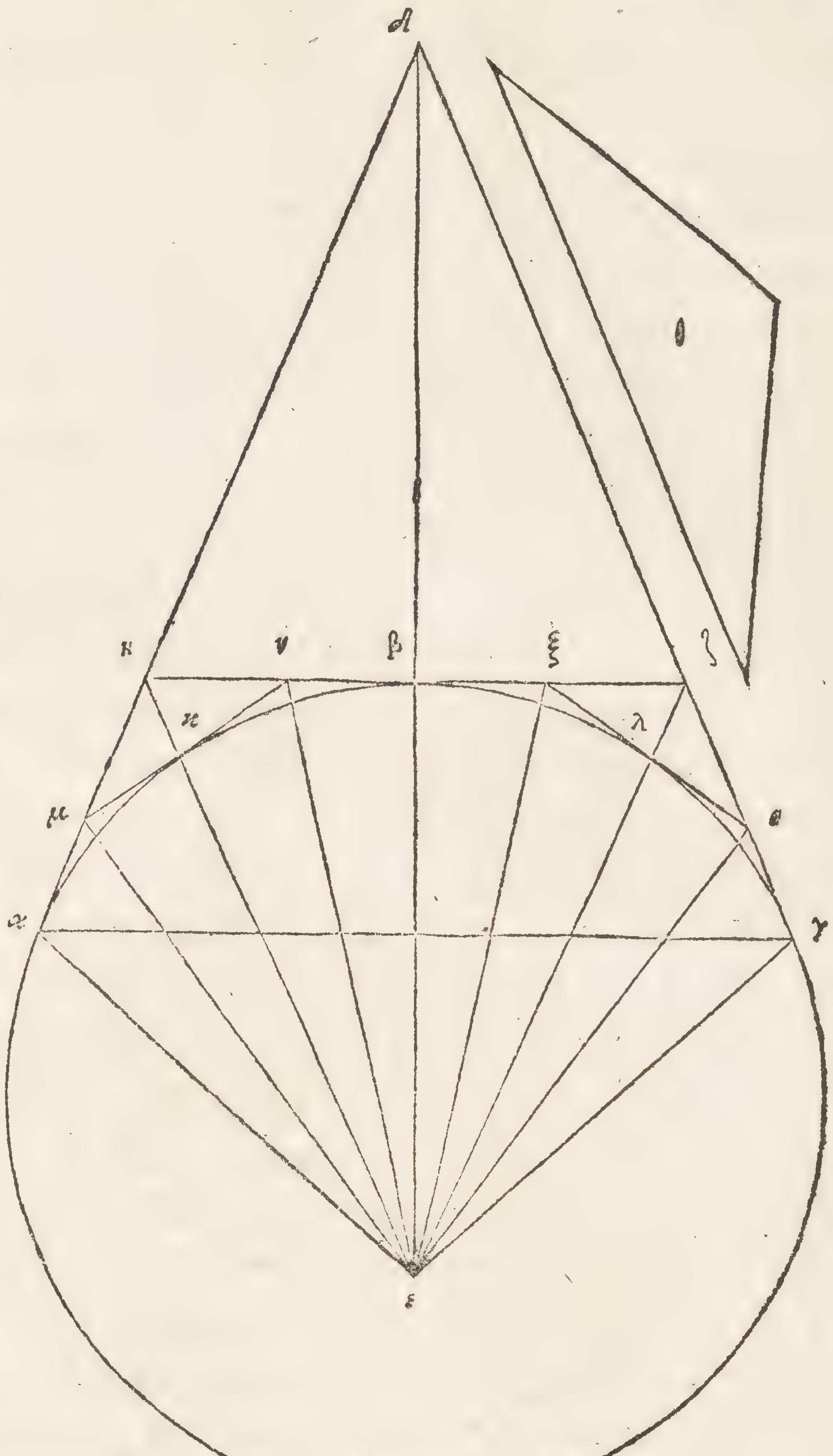
θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐκπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ αβγ κύκλος. κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ αγ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ αγ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ. λέγω ὅτι τὸ αδγ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν αδγ. τετμήσθω ἡ αβγ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, γβ, δβ. ἔσται δὴ τὰ αβδ, βγδ, τρίγωνα μείζονα τοῦ αδγ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ αδγ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν αβ, βγ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, καὶ ἡ τοῦ αδβ τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ αδβ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, τοῦ αβδ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δβγ τριγώνου, μετὰ τοῦ γζβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν αβ, βγ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς αβ, βγ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, δζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν αδε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς αε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ αδε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ εδβ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς εβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ εδβ τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν αδε, εβδ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ αεδ, δεβ τρίγωνα μείζονά ἐστι τοῦ αβδ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ αδβ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δβγ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν βζ, ζγ, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν αβδ, δβγ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ αδγ τριγώνῳ, καὶ τὸ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου.



ι Ἐὰν ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐφαπτουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν. ἔστω κώνος οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ αδ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα, εδ, εγ. λέγω δὲ, ὅτι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα

μείζονα

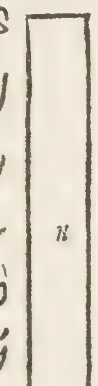
μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, γε εὐθειῶν, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ ηβζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν η, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, ζε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ηδ, δζ τῆς ηζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ αδ, δγ μείζους εἰσὶ τῶν αη, ηζ, ζγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εγ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δ' ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν αηε, ηεζ, ζεγ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν αη, ηζ, ζγ ἐλάσσους τῶν γδ, δα. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γὰρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ᾧ δὴ μείζονά ἐστι τὰ αεδ, δγε τρίγωνα, τῶν αεη, ηεζ, ζεγ τριγώνων, ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττόν ἐστι τῶν περιλειμμάτων τῶν αηβ, βζγ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρῶτον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσὶν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ηαγζ τραπεζίου, κορυφὴν ἐχούσης τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αεγ μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ αεγ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ αβγ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ αηε, ηεζ, ζεγ, μετὰ τῶν αηβ, βζγ περιλειμμάτων, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. τῶν δὲ αηβ, βζγ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. ἀλλὰ τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ αεδ, δεγ τρίγωνα. τὰ ἄρα αεδ, δεγ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα ἀπολήμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αμκ, κνβ, βξλ, λογ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερὸν, ὅτι τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα, τῶν αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμίς, ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ αμνξογ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αεγ, μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τρίγωνα, μετὰ τῶν αμκ, κνβ, βξλ, λογ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αεγ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ αεη, ηεζ, ζεγ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ δεη, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν αεγ εὐθειῶν.

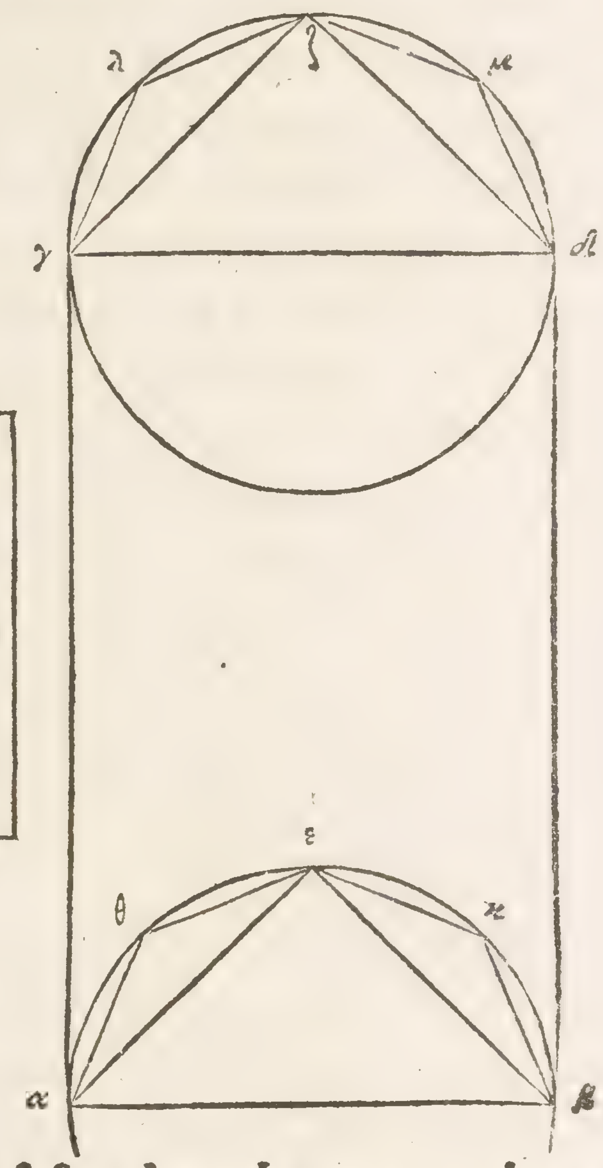


Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα- ια

νείᾳ

νεία τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ α β κύκλος, ἀπεναντίον δὲ ὁ γ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ περιφερειῶν δίχα, κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β τῆς α β μείζους εἰσί, καὶ ἐστὶν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν. μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ α β, γ δ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μείζων ἐστίν, ἔστω τῷ η χωρίῳ. τὸ δὲ η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων. ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν α ε β, γ ζ δ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ β δ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ η χωρίῳ. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.



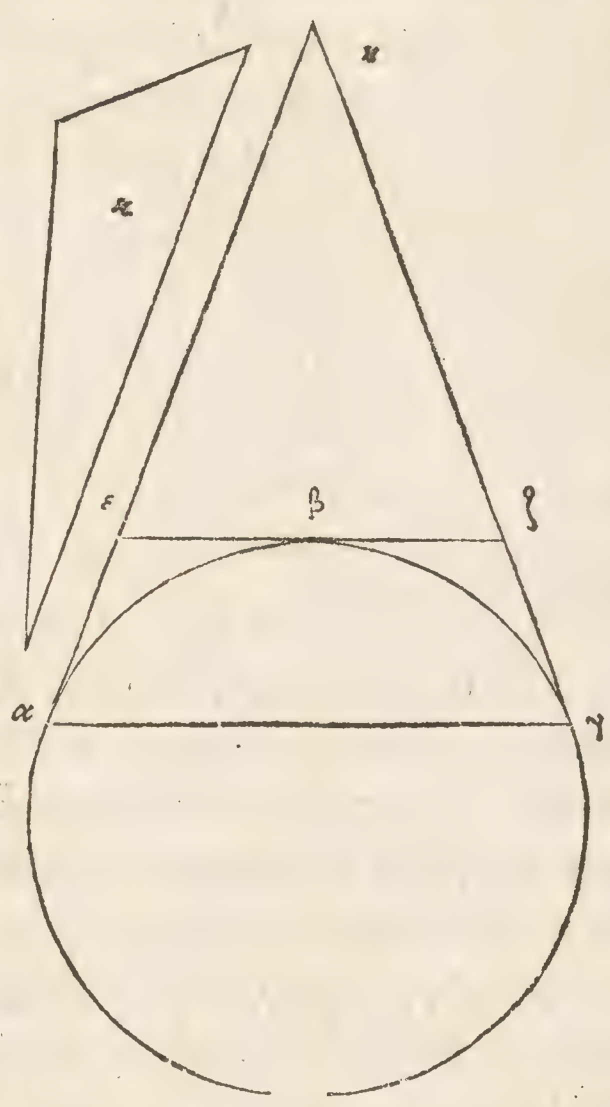


ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ η χωρίον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. τῶν δὲ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ α θ ε, ε κ β, γ λ ζ, ζ μ δ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταληφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ η χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ, εὐθυγράμμων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἐστὶ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ δ β παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ η χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ τμήματα τοῦ η χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

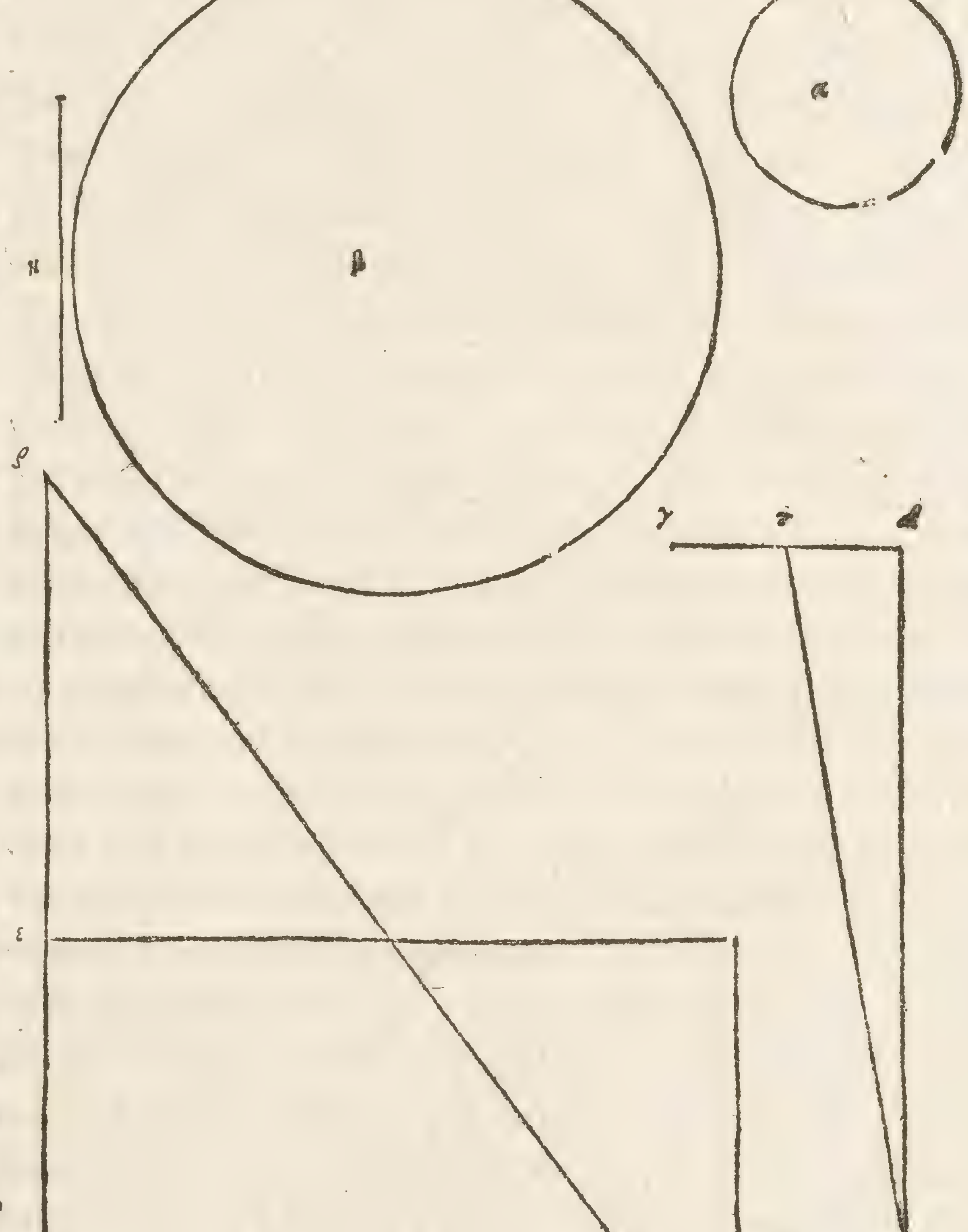
λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, αἵ εἰσι βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι, καὶ συμπίπτωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α β γ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ α γ. ἀπὸ δὲ τῶν α γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η. νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ ε ζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν ε ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως. τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν α η, η γ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε η, η ζ, τῆς ε ζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ α ε, ζ γ. ὅλαι ἄρα αἱ η α, η γ, μείζους εἰσὶ τῶν α ε, ε ζ, ζ γ. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν α ε, ε ζ, ζ γ εὐθειῶν, καὶ τῶν α δ β, β θ γ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τοῦ α ε ζ γ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, περίμετρός ἐστιν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν α γ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε α β γ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, περίμετρος ἡ αὐτὴ περίμετρος. αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε α β γ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν α ε β, β ζ γ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α η, η γ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν α η, γ η. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν. εἰ δὲ μή ἐστι μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν λεχθήσεται. τούτων δὴ δεδειγμένων, φανερὸν ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾽ αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλ-



παραλληλογράμμων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

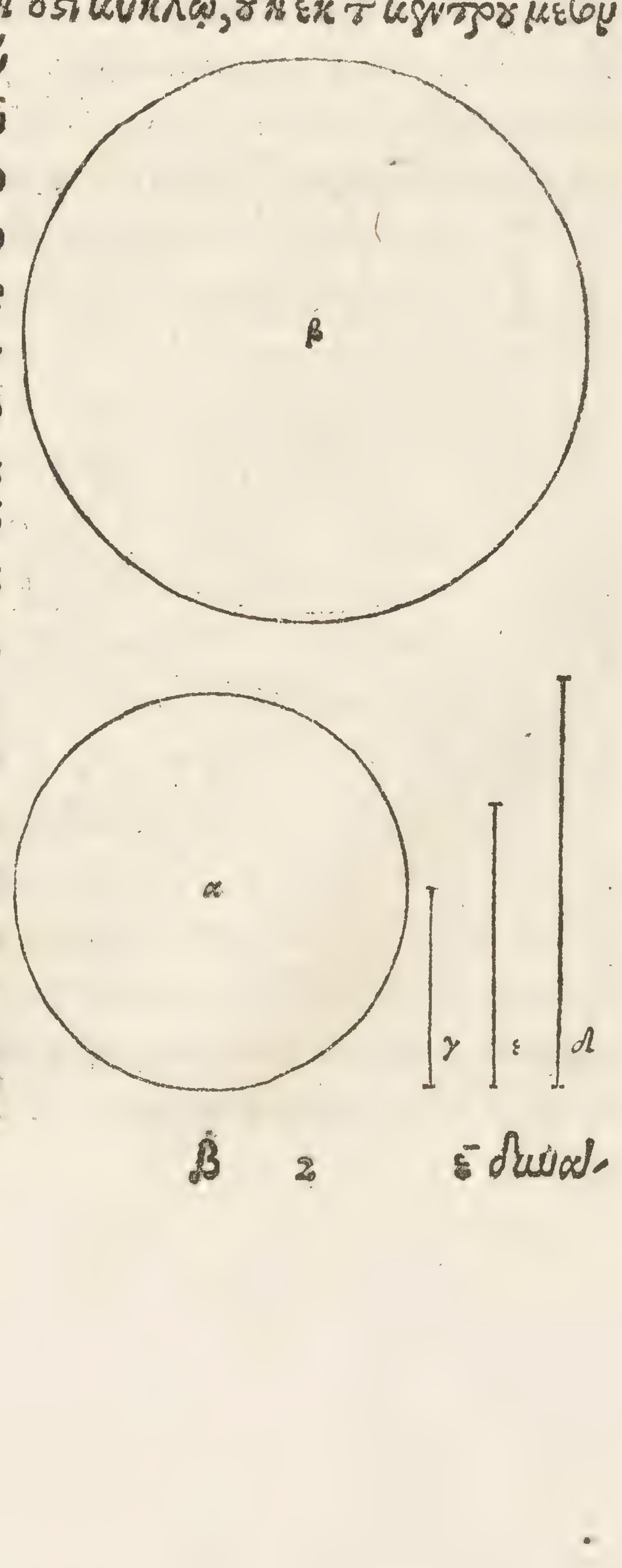
ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γ δ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ε ζ. ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν δ γ, ε ζ, ἡ η. καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὴ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον, ἴση ἡ κ δ. καὶ τῇ κ δ ἴση ἡ λ ζ. τῆς δὲ γ δ ἡμίσεια ἔστω ἡ γ τ. ἔσται δὴ τὸ κ δ τ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ε λ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ ε ζ ἴση ἡ ε ρ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζ ρ λ τρίγωνον, τῷ ε λ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τ δ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τ δ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ τ δ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τ δ, ρ ζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γ δ, ε ζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δ τ τῇ τ γ. ἡ δὲ ρ ε τῇ ε ζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γ δ τῆς τ δ. καὶ ἡ ρ ζ, τῆς ρ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ γ πρὸς δ τ, οὕτως ἡ ρ ζ πρὸς ζ ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τ δ, ρ ζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τ δ, ρ ζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τ δ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τ δ πρὸς ρ ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τ δ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ρ λ ζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κ δ, λ ζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τ κ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ρ ζ λ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζ λ ρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.



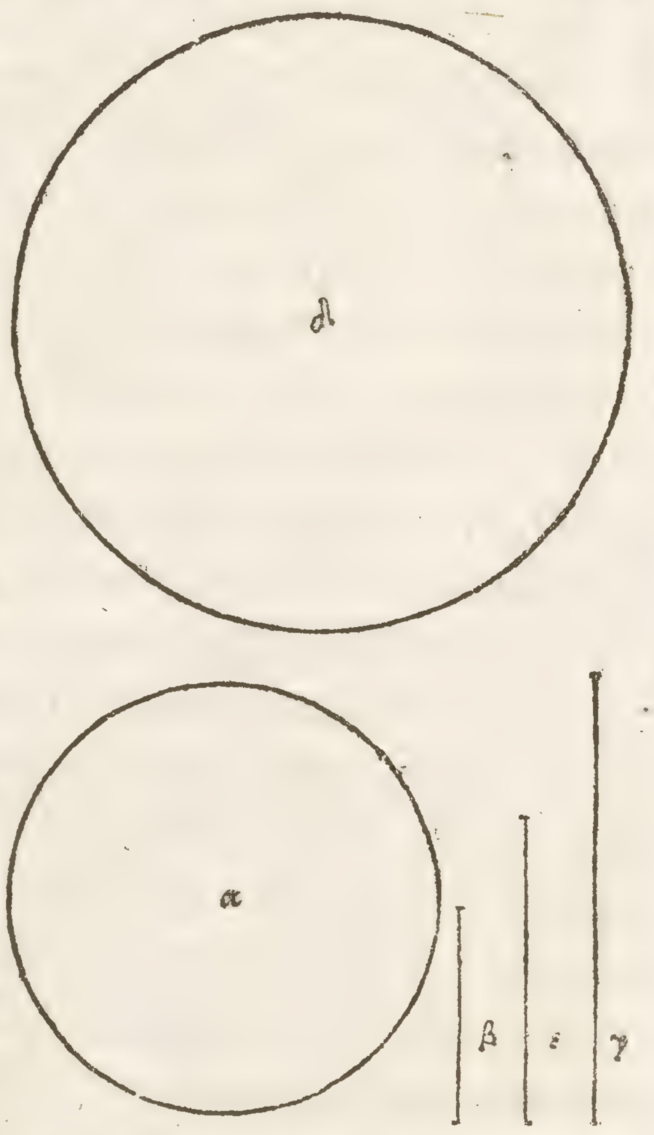
θυγράμμῳ. ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον, περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δέ, εἰ δυνατὸν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κδ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἡ ζλ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κτδ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρλζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κτδ, ζρλ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ λζρ τρίγωνον. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κτδ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζρλ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

ιδ

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ. τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην. λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥτε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς



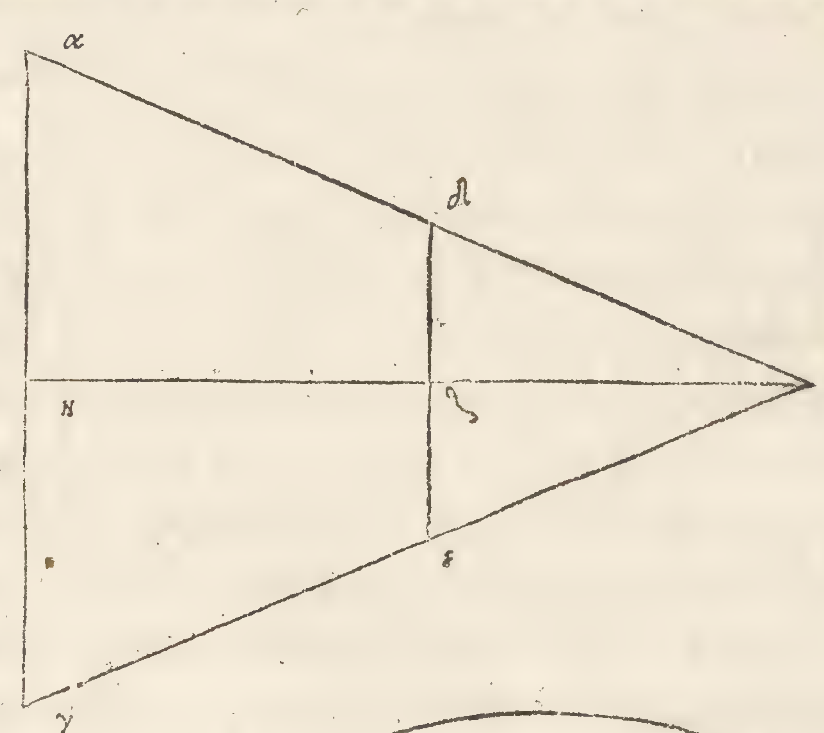
ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δὲ δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἔσται τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.



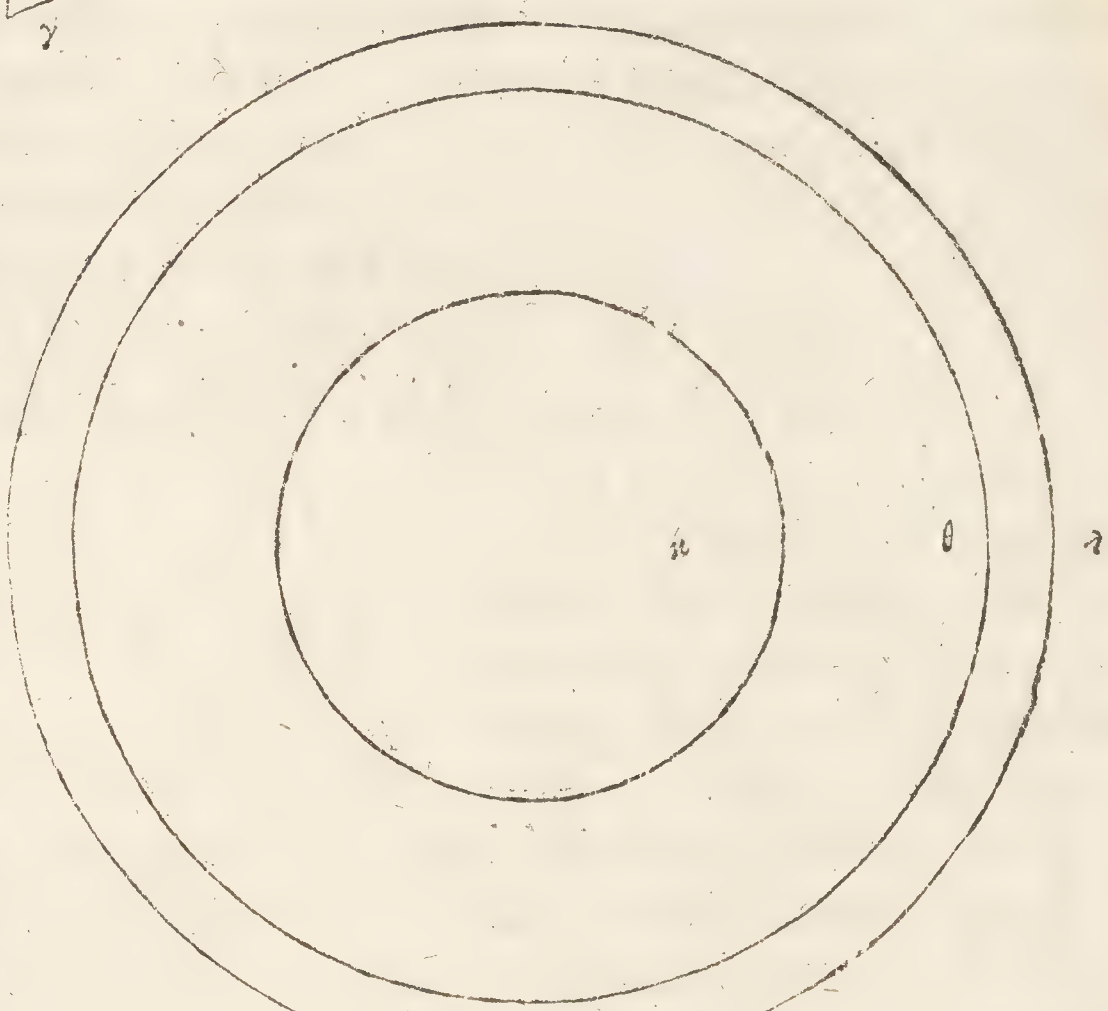
ιε Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτόν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν, αἱ β, ε. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.

Ἐὰν

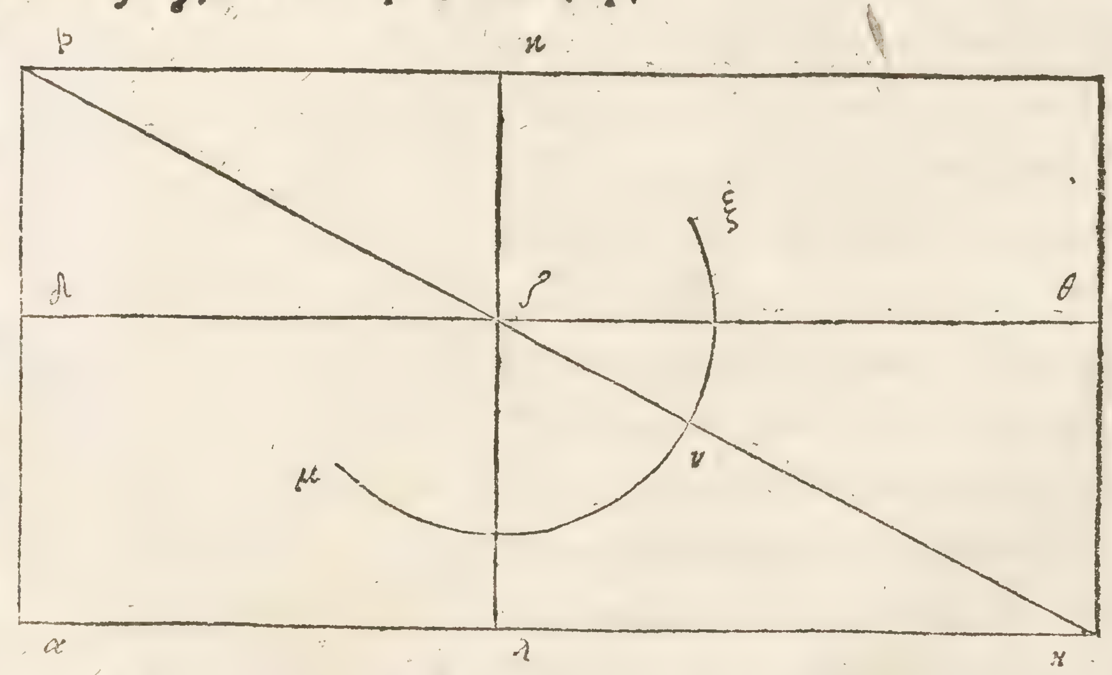
Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ἔστω κῶνος οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ α β γ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω β η. ις



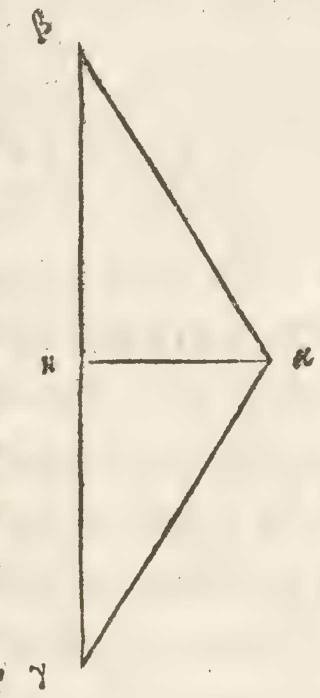
κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τε α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, η α. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β δ ζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β α η. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε β. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η. διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ α β, α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ β δ, δ ζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ θ κύκλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α γ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ.



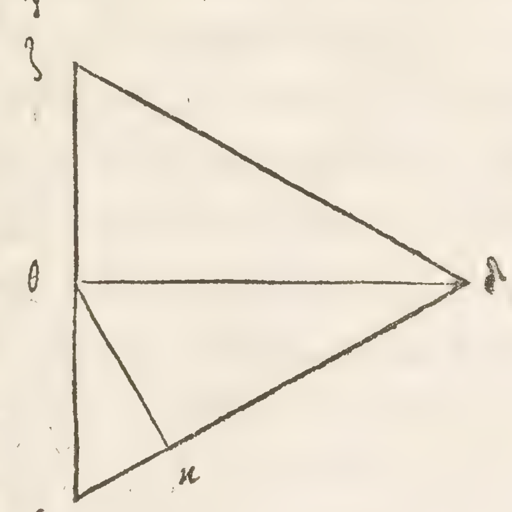
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ β α η, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ β η, τετμήσθω ἡ β α πλευρὰ ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ α η, ἡ δ θ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ β α, ἡ κ λ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ β α η ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ β α η, ὅλον ἐστὶ τὸ β η. τὸ δὲ ὑπὸ β δ ζ, τὸ β ζ. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, ὁ μ ν ξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ κ η. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κ θ παραπλήρωμα, τῷ δ α παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, δ ζ, τῷ δ λ. ὅλον ἄρα τὸ β η, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ β α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ τῷ μ ν ξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς α η δ ζ.

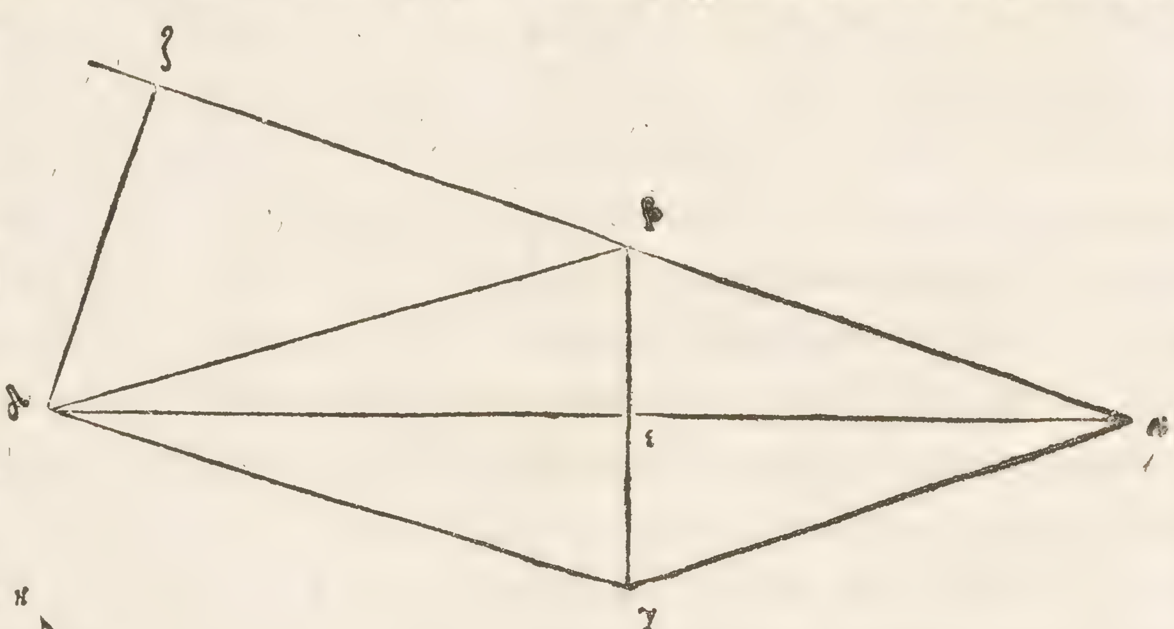


οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀποδέδεικται.

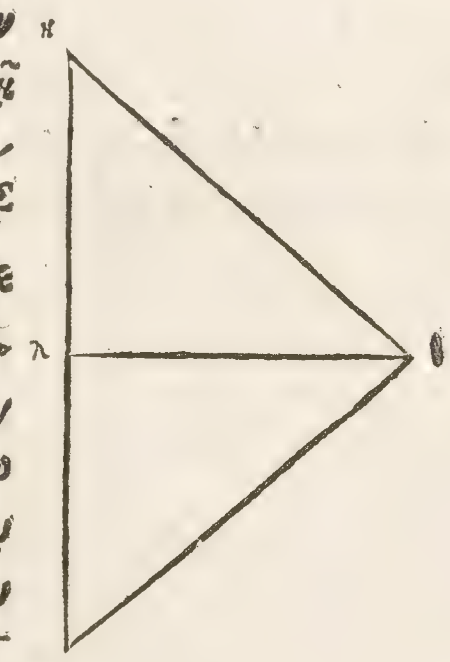


ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ αβγ, δεζ. καὶ τοῦ αβγ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ αη, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κθ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γάρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ αβγ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ βαγ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δεζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θκ. ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστιν ἡ δε πρὸς δθ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς θδ, οὕτως ἡ δθ πρὸς θκ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θκ τῇ αη. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ βαγ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δεζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ αβγ. τῶν αβγ, δεζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ βαγ, τῷ δεζ κώνῳ.





ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ αδ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ηθκ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν αβ, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένην. ἔστω δὲ ἡ δζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θηκ κώνου, ἔστω τὸ θλ. ἴσον δή ἐστι τὸ θλ τῇ δζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μνξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ αβγ κώνου, τὸ δὲ ὕψος

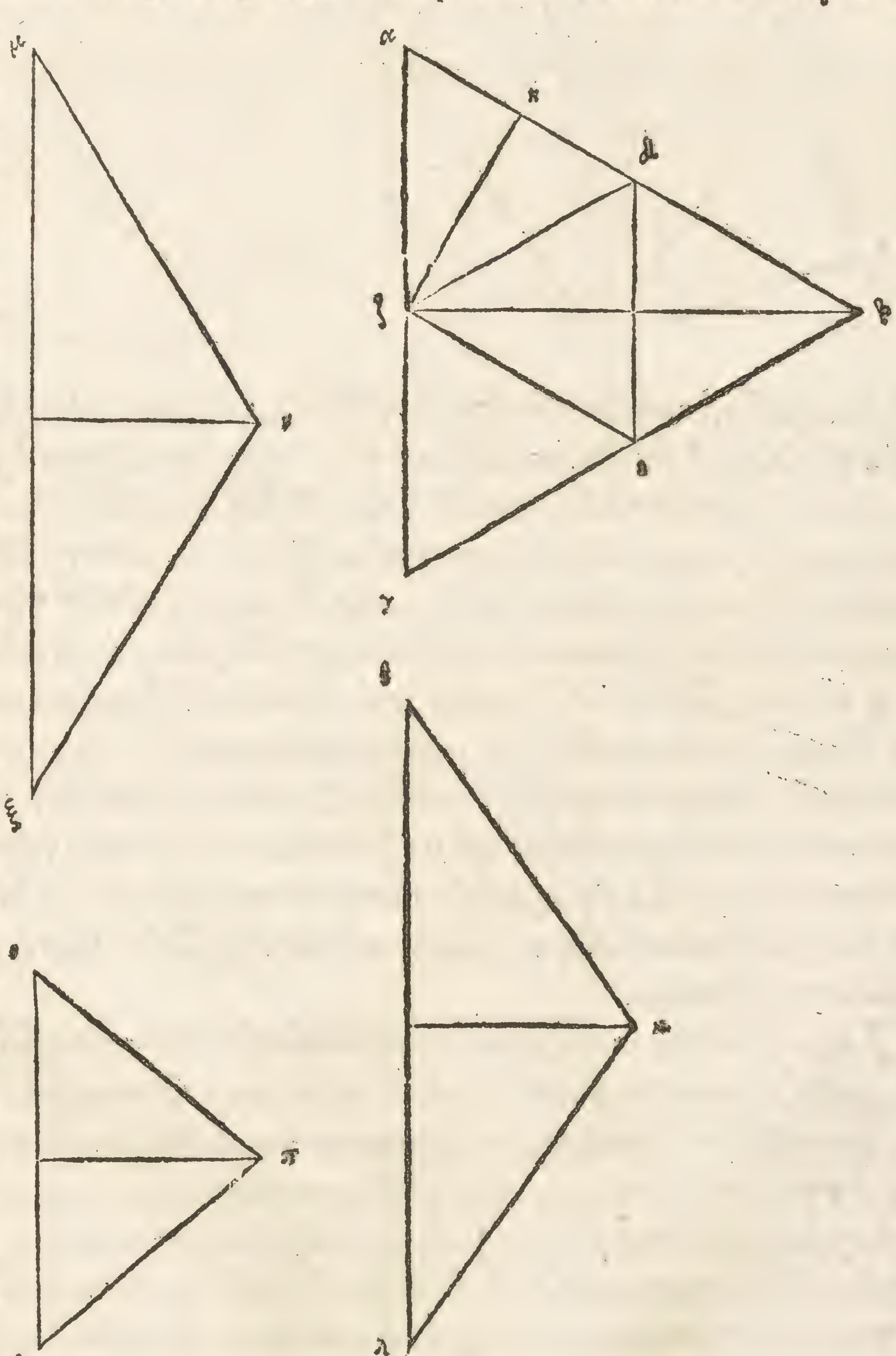




ἴσον

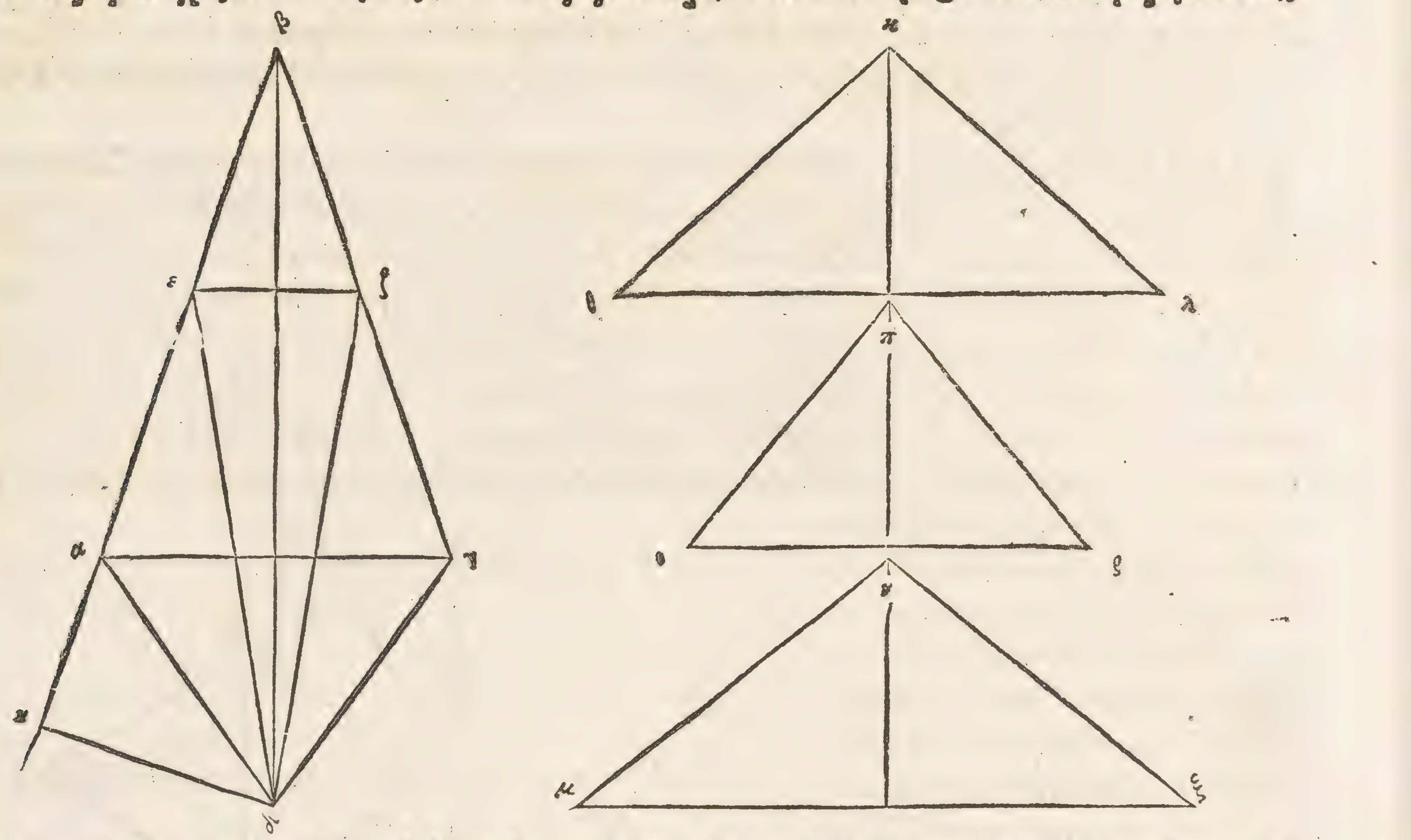
ἴσον τῇ α̅δ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ν̅ο. ἐπεὶ οὖν ἡ ν̅ο, τῇ α̅δ ἴση ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ν̅ο πρὸς δ̅ε, οὕτως ἡ α̅δ πρὸς δ̅ε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α̅δ πρὸς δ̅ε, οὕτως ὁ αβ̅γδ ῥόμβος πρὸς τὸν βγ̅δ κῶνον. ὡς δὲ ἡ ν̅ο πρὸς τὴν δ̅ε, οὕτως ὁ μν̅ξ κῶνος πρὸς τὸν βγ̅δ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μν̅ξ κῶνος, πρὸς τὸν βγ̅δ κῶνον· οὕτως ὁ αβ̅γδ ῥόμβος, πρὸς τὸν βγ̅δ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μν̅ξ, τῷ αβ̅γδ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβ̅γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ κθ̅κ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβ̅γ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ κθ̅κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μν̅ξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ αβ̅γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μν̅ξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβ̅γ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ α̅β πρὸς τὴν β̅ε, τουτέστιν ἡ α̅δ πρὸς δ̅ζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κθ̅κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μν̅ξ, οὕτως ἡ α̅δ πρὸς δ̅ζ. ἴση δὲ ἡ μὲν α̅δ τῇ ν̅ο, ὑπέκειτο γάρ. ἡ δὲ δ̅ζ τῇ θ̅λ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κθ̅κ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μν̅ξ, οὕτως τὸ ν̅ο ὕψος πρὸς τὸ θ̅λ. τῶν κθ̅κ, μν̅ξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μν̅ξ ἴσος τῷ αβ̅γδ ῥόμβῳ, καὶ ὁ κθ̅κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβ̅γδ ῥόμβῳ.

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως· ὁ δὲ γινόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ αβ̅γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ̅ε. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δ̅ε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ βδ̅ζε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ κθ̅λ. οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν δ̅ε, α̅γ. τὸ δὲ ὕψος ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν α̅β τῆς ζ̅η. ἔστω ἴσον τῇ ζ̅η. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ αβ̅γ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ βδ̅ζε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θκ̅λ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μν̅ξ, οπ̅ρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μν̅ξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ αβ̅γ κώνου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζ̅η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μν̅ξ κῶνος τῷ αβ̅γ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ οπ̅ρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβ̅ε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζ̅η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ οπ̅ρ κῶνος, τῷ βδ̅ζε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ αβ̅γ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ βδ̅ε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δ̅ε, α̅γ. ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ αβ̅γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μν̅ξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δβ̅ε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ οπ̅ρ. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δ̅ε, α̅γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θκ̅λ. ἡ ἄρα τοῦ μν̅ξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θκ̅λ, οπ̅ρ, καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μν̅ξ κῶνος τοῖς θκ̅λ, οπ̅ρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μν̅ξ κῶνος ιθ



κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ κώνῳ. ὁ δὲ π ο ρ, τῷ β δ ε ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θ κ λ κῶνος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

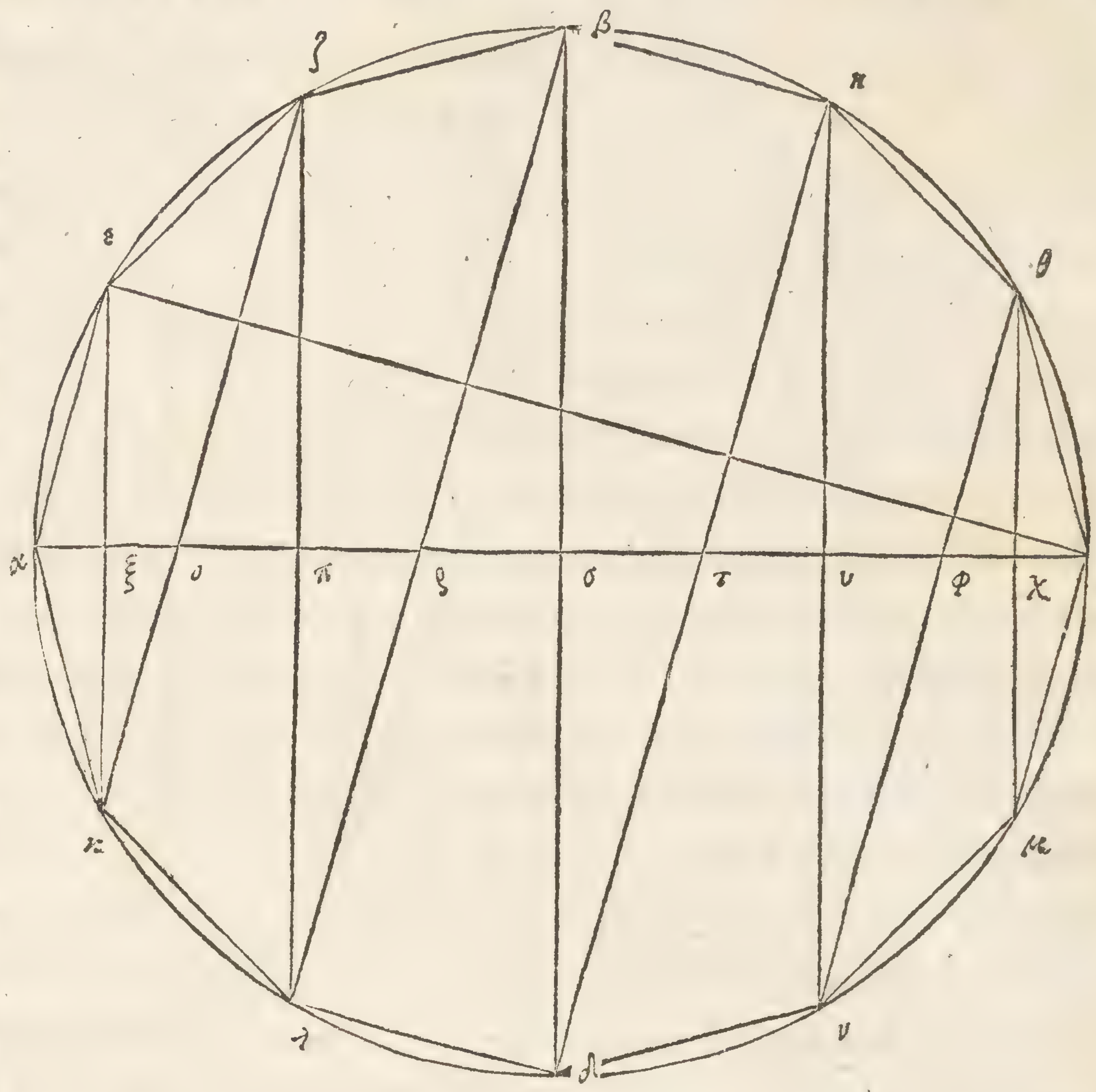
κ Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ α β γ δ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ε ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ε β δ ζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ



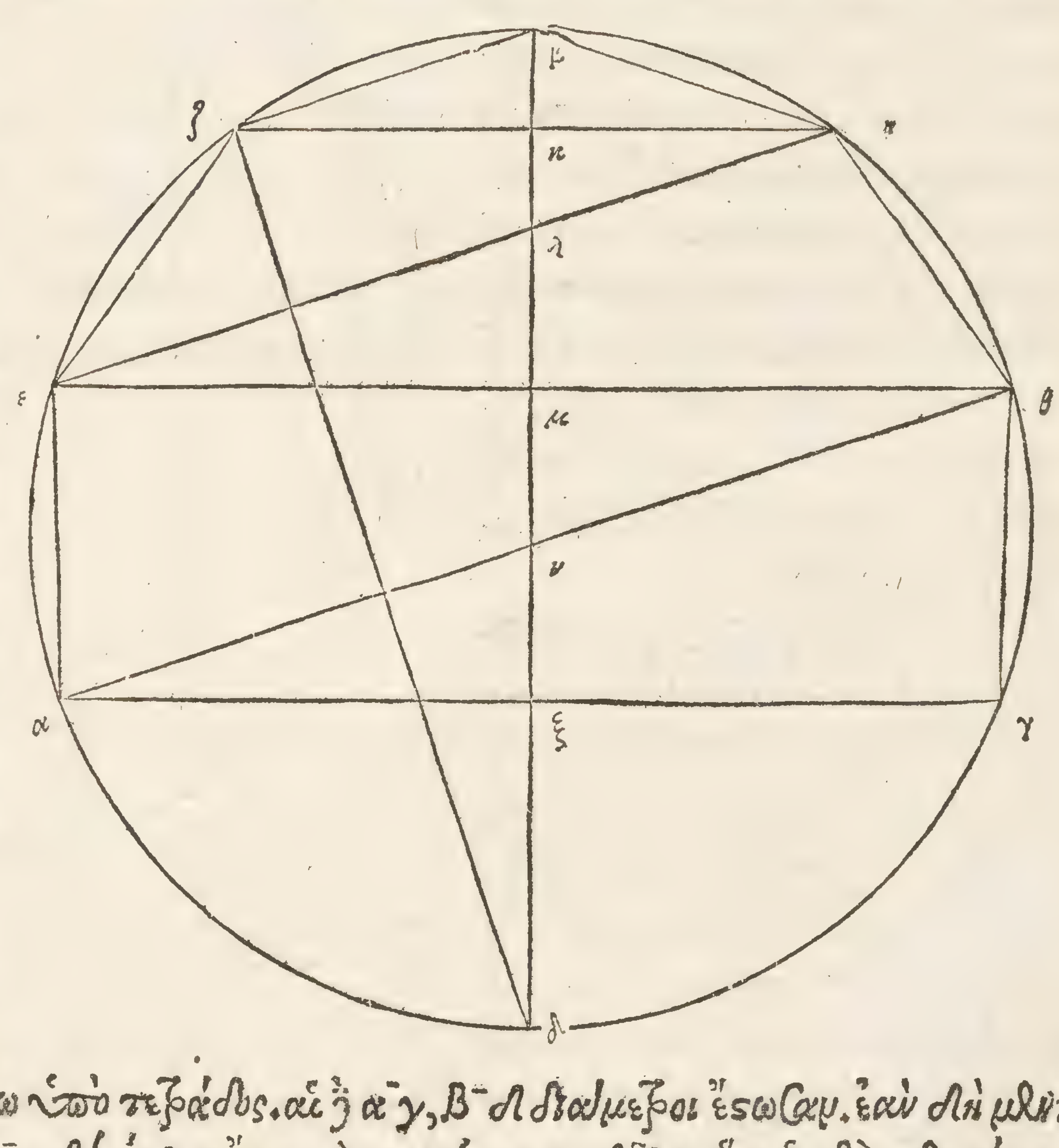
τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θ κ λ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν α γ, ε ζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν β α, ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θ κ λ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μ ν ξ, ο π ρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μ ν ξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ η. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ ο π ρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ε β ζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ η. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ κώνου, σύγκειται ἐκ τῆς τοῦ ε β ζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ε ζ α γ. ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ἡ δὲ τοῦ ε β ζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο ρ π κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ε ζ α γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ μ ν ξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν ο π ρ, θ κ λ. καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μ ν ξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν μ ν ξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. ὁ δὲ ο π ρ κῶνος τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θ κ λ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιαοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ α ε ζ β η θ γ μ ν δ λ κ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν α γ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γ ε πρὸς ε α. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζ κ, λ β, η δ, θ ν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζ κ τῇ ε α, ἡ δὲ β λ τῇ ζ κ. καὶ ἔτι ἡ μὲν δ η τῇ β λ, ἡ δὲ θ ν τῇ δ η. καὶ ἡ γ μ τῇ θ ν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ε α, κ ζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ε κ, α ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ

εξ, πρὸς ξα, ἡ κξ πρὸς ξο. ὡς δὲ ἡ κξ πρὸς ξο, ἡ ζπ πρὸς πο. ὡς δὲ ἡ ζπ πρὸς πο, ἡ λπ πρὸς πρ. ὡς δὲ ἡ λπ πρὸς πρ, οὕτως ἡ βσ πρὸς σρ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν βσ πρὸς σρ ἡ δσ πρὸς στ. ὡς δὲ ἡ δσ πρὸς στ, ἡ ηυ πρὸς υτ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ηυ πρὸς υτ, ἡ νυ πρὸς υφ. ὡς δὲ ἡ νυ πρὸς υφ, ἡ θχ πρὸς χφ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ θχ πρὸς χφ, ἡ μχ πρὸς χγ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γε πρὸς εα, οὕτως πᾶσαι αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον.

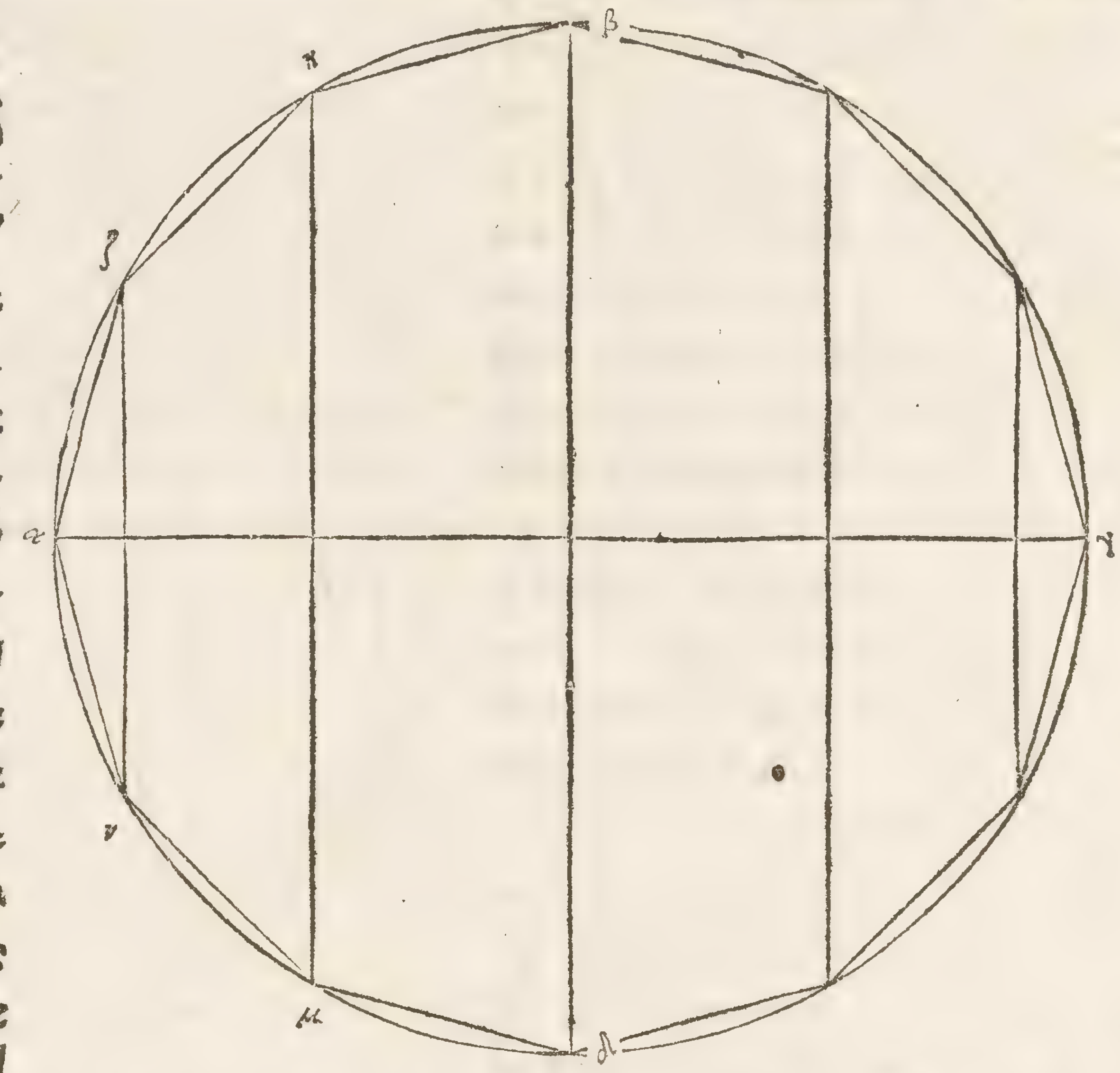


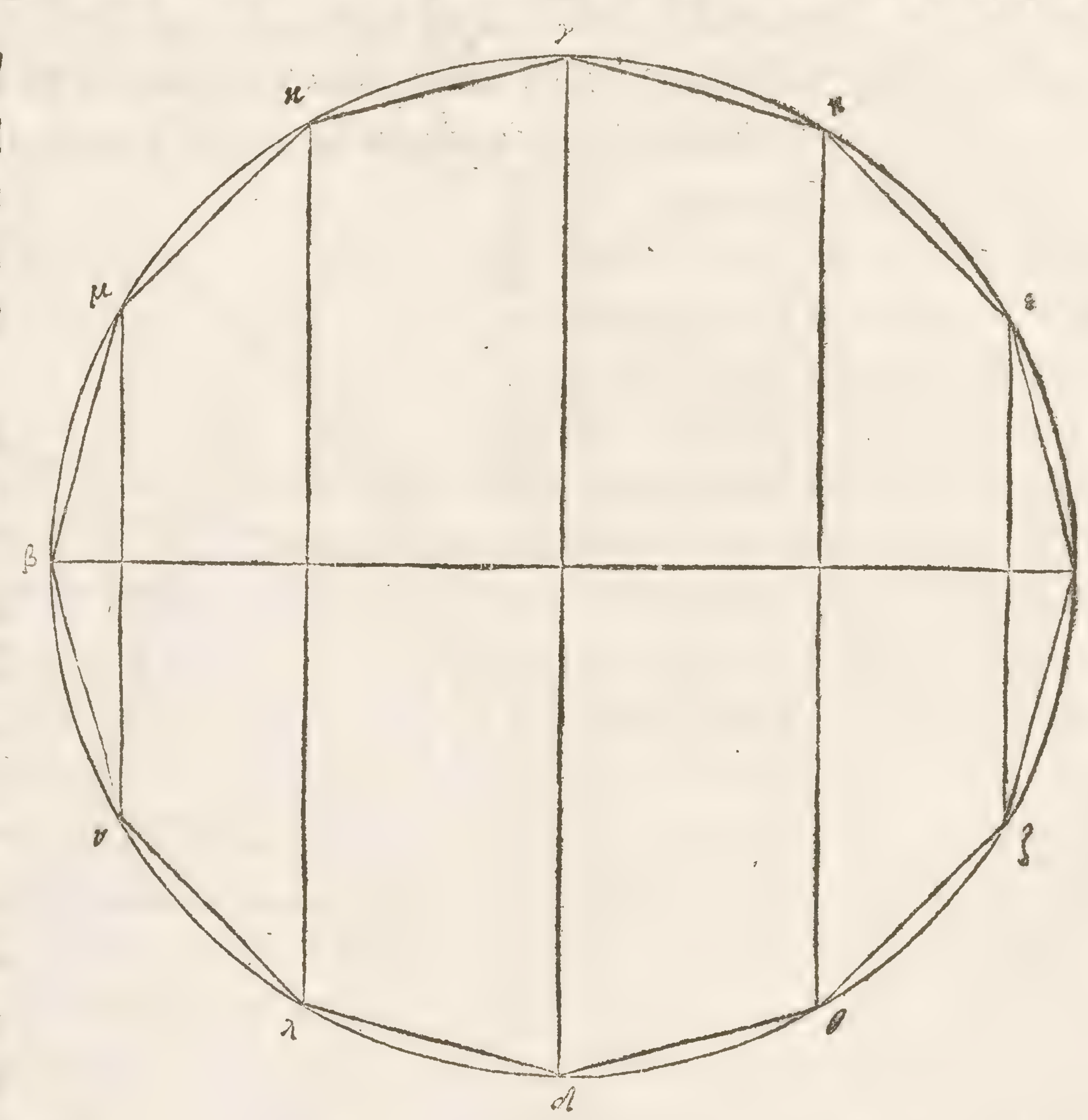
Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον κβ
χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσι δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡμίσεια τῆς βάσεως, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αγ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, εθ, αἳ εἰσὶ παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, αθ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ βζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κζ πρὸς κβ, ἥτε ηκ πρὸς κλ, καὶ ἡ εμ πρὸς μλ, καὶ ἡ μθ πρὸς μν, καὶ ἡ ξα πρὸς ξν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα, ὡς ἄρα αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς κβ. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς κβ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. ὡς ἄρα ἡ δζ πρὸς ζβ, οὕτως αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ.



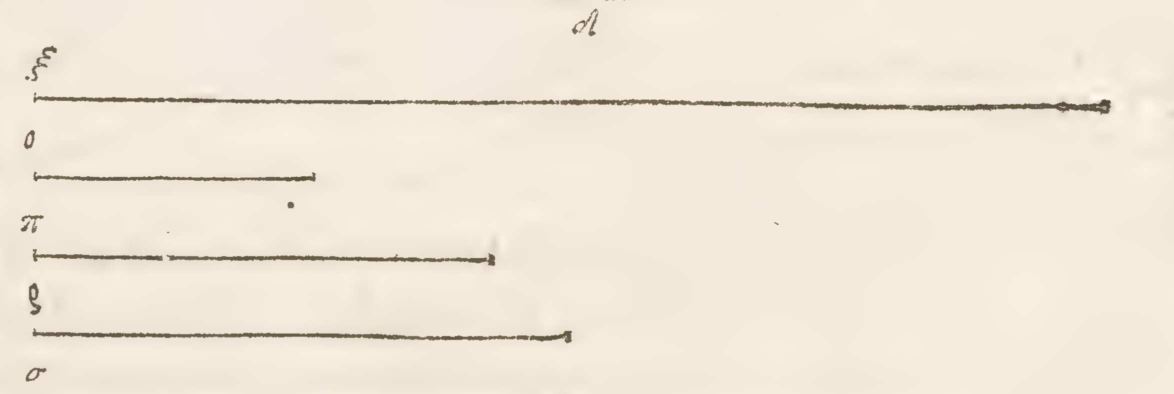
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, κγ
τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ αγ, βδ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ αβγδ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν βδ οὖσαι, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν αζ, αν κατ' ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζη, μν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται. ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μη, κορυ

φὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζ η, μ ν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ α γ. αἱ δὲ β θ, μ δ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται. ἧς βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ, ὀρθὸς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ β κ, δ μ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γ α. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν β δ ὀρθοῦ, πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστί, τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.





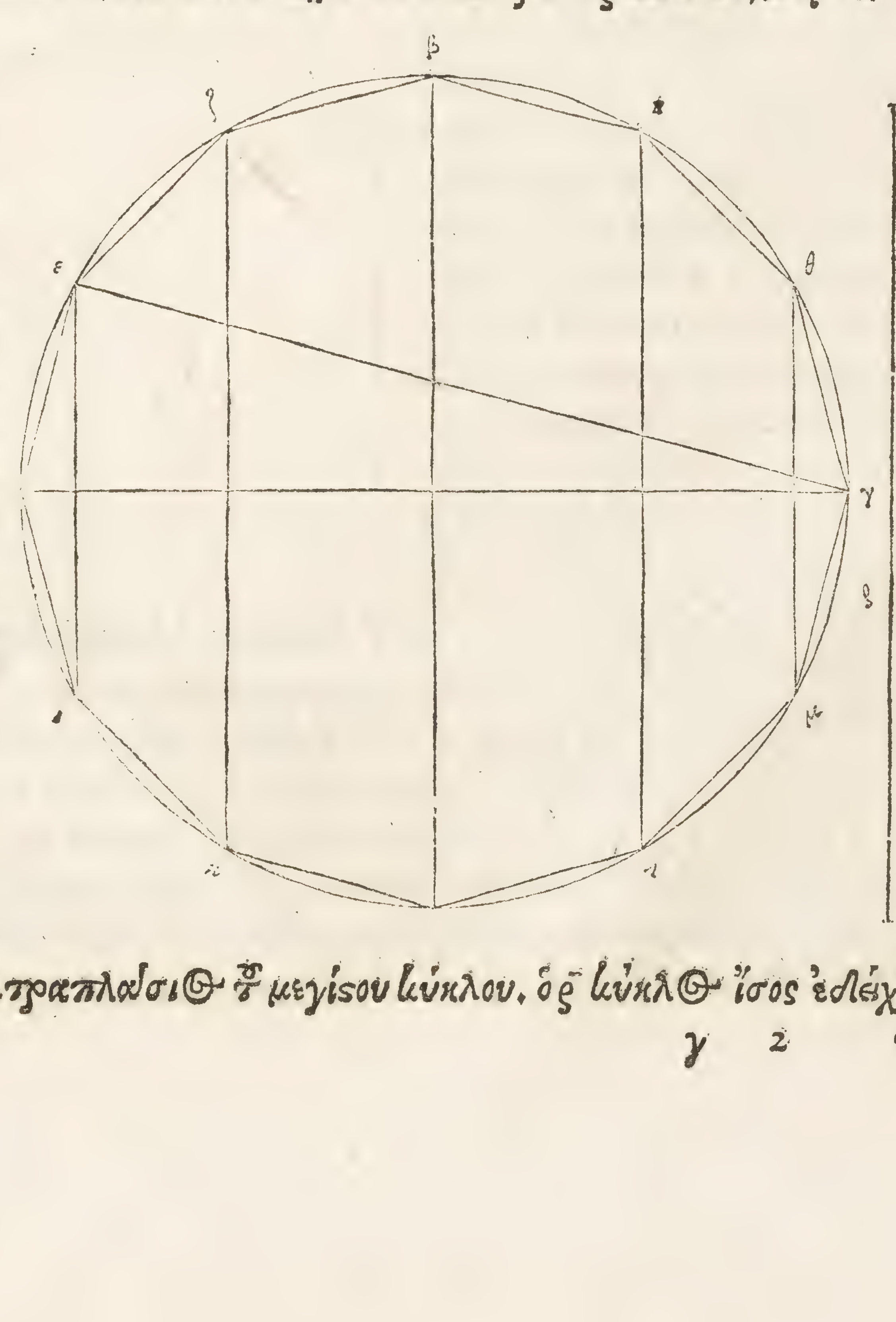
κδ Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλους οὔσας τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραφὲν σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευ-



ρὰς

ρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς εζ, ηθ, γδ, κλ, μν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, ς, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς εα, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς εα καὶ τῆς ἡμισείας τῶν εζ, ηθ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εα καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ηθ, γδ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γδ, κλ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κλ, μν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε. καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μν. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αεζ κώνου, ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν εζ, ηθ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν ηθ, γδ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν δγ, κλ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κλ, μν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μβν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῶν εζ, ηθ, γδ, κλ, μν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ εζ, ηθ, κλ, μν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε καὶ πασῶν τῶν εζ, ηθ, γδ, κλ, μν. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς αε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν εζ, ηθ, γδ, κλ, μν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

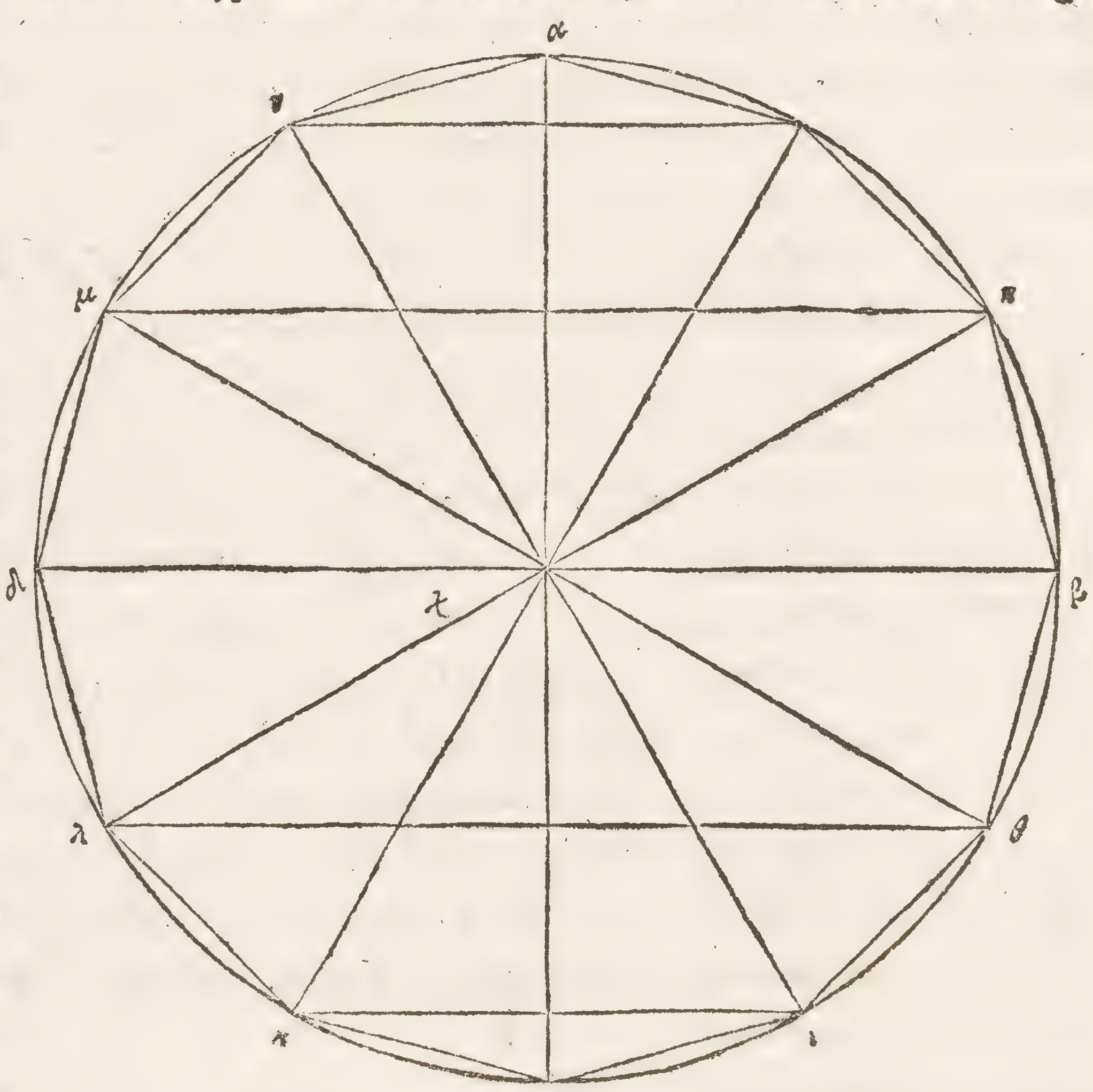
Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν κθ
ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἐπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ει, θμ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζκ, δβ, ηλ. ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ ρ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς εα, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ει, ζκ, βδ, ηλ, θμ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ει, ζκ, βδ, ηλ, θμ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν αγ. οὕτως ἡ γε πρὸς εα. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς εα, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αγ, γε ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς αγ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ αβγδ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου. καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ αβγδ κύκλου, τουτέστι τῆς αγ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ αβγδ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ αβγδ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου.

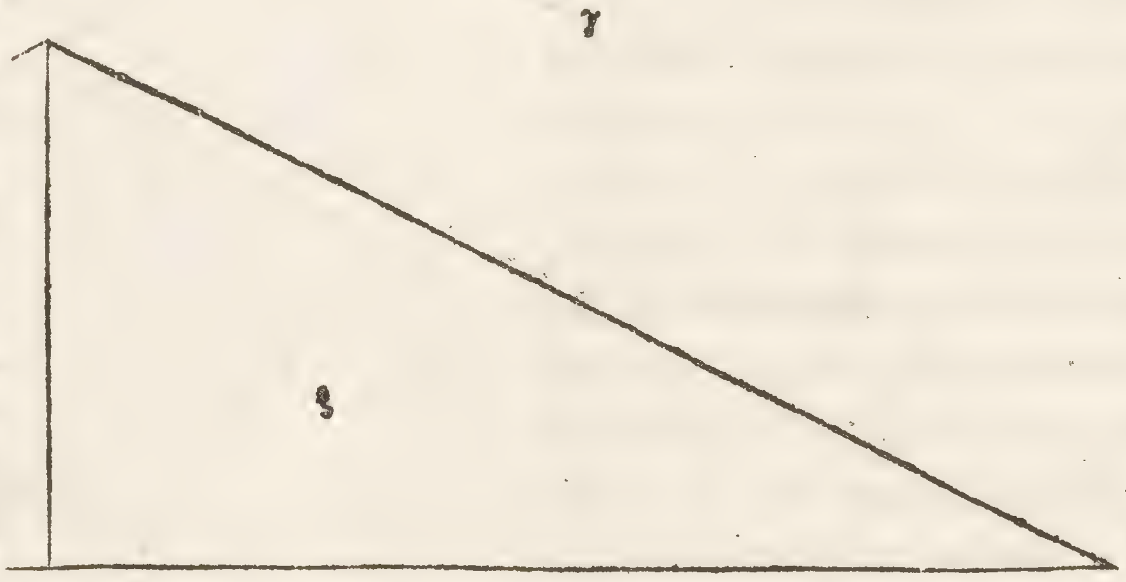


ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη

τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κς Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ρ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ρ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσὶ διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε κώνου, οὗ βάσις μὲν ἔστω ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ναζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὴν ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τῶν τε ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν ζη. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη καθέτῳ ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἴσον ἔσται κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν τε ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν βη καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐῤῥήθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσι τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ρ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

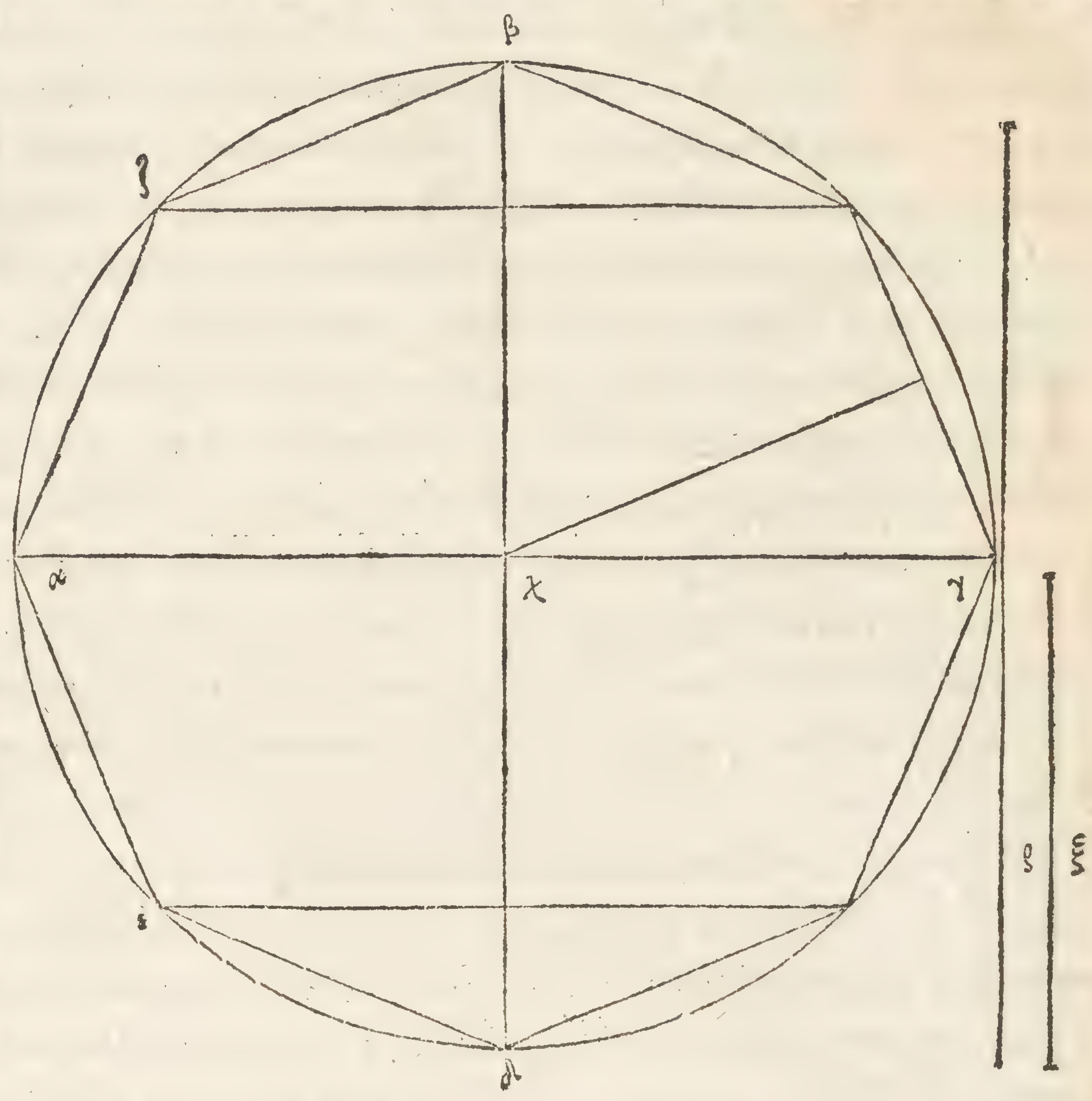




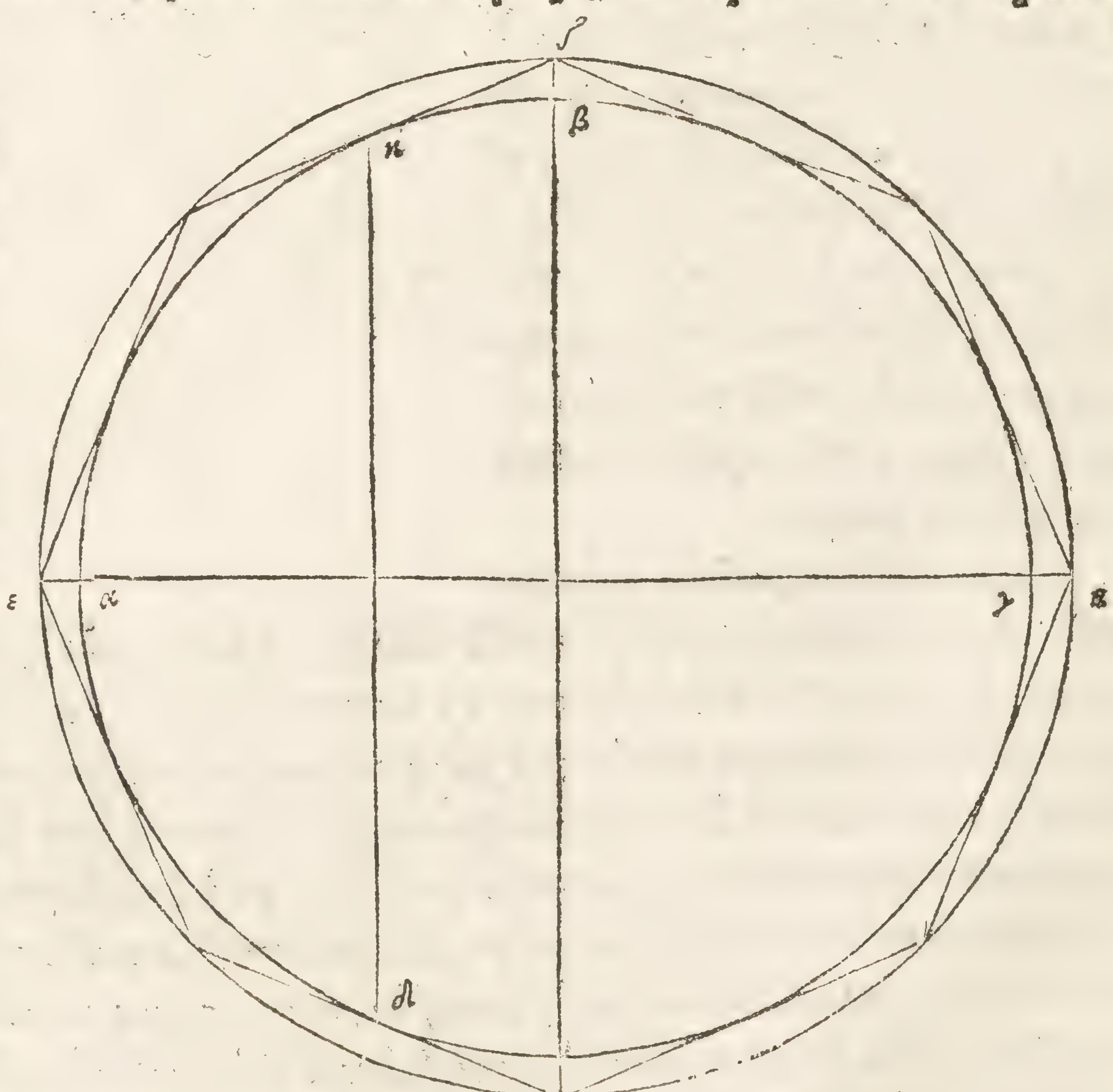
κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ρ. ὁ δὲ κῶνος

ὁ ξ

ὁ ξ ἔστω, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν α ζ. ἐδείχθη δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ κώνου.



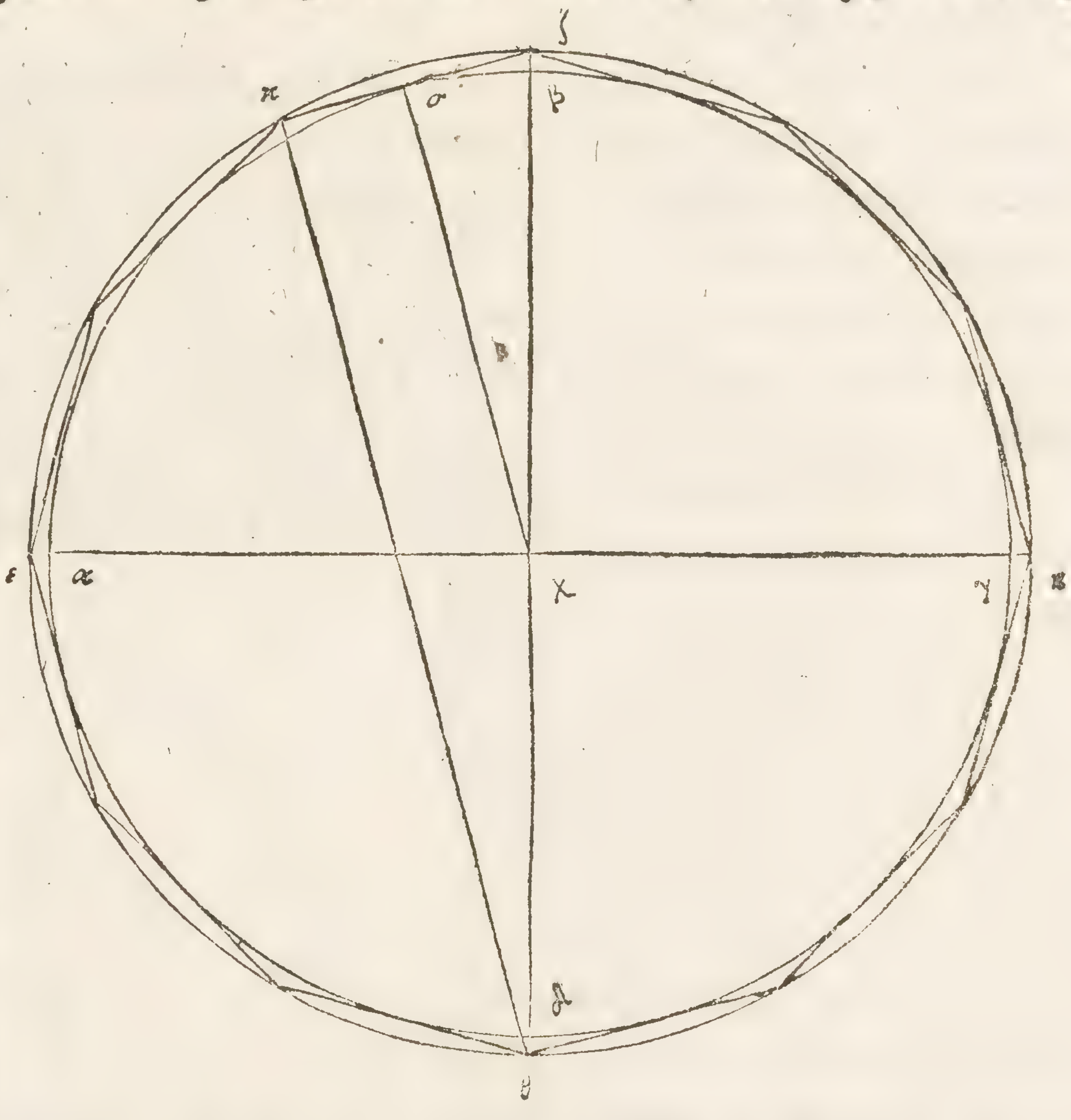
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. περὶ δὲ τὸν α β γ δ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσόγωνον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ α β γ δ, μενούσης δὴ τῆς ε η περιενεχθήτω τὸ ε ζ η θ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ α β γ δ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται. ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ε ζ η θ, κατ᾽ ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ᾽ ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράψουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε, η σημείοις, κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ε ζ η θ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου. ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κ δ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ, δ σημείων ὄντων, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ α β γ δ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κ δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν



πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν η δ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης. ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προειρημένον.

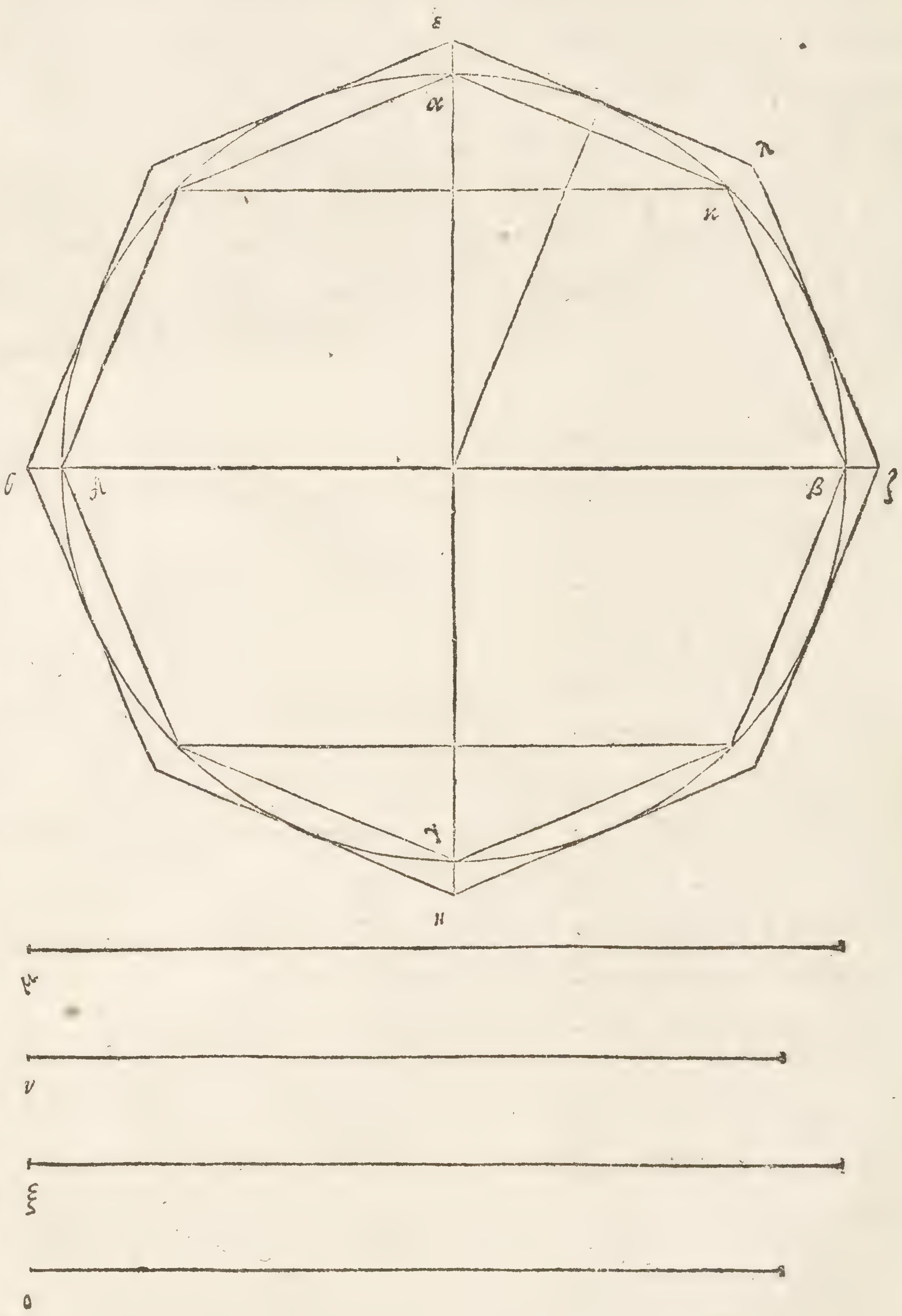
Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία
κθ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ε ζ η θ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ θ ζ, πρὸς τὴν ζ θ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κ θ πρὸς κ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζ θ κ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζ θ κ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θ κ. ἡ δὲ θ κ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ α β γ δ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χ ς, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.



Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. αὕτη δὲ ἐστὶν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν

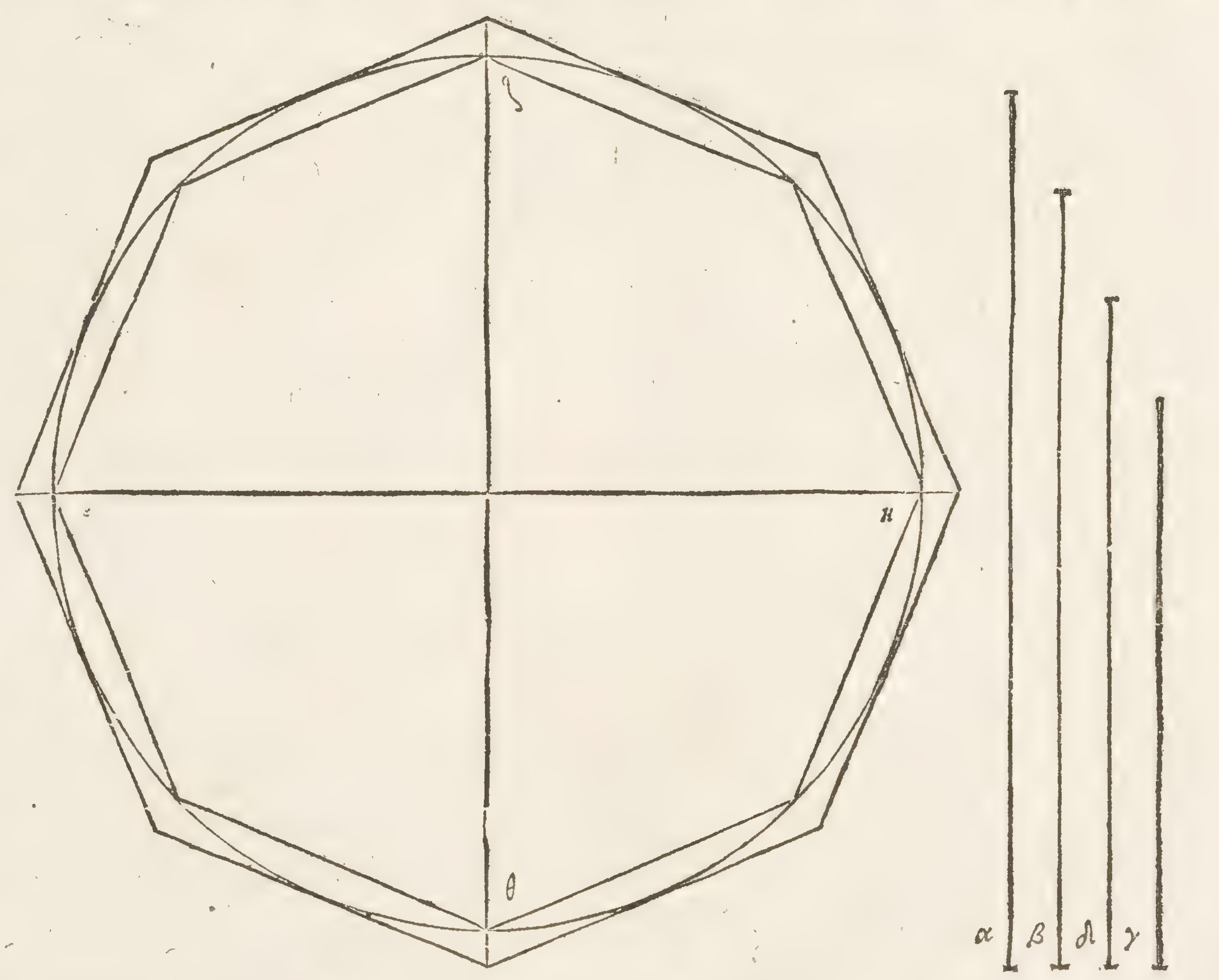
ἐν τῇ σφαίρᾳ. μείζων ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. αἱ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ εη, ζθ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς αγ, βδ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ βζ, θδ παράλληλοι, μενούσης δὴ τῆς εη διαμέτρου, καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ελ πρὸς ακ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μὲν μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ελ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς ακ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, οἵτινές εἰσιν ἴσοι ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν



τὴν σφαῖραν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ ο, ξ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τὸ αὐτὸ τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

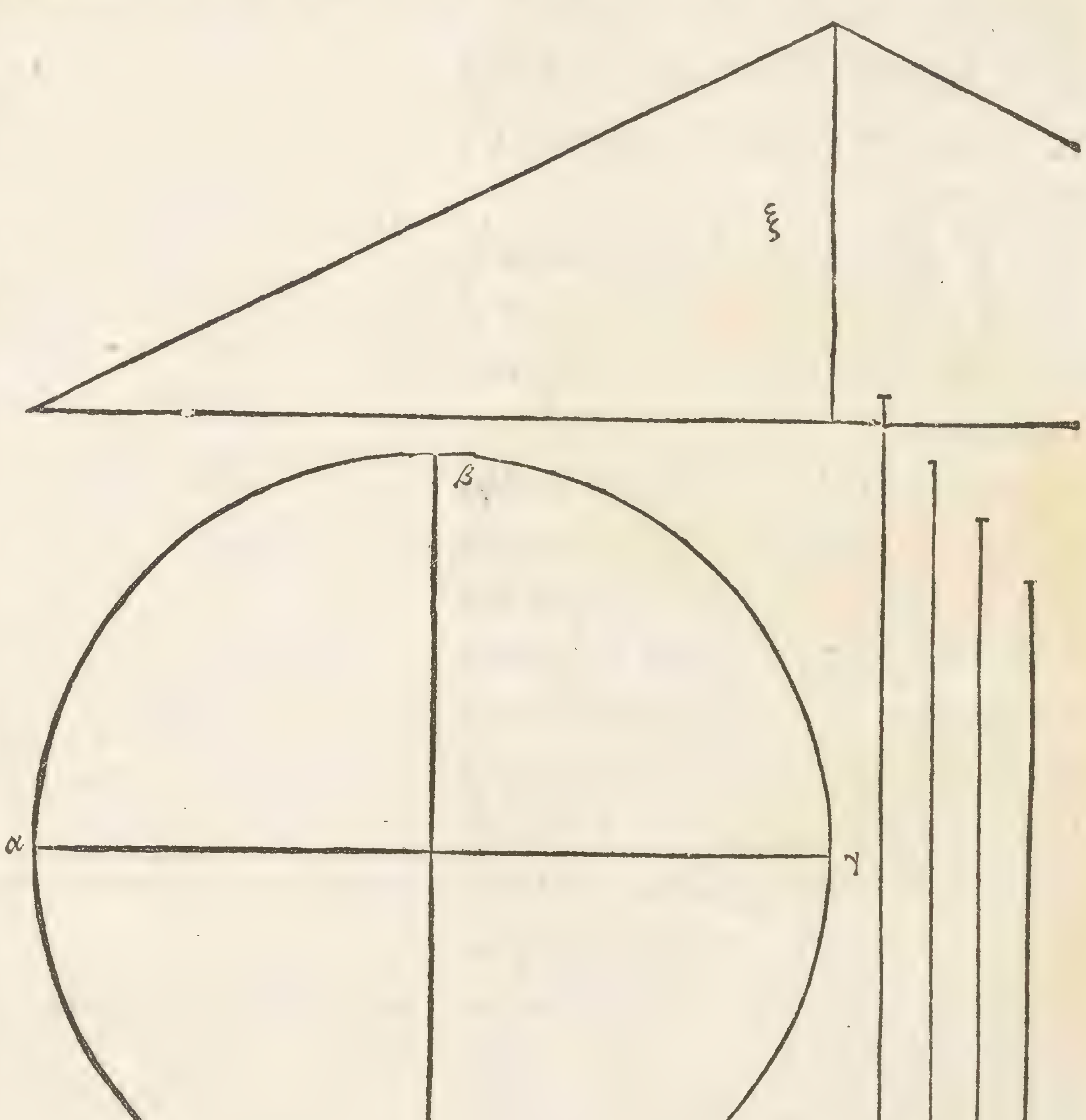
λα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον. ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ. καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιος ἐστὶν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἢ τετραπλασία. τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ α κύκλος. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν



γὰρ

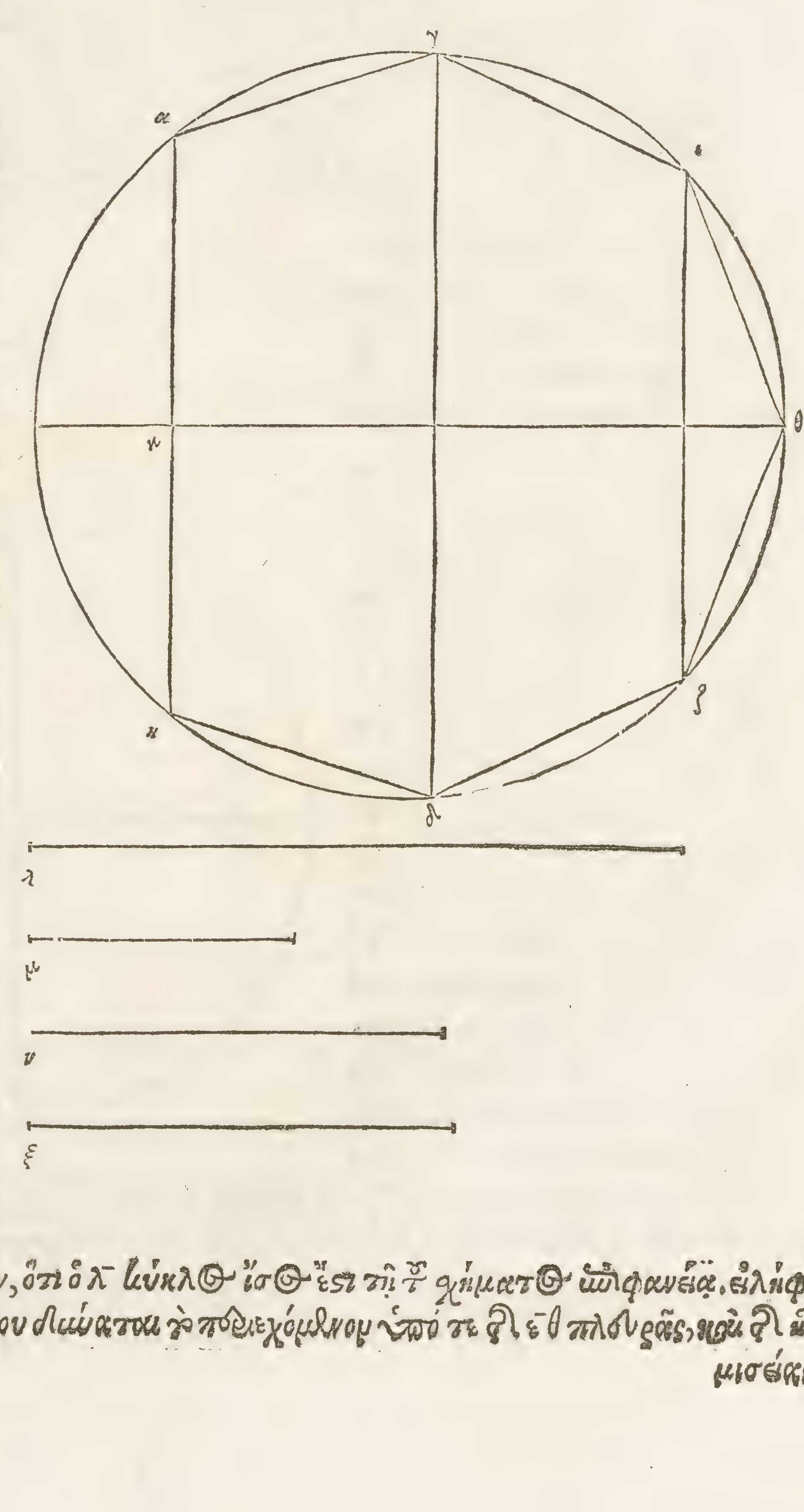
νου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ α β γ δ κύκλου. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος. δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι. ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον. ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ α γ, β δ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν α β γ δ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τῆς κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διότι ὁ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτήν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν α β γ δ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν λβ



πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ πρὸς τὴν η. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσια ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων, τετραπλασία ἄρα.

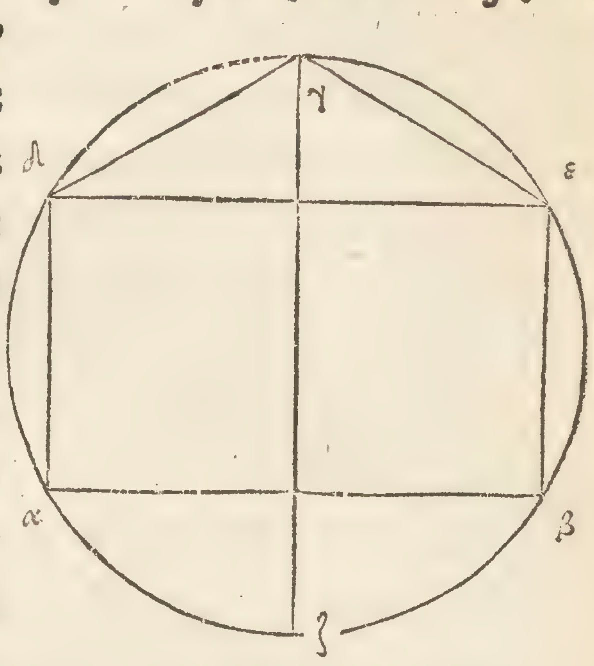
Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλάσια τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



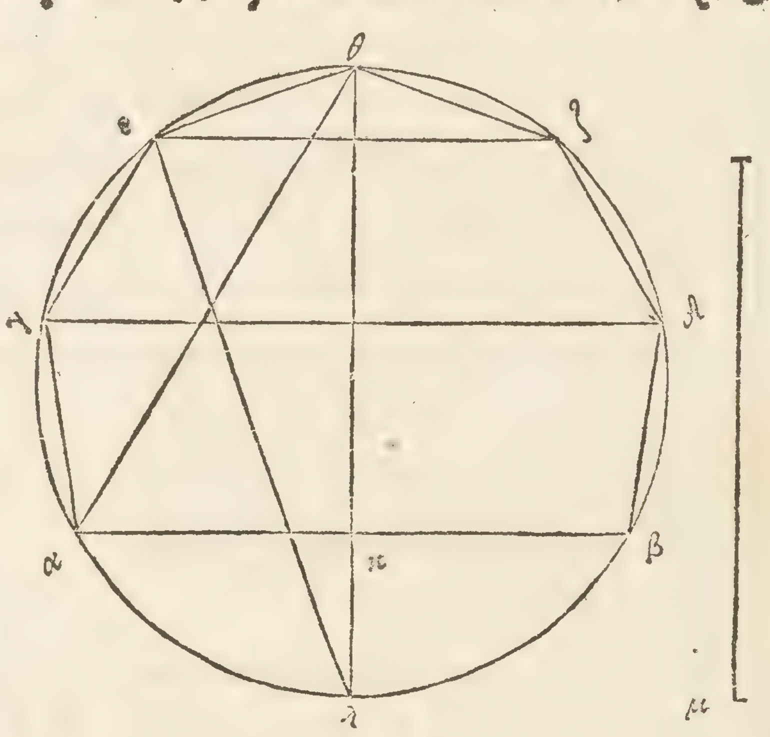
λγ Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α η κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ α η θ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ α γ ε θ ζ δ η χωρὶς τῆς α η πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς α γ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ε ζ, γ δ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς α κ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε θ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας

μισείας τῆς ε ζ. γίνεται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε γ. καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ε ζ, γ δ. ἔσται οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ε ζ, γ δ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α γ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν γ δ, α κ. καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ κατὰ τὰς α κ, γ δ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α γ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, γ δ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ α κ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α ε ζ, τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε λδ
καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α β. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γ ζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ δ ε, α β. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ α β, κορυφὴν δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ α β. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.

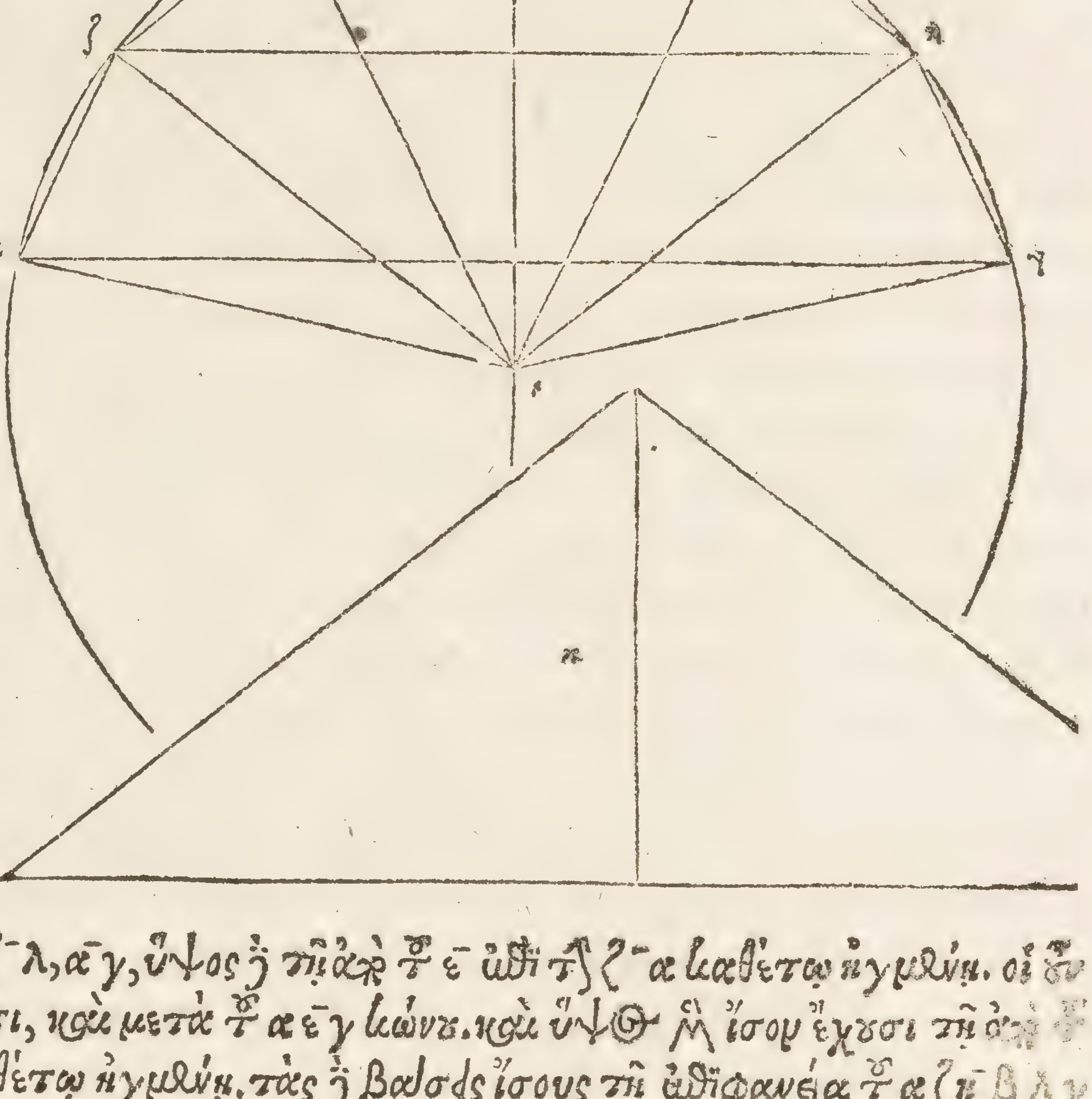


Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β ε ζ. καὶ λε
ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θ λ. ἐπεζευγμένων δὲ τῶν λ ε, θ α. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ α θ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.



Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τὴν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς α γ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς β ε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α γ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ α ε γ. ἀναγε- λς

γεγράφθωσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς κθ, ζλ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἔσται δὴ ὁ μὲν ηβθε ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κβθ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν κβ ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κθ, ζλ, καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ζεδ, κεθ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κθ, ζλ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζκ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζλ, αγ, καὶ τῶν κωνικῶν τῶν αεγ, ζελ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζλ, αγ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζα καθέτῳ ἠγμένῃ. οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ αεγ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. τὰς δὲ βάσεις ἴσους τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αζκβλγ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ αεγ κώνῳ. καὶ ὁ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ εαγ κώνῳ. ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.



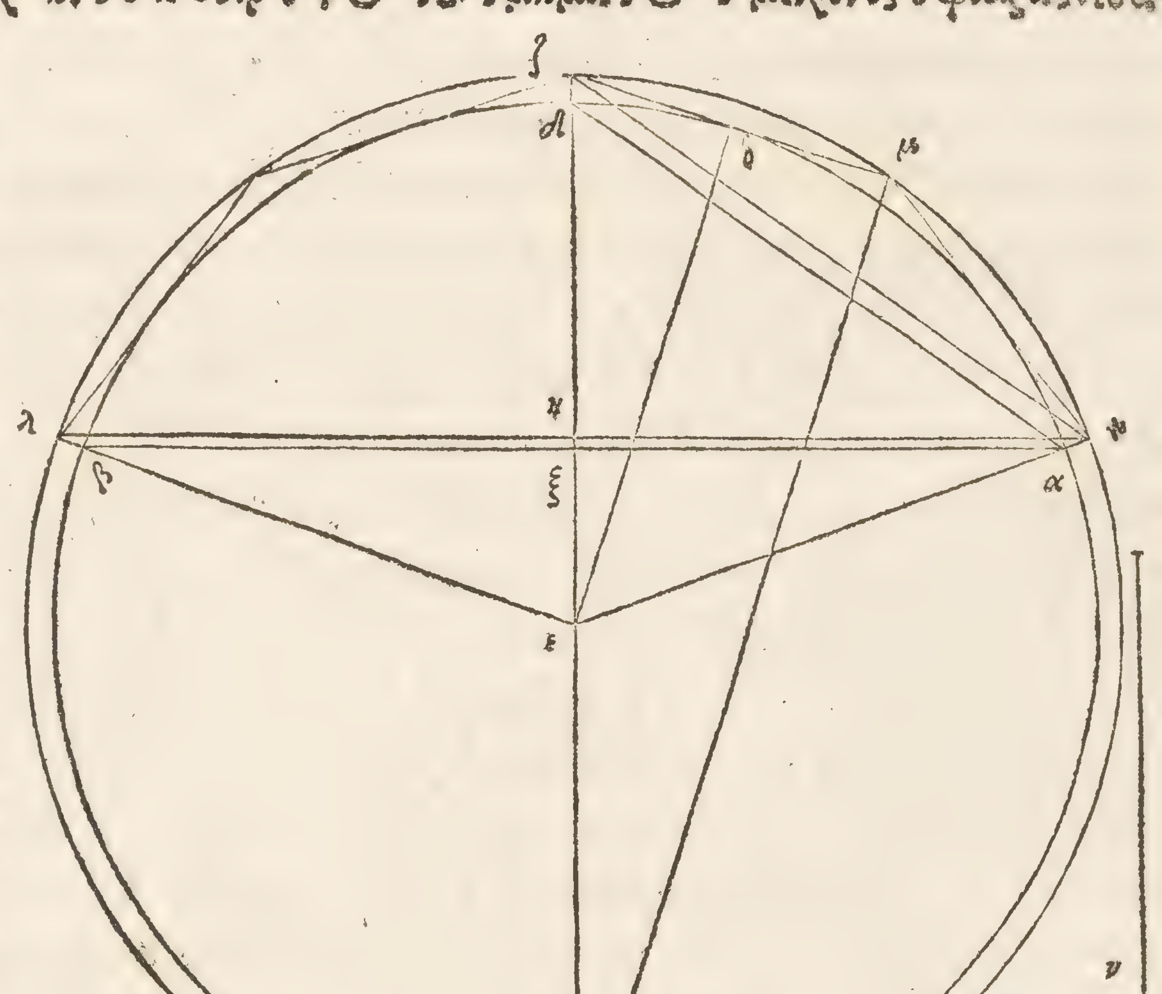
λζ Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ. καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου ὁ ἀποτέμνει ἡ αβ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ αβ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ. καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ αβγ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς εκ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὖσαι



παράλληλο

παράλληλοι τῇ αβ. τὰ δὲ σημεῖα καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφάς, παράλληλοι οὖσαι τῇ αβ. αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζη κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αβ κύκλος. ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ αμ, βν. κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ αμ, θ εν β ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αβ κύκλος ἐστί. πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐπ᾽ αὐτῷ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν αβ κύκλον. καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ᾽ ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζμ, ην ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μα, νβ. ἡ μὲν γὰρ ζμ τῆς μα μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ νη τῆς νβ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. *ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ περιγεγραμμένον.

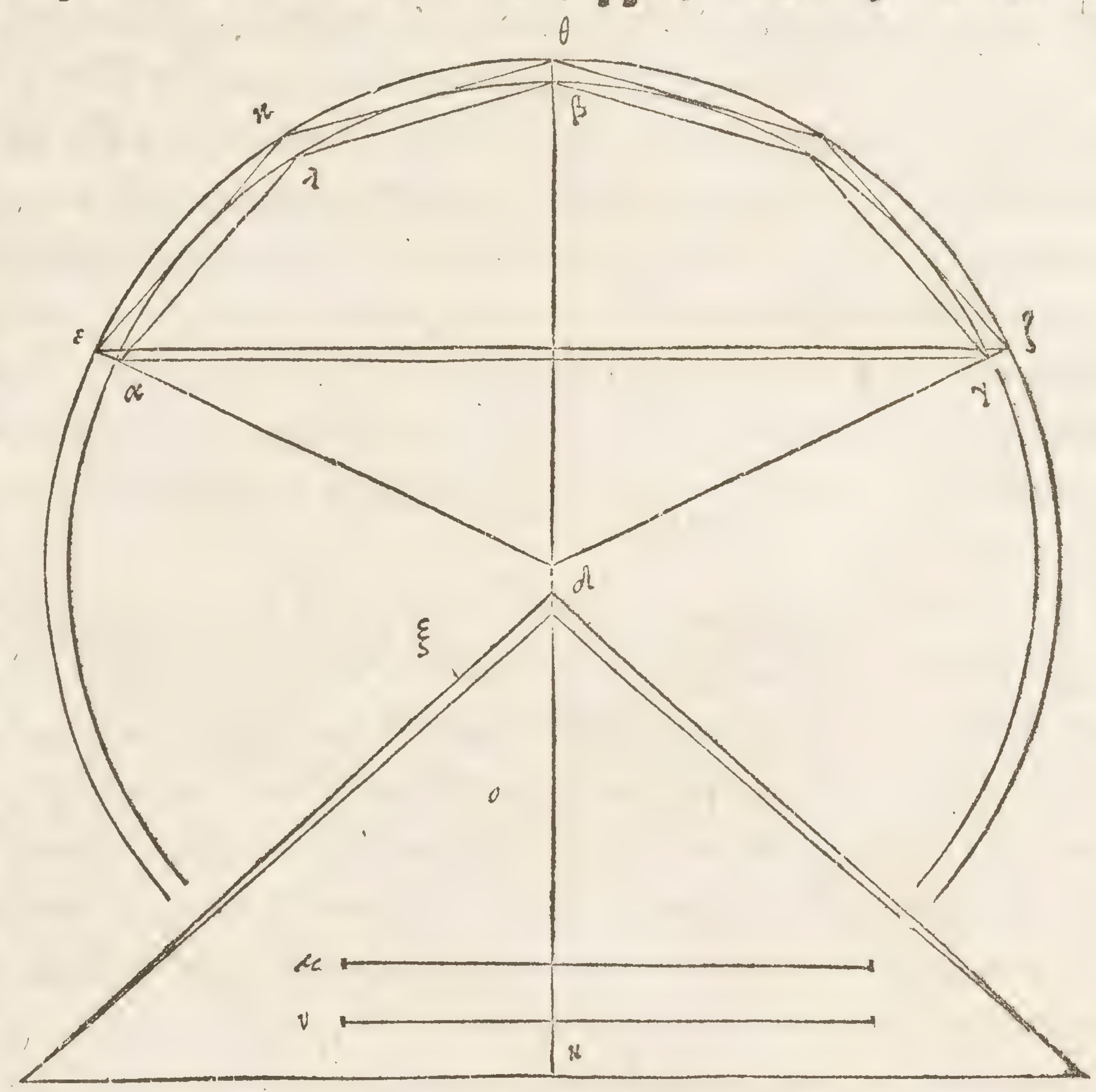
Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ αβγδ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λκζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. τὸ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κλ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μθ καὶ ζη. ὃ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μθ, κζ περιεχομένῳ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν κζ μείζων ἐστὶ τῆς δξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κζ, ἔσται παράλληλος τῇ δα. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ τῇ κλ παράλληλος. καὶ κοινὴ ἡ ζε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζκη τρίγωνον, τῷ δαξ τριγώνῳ. καὶ ἔστι μείζων ἡ ζκ τῆς αδ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζη τῆς δξ. ἴση δὲ ἡ μθ τῇ διαμέτρῳ τῇ γδ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ εκ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μο τῇ οζ, ἡ δὲ θε τῇ εζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εο τῇ μθ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μθ τῆς εο. ἀλλὰ καὶ ἡ γδ διπλασία ἐστὶ τῆς εο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μθ τῇ γδ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γδ, δξ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ. ἡ ἄρα τοῦ



σχήματος τοῦ κζλ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν αβ. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

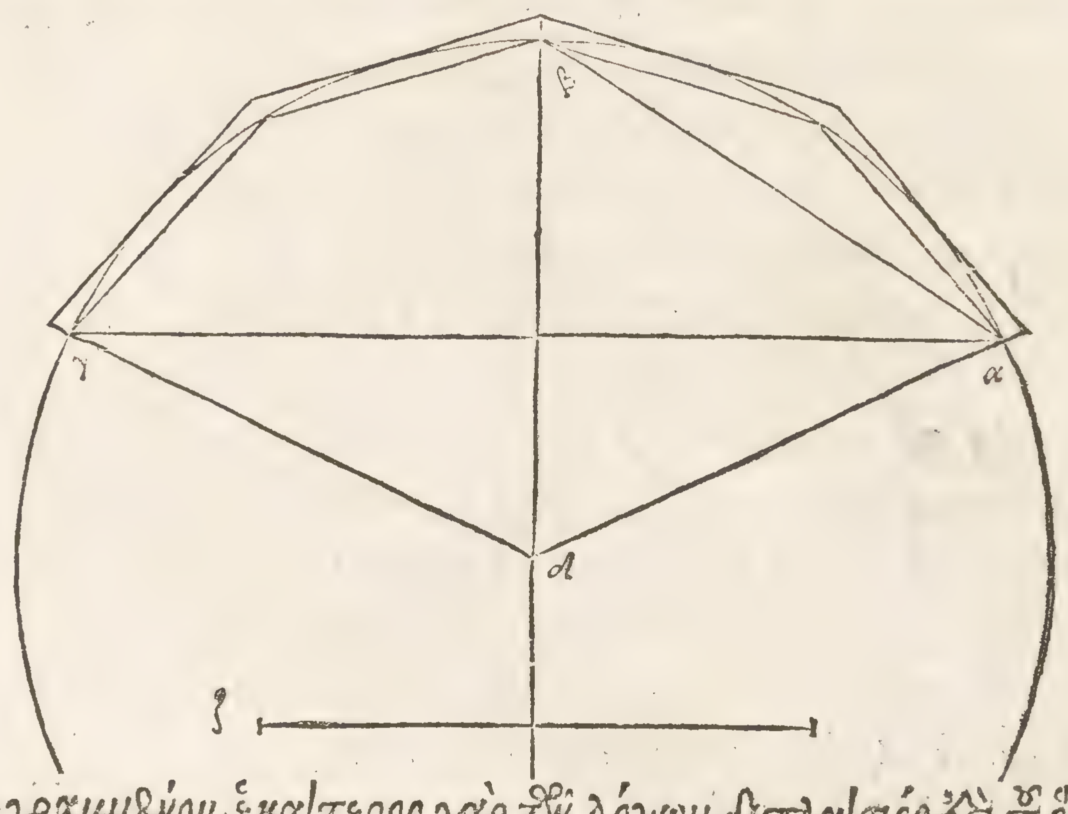
Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τομεῖ, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆ- λθ

μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν αβγ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ηβ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς τὴν αλ. τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν αλ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ, ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο. οὕτω τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς αλ.



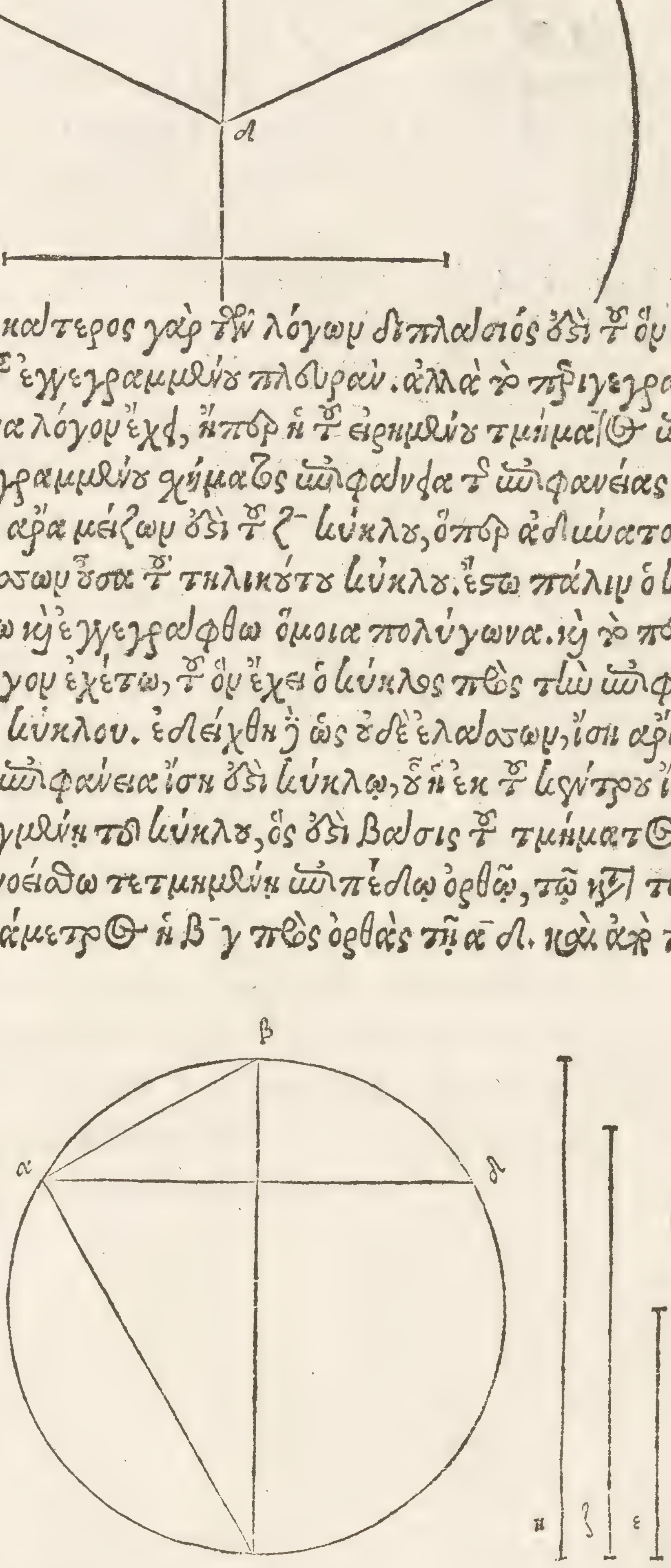
μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ αβγ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αγ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ αβγ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω κύκλος

κύκλος ὁ ζ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. δέδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας. καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.



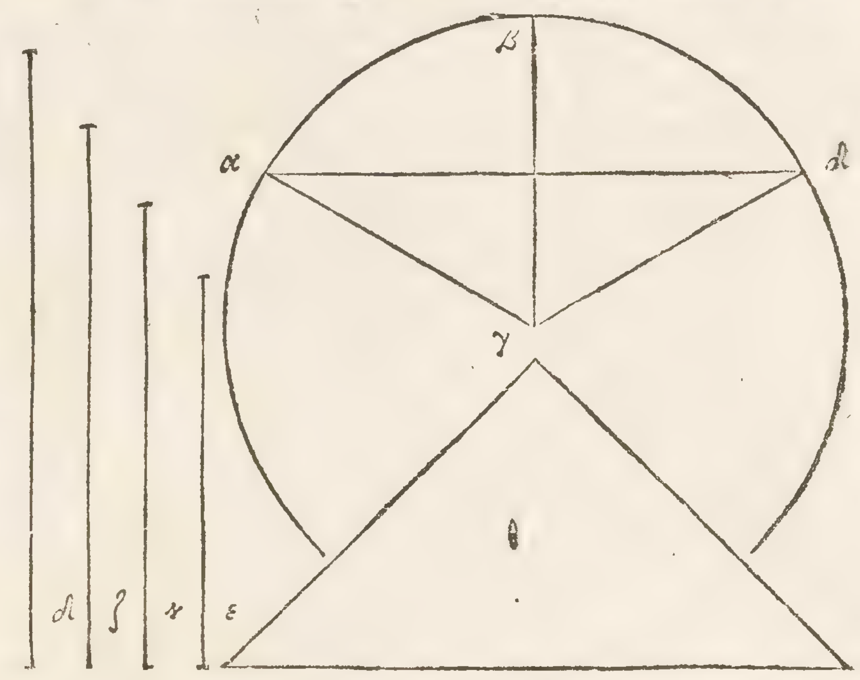
Ἂν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. μα

ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, τῷ κατὰ τὴν αδ. καὶ τὸ αβδ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ βγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αδ. καὶ ἀπὸ τῶν β, γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γβ, καὶ ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκάτερα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβδ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ αγδ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὅ δή ἐστι μείζων ἡμισφαιρίου.



Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβδ, καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ βγ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ αβγδ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου. καὶ κείσθω ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον μβ

γωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιογώνιον. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω. ὅπερ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τοιοῦτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὴ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.



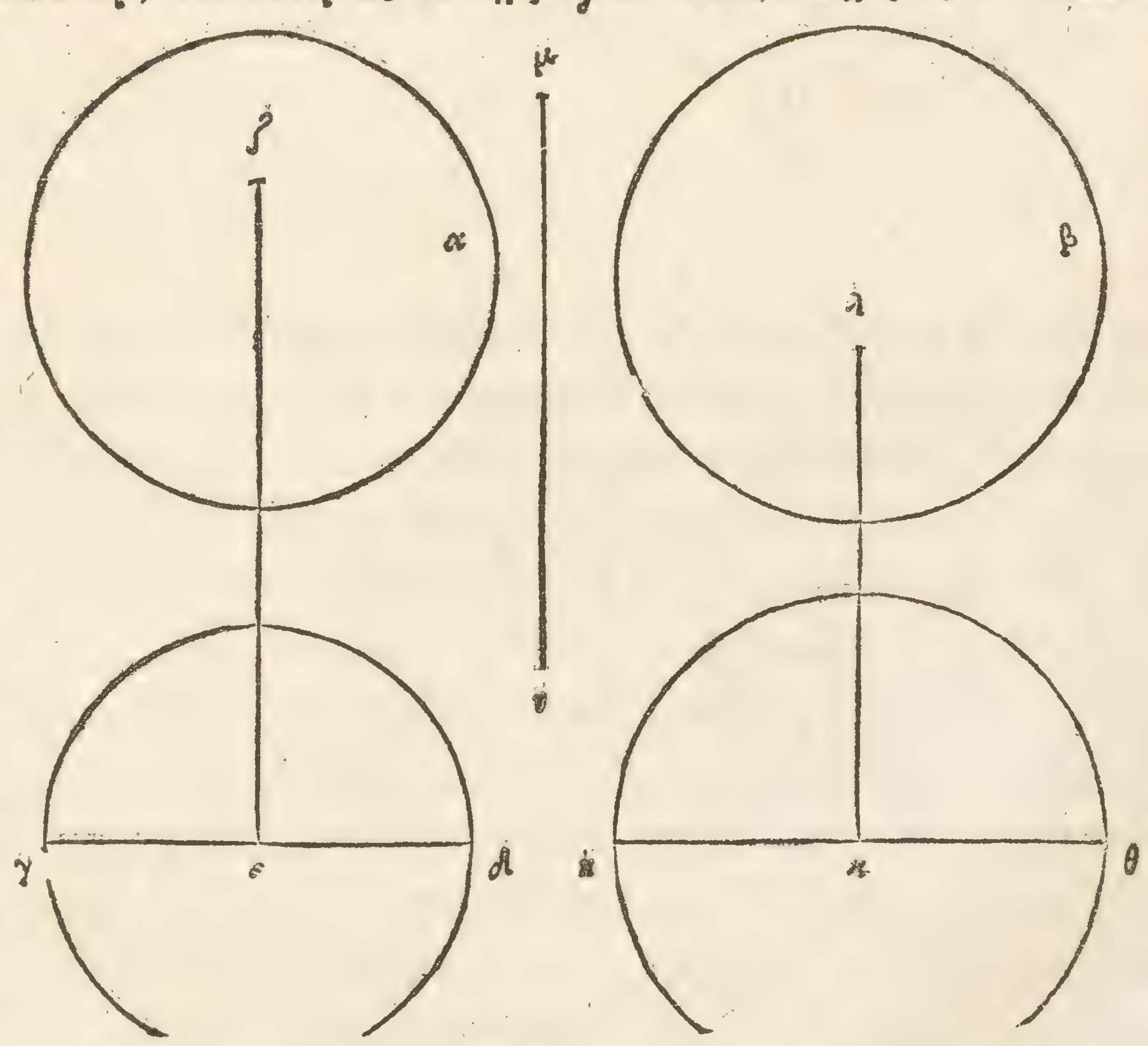
Ἀρχιμήδους

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

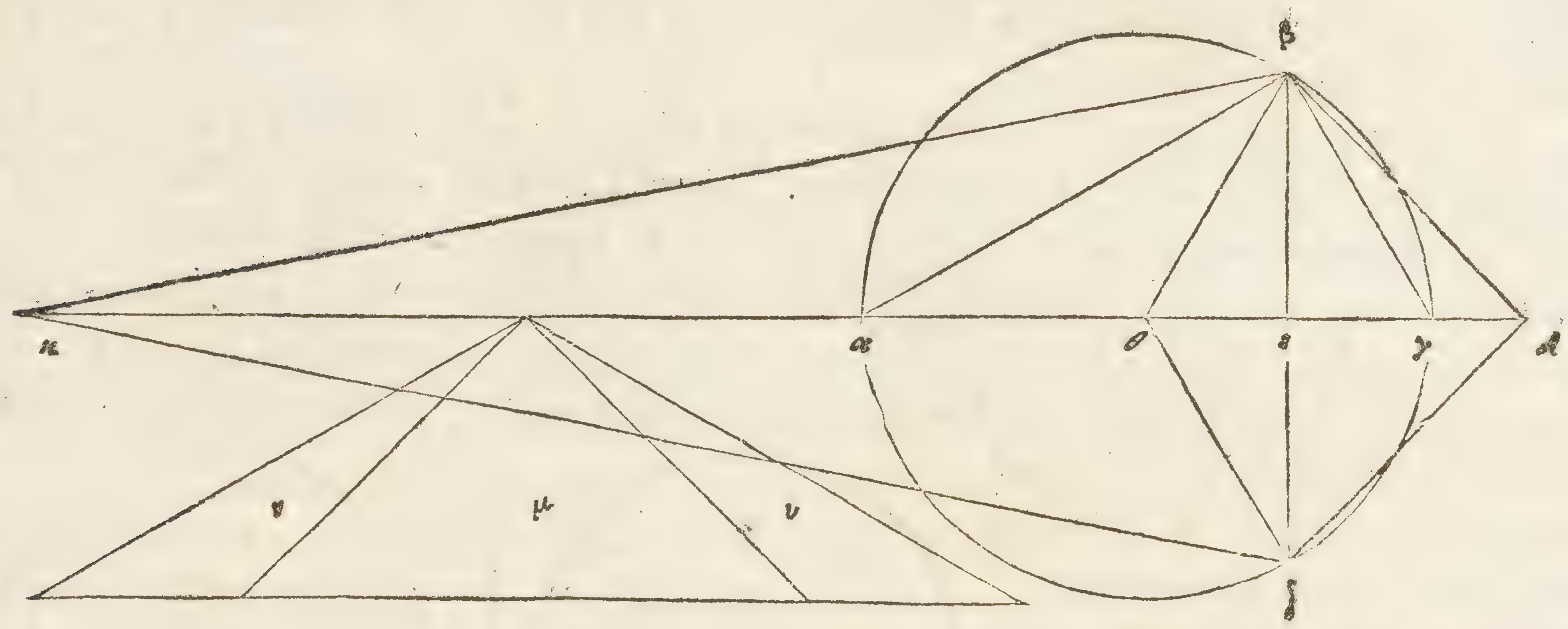
Πρότερον μὲν ἀπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξεις. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ δὴ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι' ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων, τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερὸν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερον ἦν κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. ἔστω ὁ διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζδ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, οὕτως ἡ κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ ηθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν εζ, ἔστω τῷ ἀπὸ ηθ ἴσον τῷ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ ηθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ηθ, μν, συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου, ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθω τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ ηθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτω τὴν ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ ηθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γδ πρὸς ηθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλὰξ, καὶ ἴση ἡ ηθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, του- α



τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν εζ. τῶν ἄρα ε, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ηθ ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ηθ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ αγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς βζ πρὸς ὀρθὰς τῇ αγ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ δε πρὸς γε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν βδζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ βκζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, θζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βγζ τμήματος τῆς σφαίρας. τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βγ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔσται δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ βγθζ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ δε πρὸς εγ, οὕτω συναμφότερος ἡ θα, αε. πρὸς αε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γδ πρὸς γε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς αε. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δγ πρὸς

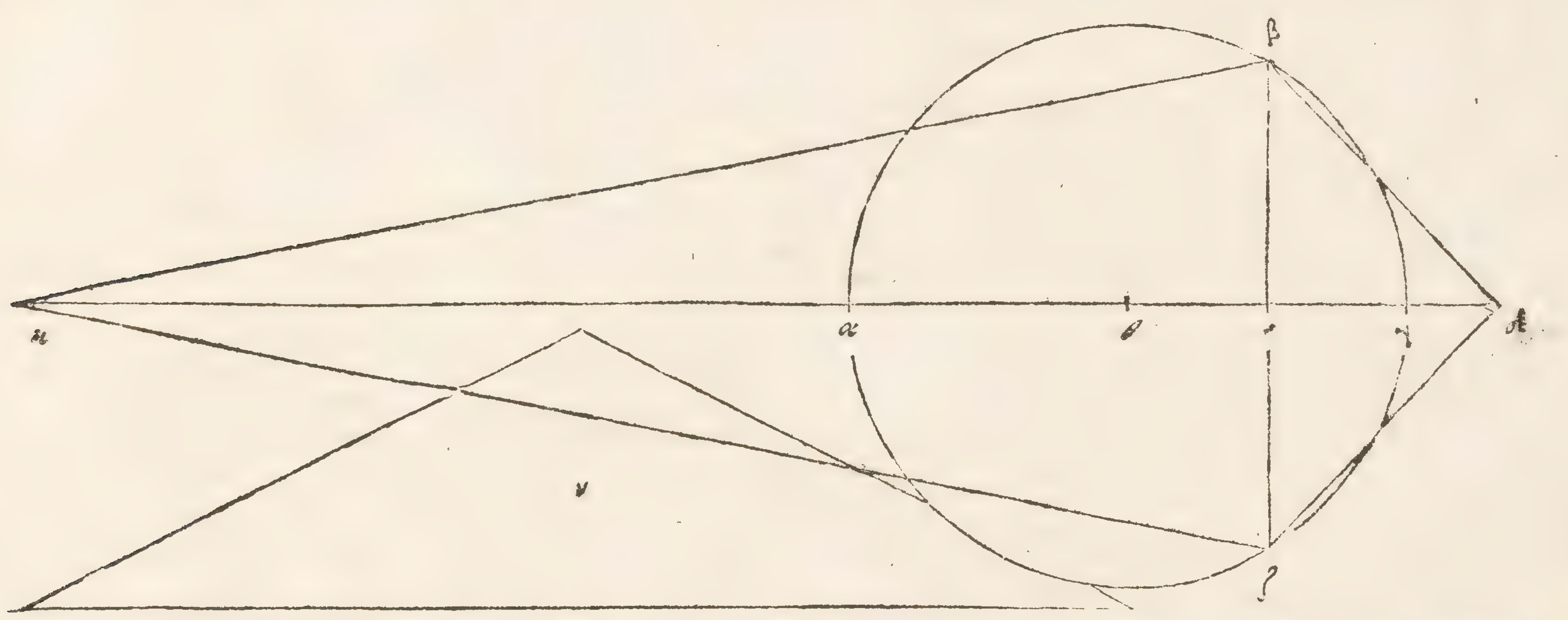


γθ ἐστιν, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θδ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς γθ, τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἴση δέ ἐστιν ἡ γβ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ βε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς θγ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ θγ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ δθ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δθ. ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ' ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βγζθ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ βγζθ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ, λοιπὸς ἄρα ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βζγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ βκζ κῶνος, ἴσος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ θγ πρὸς γε. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κα πρὸς αθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κθ πρὸς θα, ἡ αγ πρὸς γε, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ βε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αβ. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἔσται

ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ βθζα στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κθ πρὸς θα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ αθ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεὺς τῷ βθζκ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ. ὅλον ἄρα τὸ αβζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βζκ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δε πρὸς εγ, οὕτως ὁ δζβ κῶνος, τουτέστι τὸ βγζ τμῆμα πρὸς τὸν βγζ κῶνον.

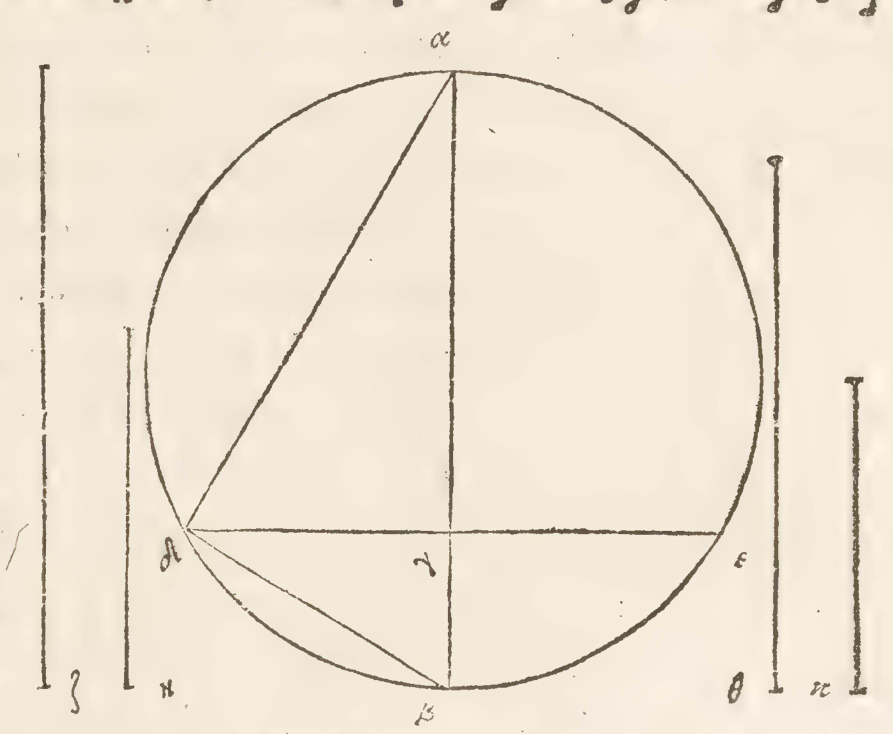
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κβζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αζβ τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος. ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε πρὸς αε, ἡ δε πρὸς εγ. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ θγ πρὸς γδ, ἡ αε πρὸς εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κε πρὸς εα, συναμφότερος ἡ θγ, ε πρὸς γε. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κα πρὸς γθ, τουτέστι πρὸς θα, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. τουτέστιν ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ἴση γὰρ ἡ αθ τῇ θγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ. ἔστιν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. τουτέστιν ὡς ἡ κθ



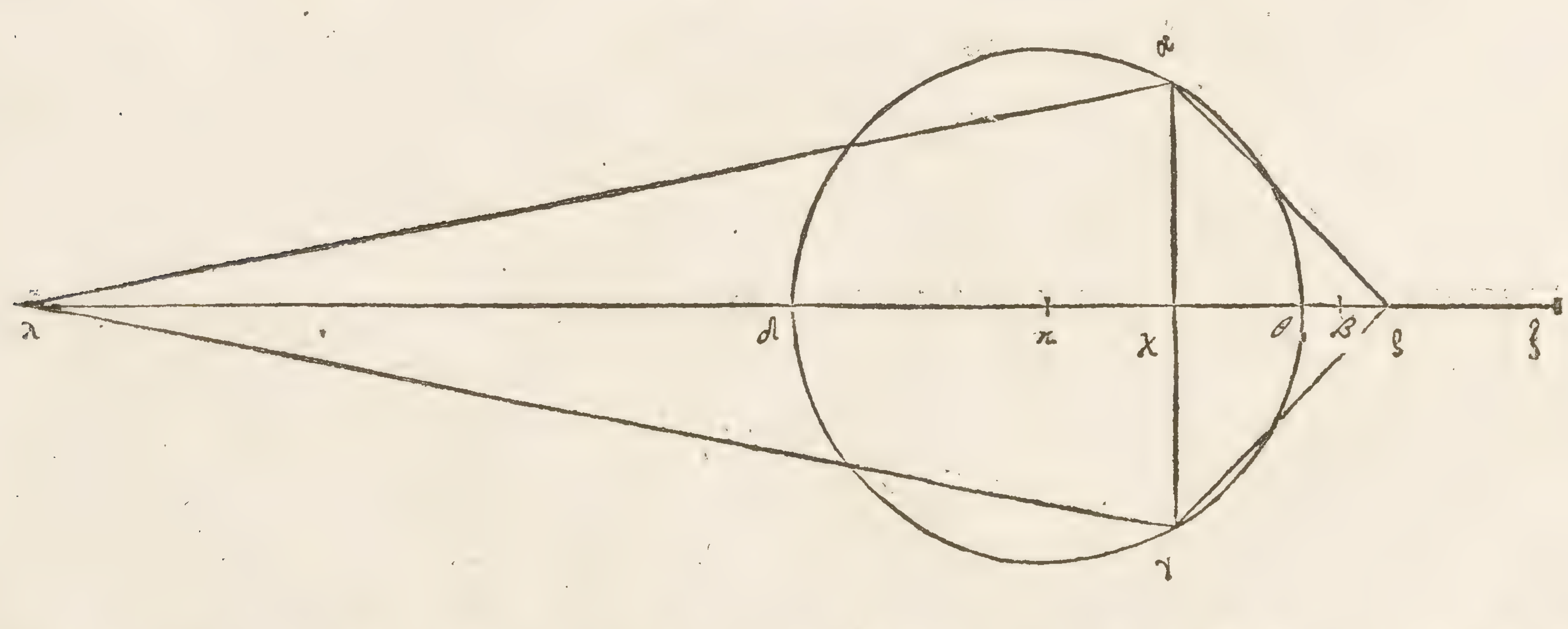
πρὸς θα. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δθκ, θα τῷ ὑπὸ τῶν δκ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς γδ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. ὡς δὲ ἡ θγ πρὸς γδ, ἐδείχθη ἡ αε πρὸς εγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ αε πρὸς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ. τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κθδ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κδ, αθ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κδ, αθ, τουτέστιν ἡ κδ πρὸς αθ. τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. καί ἐστιν ἴση ἡ αγ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς αθ. τουτέστιν ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ βδζκ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος. ὕψος δὲ ἡ δκ. ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ᾽ οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βκζδ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ βζκδ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ βγζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ βκζ κῶνος, ἴσος ἐστὶ τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αδβε. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αβ. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν αβ ἐπίπε γ

δον ὀρθόν. καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ α δ β ε κύκλῳ τομὴν τὴν δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β δ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος. ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α δ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ β. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. λόγος ἄρα τῆς α γ πρὸς γ β δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καὶ ἔστι τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ ε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δ ε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β δ ε. καὶ διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ α β, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α γ πρὸς β γ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, εὐθεῖα. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ, ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α δ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δ β. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος. ὁ δὲ κ τοῦ δ β ε τμήματος. τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α δ β, καὶ κάθετος ἡ γ δ. ἔστιν ὡς ἡ α γ πρὸς γ β, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος τῆς σφαίρας.



δ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ α β γ δ. δεῖ δὲ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς α γ ἐπιπέδῳ, λόγος ἄρα τοῦ α δ γ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δ β. καὶ πεποιείσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κ δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ β χ πρὸς β χ, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ, α ρ, ρ γ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν α λ γ κῶνος, τῷ α δ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ α ρ γ, τῷ α β γ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α λ γ κώνου πρὸς τὸν α ρ γ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ ρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὸν α γ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ χ πρὸς χ ρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς κ δ, ἡ κ β πρὸς β ρ,

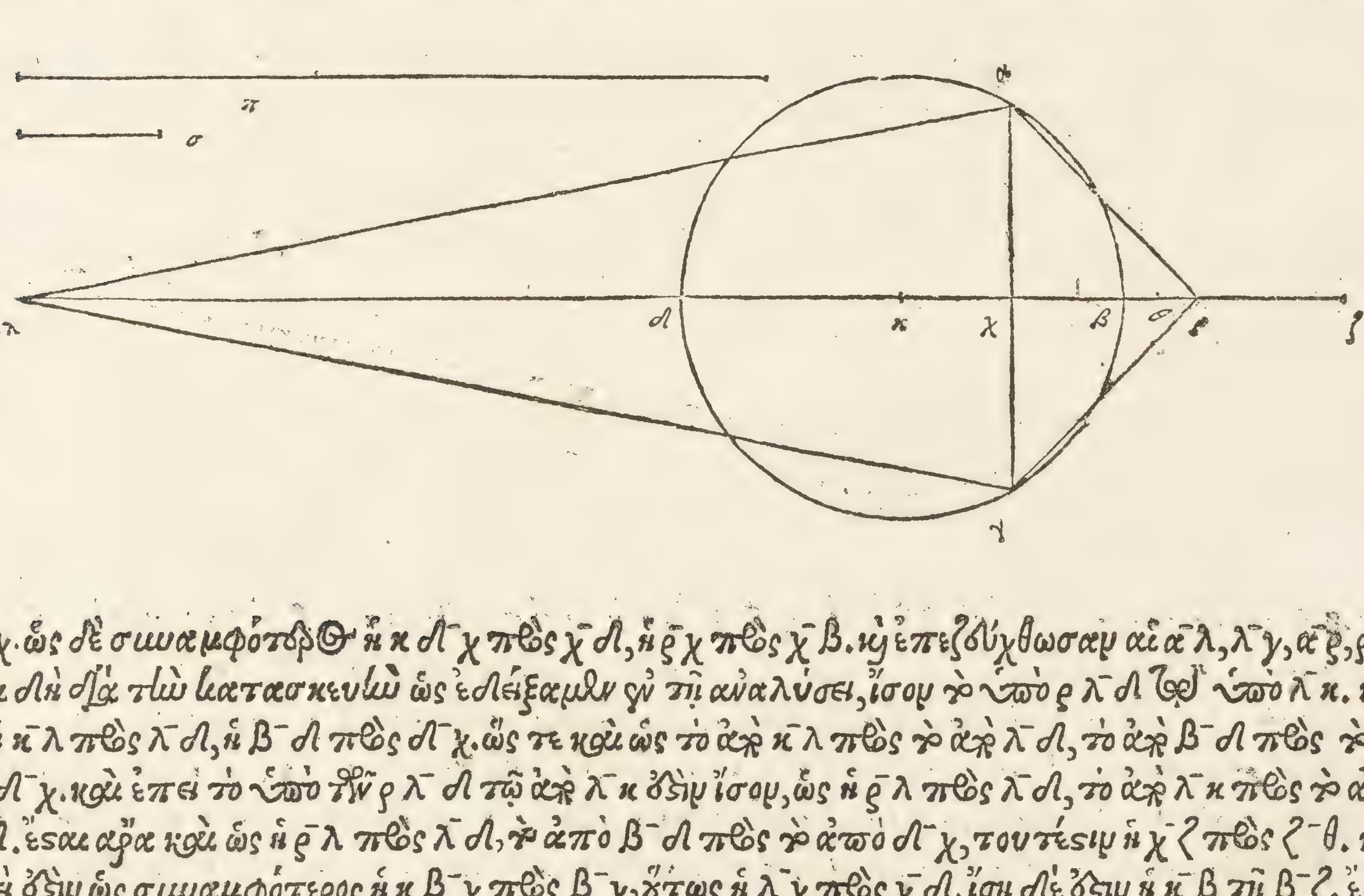


καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρ β πρὸς β κ, ἡ κ δ πρὸς λ δ. συνθέντι ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ β, τουτέστι πρὸς κ δ, οὕτως ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην τὴν κ λ ἐστίν, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρ λ δ, τῷ ἀπὸ λ κ. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, οὕτως ἡ δ χ πρὸς χ β. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, οὕτως ἡ β δ πρὸς δ χ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ.

πάλιν

πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ζδ εὐθεῖα. παρὰ δοθεῖσαν τὴν δζ. τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ. οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον οὐκ ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ. καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ. ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ. καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ. καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

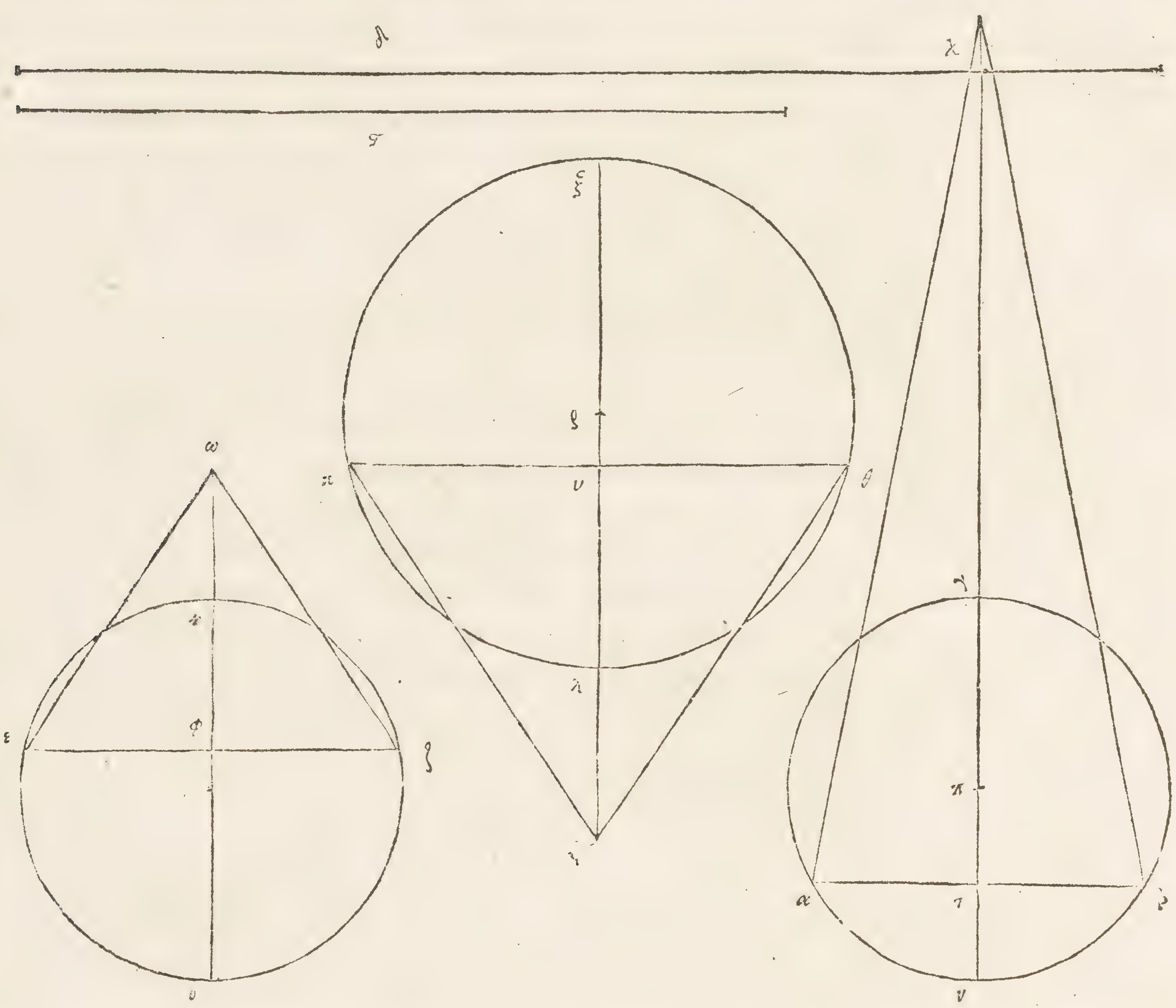
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ. τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὸ βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς



δχ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδ, χ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δέ ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ δχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ, καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶ-

νον, τουτέστι τὸ α λ γ τμῆμα τῆς σφαίρας, πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ π πρὸς σ.

ε Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ α β γ, ε ζ η. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. τοῦ δὲ ε ζ η βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ, κορυφὴ δὲ τὸ η σημεῖον. δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν α β γ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ε ζ η ὅμοιον. εὑρήσθω. καὶ ἔστω τὸ θ κ λ. καὶ ἔστω αὐτοῦ μὲν βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον. ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ α ν β γ, θ ξ κ λ, ε ο ζ η, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν τῶν τμημάτων αἱ γ ν, λ ξ, η ο. καὶ ἔστω κέντρα τὰ π, ρ, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς τὴν ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ρ ξ, ξ υ πρὸς ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ σ ο, ο φ

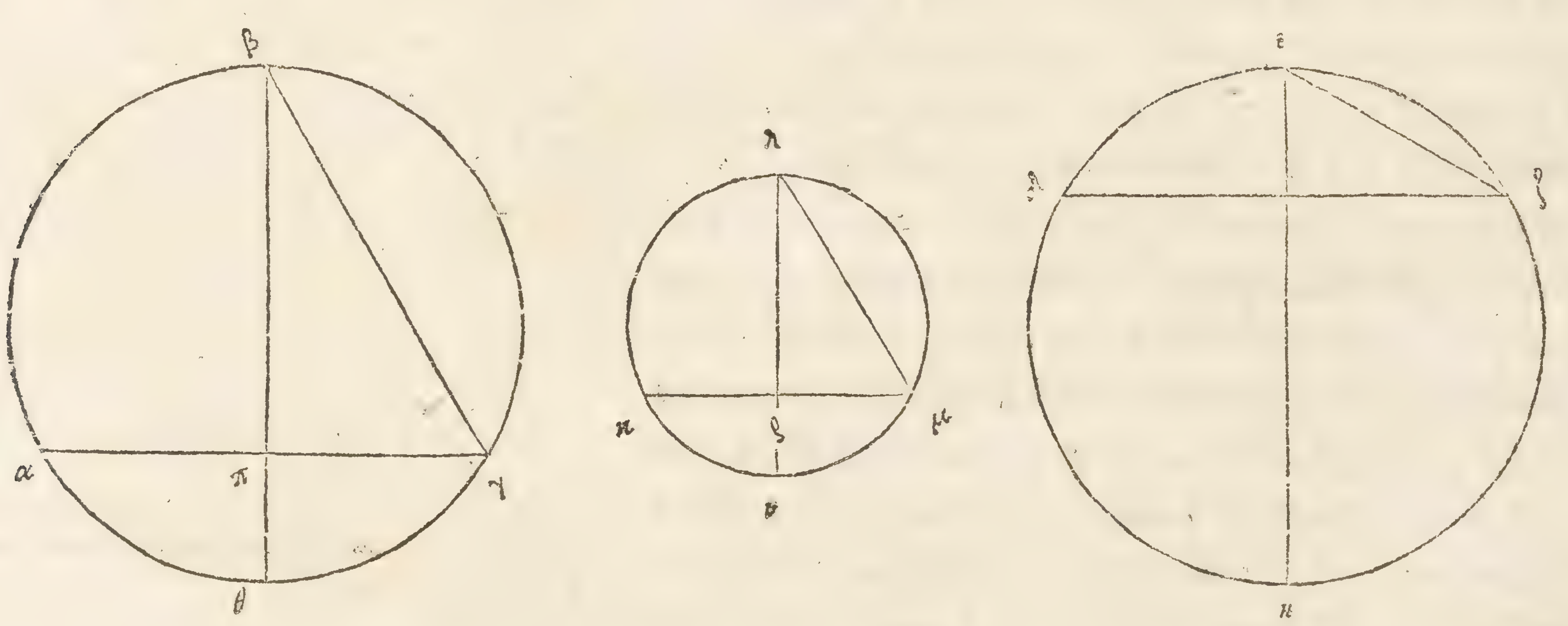


πρὸς ο φ, οὕτως ἡ ω φ πρὸς φ η. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν οἱ περὶ διάμετρον τὴν α β, θ κ, ε ζ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ χ, ψ, ω σημεῖα. ἔστι δὲ ἴσος ὁ μὲν α β χ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ψ θ κ τῷ θ κ λ. ὁ δὲ ε ω ζ τῷ ε η ζ. τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ θ κ λ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ α χ β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ε ζ η τμῆμα τῷ θ κ λ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ε ζ ω κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τοῦτο γὰρ δειχθήσεται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. λόγος δὲ τῆς ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ψ υ πρὸς τὴν θ κ δοθείς, ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς χ τ πρὸς δ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ χ τ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. κείσθω τῷ ἀπὸ θ κ ἴσον τὸ ὑπὸ α β, ς. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν ς. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐναλλάξ. ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ ς πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ
θ κ πρὸς ς. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ θ κ τῷ ὑπὸ τῶν α β, ς. ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ς, καὶ ἡ ς πρὸς δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ θ κ, ς.

Συντε.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι τὸ α β γ. ᾧ δὲ ὅμοιον τὸ ε ζ η. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ α β γ ν, η ε ο ζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γ ν, η ο. καὶ κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σ ο φ πρὸς ο φ, ἡ ω φ πρὸς φ η. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χ α β κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζ ω ε τῷ ε η ζ. πεποιήσθω ὡς ἡ ω φ πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θ κ, ς. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν α β πρὸς θ κ, οὕτως τὴν κ θ πρὸς ς, καὶ τὴν ς πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θ κ κύκλου τμῆμα ἐφεστάσθω τὸ θ κ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λ ξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λ θ ξ κ, κέντρον δὲ τὸ ρ. καὶ διὰ τῆς θ κ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λ ξ. ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ρ ξ υ πρὸς τὴν ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ. ἴσος ἄρα ψ θ κ κῶνος, τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψ θ κ κῶνος τῷ ζ ω ε κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ πρὸς ε ζ, τουτέστιν ἡ χ τ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψ υ πρὸς χ τ, ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ α θ, κ θ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θ κ πρὸς δ, ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ κ θ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς τὴν χ τ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χ α β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ α β γ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ ε ζ η, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θ κ λ.

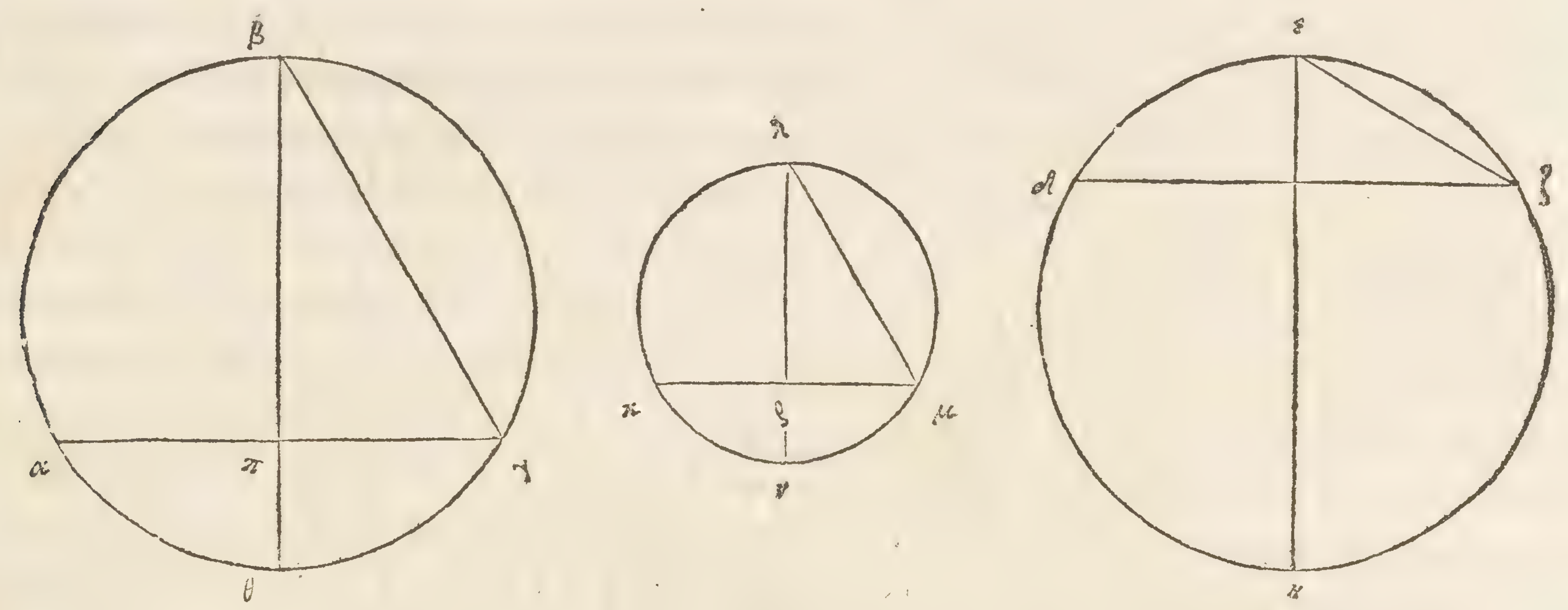
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μή, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ ς
μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τὰς α β γ, δ ε ζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν τὸ ἐπὶ τὴν α β γ περιφέρειαν. οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δ ε ζ. καὶ γεγενήσθω καὶ ἔστω τὸ κ λ μ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν α β γ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κ λ μ ν, β α γ θ, ε ζ η δ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κ μ, α γ, δ ζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κ μ, α γ, δ ζ, ἔστωσαν αἱ λ ν, β θ, ε η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ μ, β γ, ε ζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κ λ μ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά-



νεια τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ε ζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρων ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις. ὥστε καὶ ἡ μ λ τῇ ε ζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιον ἐστὶ τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ν λ πρὸς λ ρ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β π. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ μ, οὕτως ἡ β π πρὸς γ β. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ν λ πρὸς λ μ, τουτέστι πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β γ. καὶ ἐναλλὰξ. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς. δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ ν πρὸς β θ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ β θ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λ ν. ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

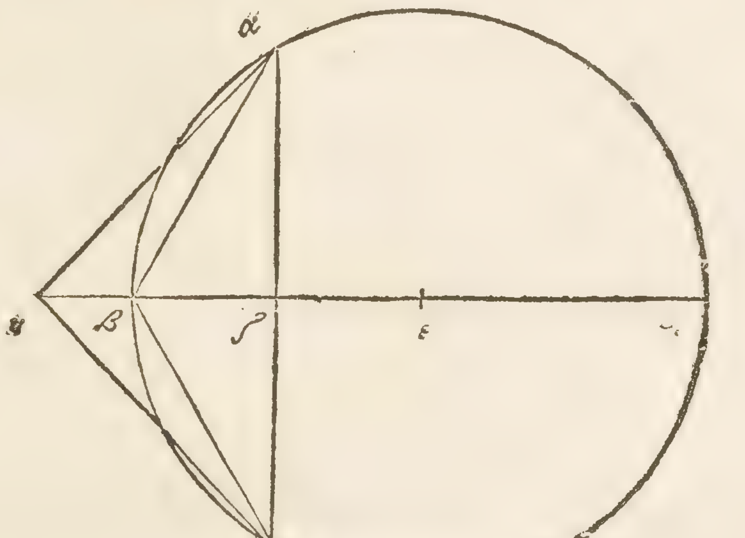
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ α β γ, δ ε ζ. τὸ μὲν α β γ, ᾧ δεῖ ὅμοιον· τὸ δὲ δ ε ζ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχει τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ β γ πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ β θ πρὸς λ ν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λ ν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λ κ ν μ. καὶ τετμήσθω ἡ ν λ κατὰ τὸ ρ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θ π πρὸς π β, τὴν ν ρ πρὸς ρ λ. καὶ διὰ τοῦ ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λ ν. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ λ μ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ



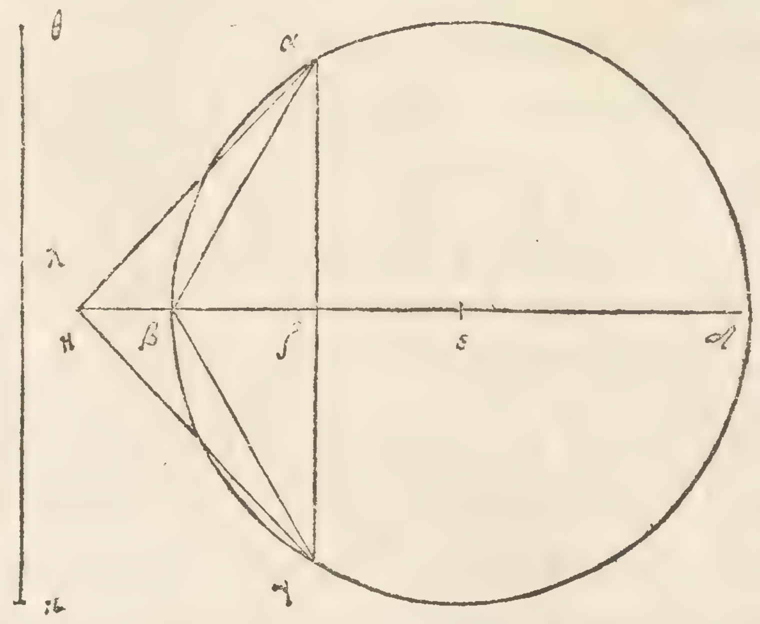
εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα, ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστὶν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ β πρὸς β π, οὕτως ἡ ν λ πρὸς λ ρ. καὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ π β πρὸς β γ, οὕτως ἡ ρ λ πρὸς λ μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ β πρὸς ν λ, ἡ β γ πρὸς λ μ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θ β πρὸς λ ν, ἡ β γ πρὸς ε ζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ε ζ τῇ λ μ. ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ε ζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ε ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ τμήματος. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κ λ μ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κ λ μ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ξ τμήματος, καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ κ λ μ τῷ α β γ.

Απὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ β δ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς α γ, ὅπως τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α β γ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ η ζ πρὸς ζ β. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ α γ η κῶνος τῷ α β γ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α η γ κώνου πρὸς τὸν α β γ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς η ζ πρὸς ζ β δοθείς. ὡς δὲ ἡ η ζ πρὸς ζ β συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ε δ ζ πρὸς δ ζ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς ε δ πρὸς δ ζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ ζ, ὥστε καὶ ἡ α γ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ἡ ε δ β τρὶς ἡ ε δ. ἡ δὲ β δ δὶς ἡ ε δ. συναμφότερος ἄρα ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καὶ ἔστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς ε δ ζ πρὸς ζ δ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.

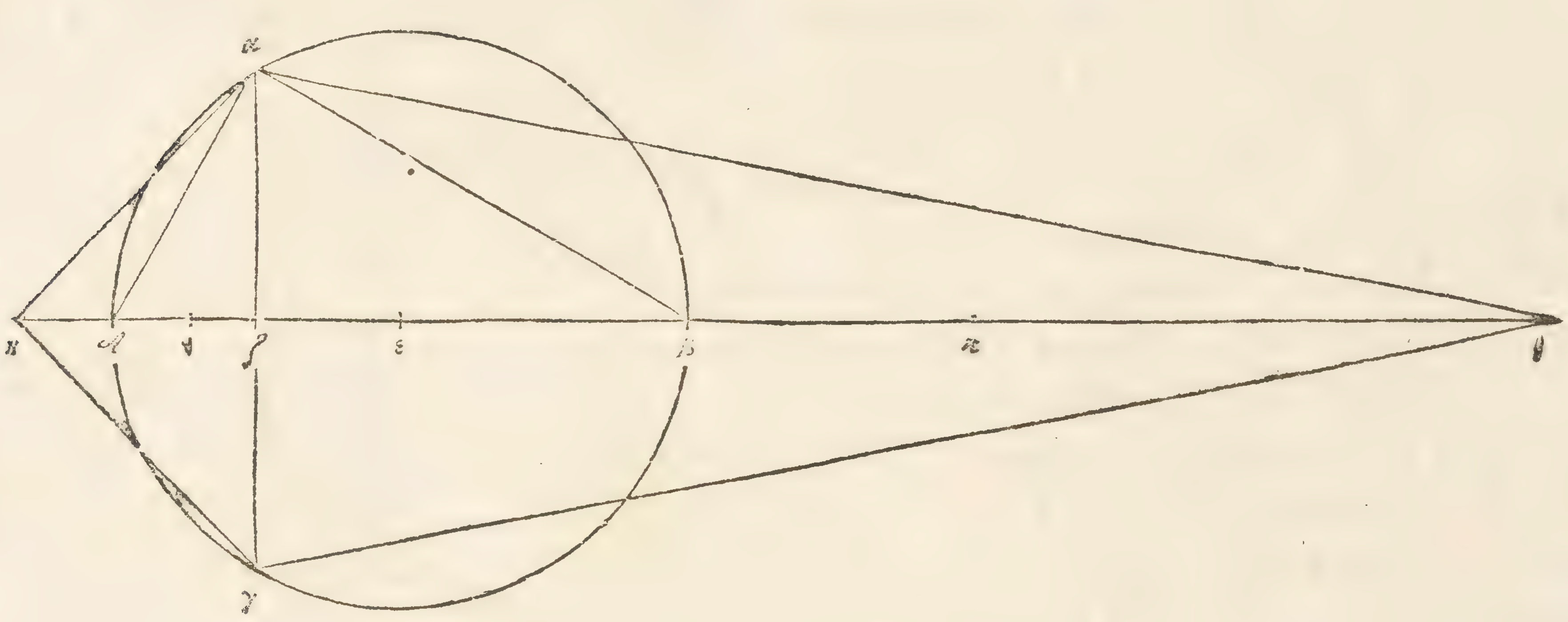


Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος δὲ ἡ β δ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς κ θ πρὸς κ λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. καὶ ἡ θ κ ἄρα πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. διελόντι ἄρα ἡ θ λ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε δ πρὸς δ β. καὶ πεποιείσθω ὡς ἡ θ λ πρὸς λ κ, οὕτως ἡ ε δ πρὸς δ ζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ β δ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ α ζ γ. καὶ διὰ τῆς α γ ἤχθω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θκ πρὸς κλ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γακ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θκ πρὸς κλ, οὕτως συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζβ. τουτέστιν ὁ ακγ κῶνος, πρὸς τὸν αβγ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ ακγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸν αβγ κῶνον, οὕτως ἡ θκ πρὸς κλ.



Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ διάμετρος ἡ βδ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς αγ ὀρθῷ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ αβγ, λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βα, αδ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ

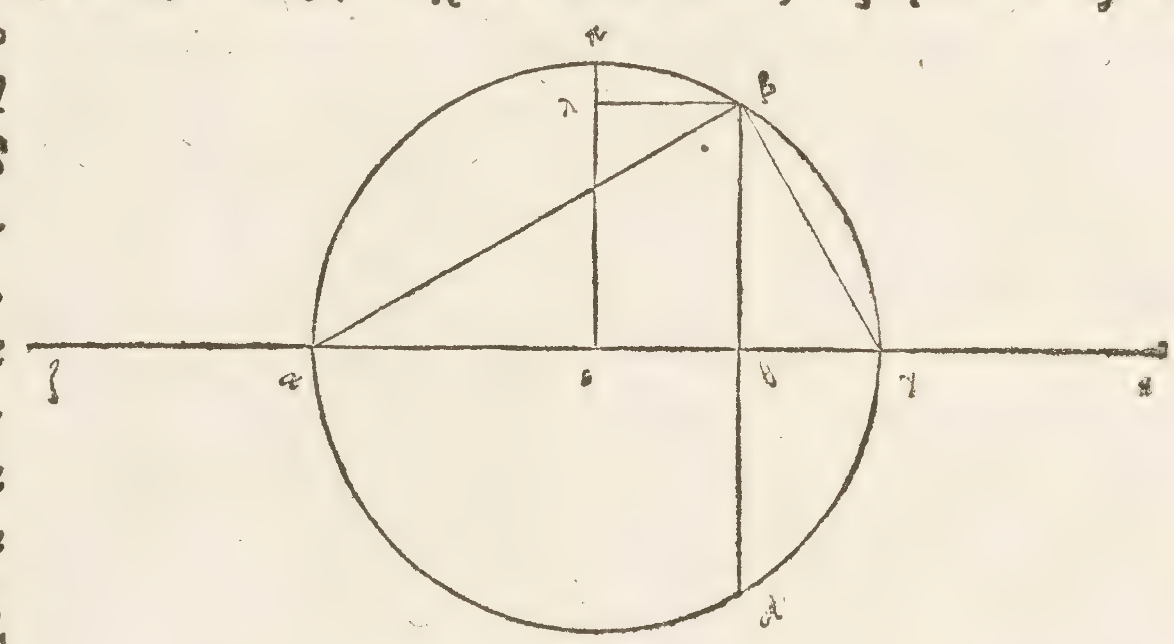


κζ πρὸς ζδ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν αβγ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν αθγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ αγκ τῷ αδγ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. ταῦτα γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς ζδ. ἔσται καὶ ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, ἡ θβ πρὸς βε. ἴση γὰρ ἡ βε τῇ δε. ταῦτα γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ἔστω τῇ βε ἴση ἡ βν. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἡ θβ τῆς βε. ἐπεὶ καὶ ἡ βζ τῆς ζδ. καὶ ἔσται ὡς ἡ κζ πρὸς ζβ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ὡς δὲ ἡ ζβ πρὸς ζδ, ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βε. ἴση δὲ ἡ βε τῇ νβ. ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βν, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζν. καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βν. ὡς δὲ ἡ θβ πρὸς βν, ἐδείχθη ἡ κζ πρὸς ζν. ἡ θζ ἄρα πρὸς ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζν. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζν, τοῦ ἀπὸ ζν. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζν πρὸς τὸ ἀπὸ ζν, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζν. τὸ δὲ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζν. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ κζ πρὸς ζν. (ἡ ζ

κζ πρὸς

κζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ βζ πρὸς ζδ.) τοῦτο γὰρ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. ἡ ζβ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζβ τοῦ ὑπὸ τῶν θβε. τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θβκ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ βν τῷ ὑπὸ θβκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ νκ. τὸ ἀπὸ θζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ θζ πρὸς ζη, ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν αηγ κῶνον. τουτέστι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς ζη, ἡ βζ πρὸς ζδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. ἄλλως τε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ αγ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς βδ πρὸς τὴν αγ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δαβ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ βγδ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβδ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βγ, τουτέστιν ὁ τῆς αθ πρὸς τὴν θγ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν αζ, γη. ὁ δὲ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ βαδ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν βαδ κῶνον, ὁ τῆς ηθ ἐστὶ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ κώνου, πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς αθ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ βγδ, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν αθη ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθ, θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ μετὰ τοῦ τῆς αθ

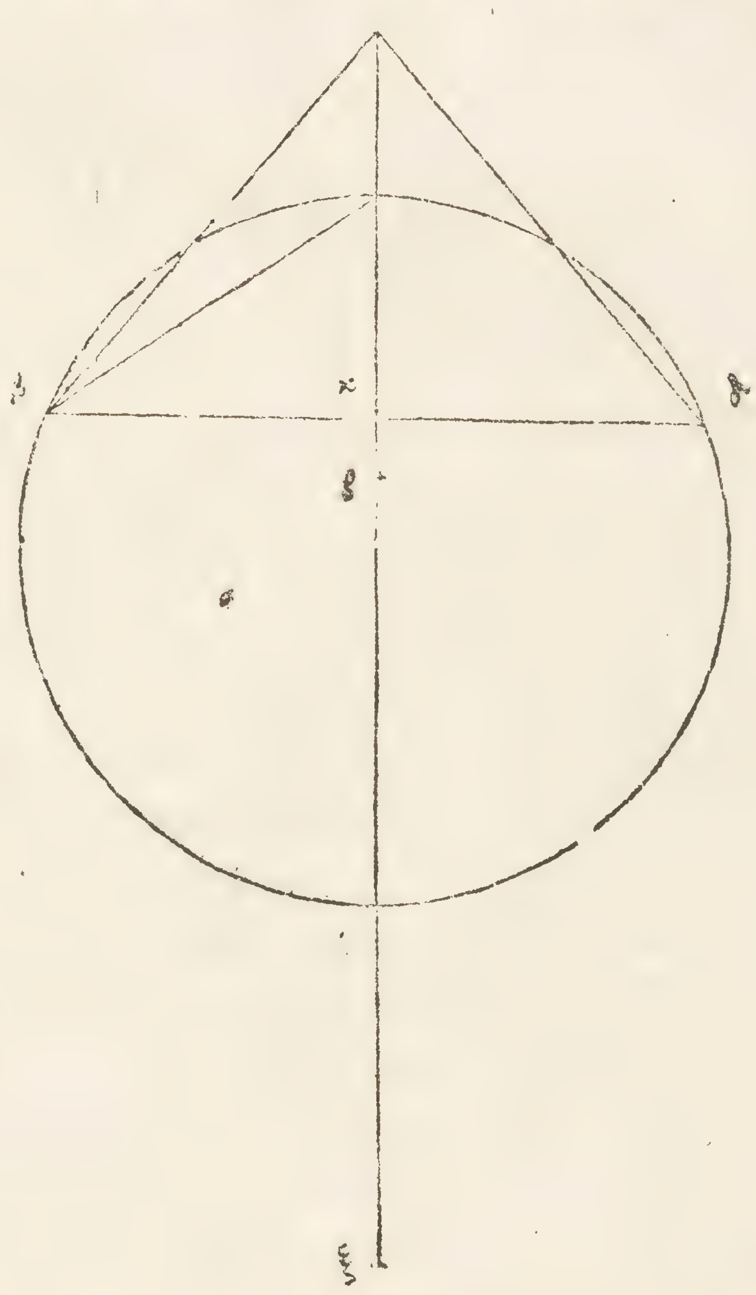


πρὸς θζ. ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθ, θα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ, ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθα ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θη, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θα ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. διπλάσιον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν ηθ, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θζ τῆς θη, φημὶ διότι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὢν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. καὶ ὅταν αθ πρὸς θβ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ ἐπὶ τὴν θη. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθγ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν βθγ, ἐπὶ τῆς ηθ. ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ηθ πρὸς θζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θζ

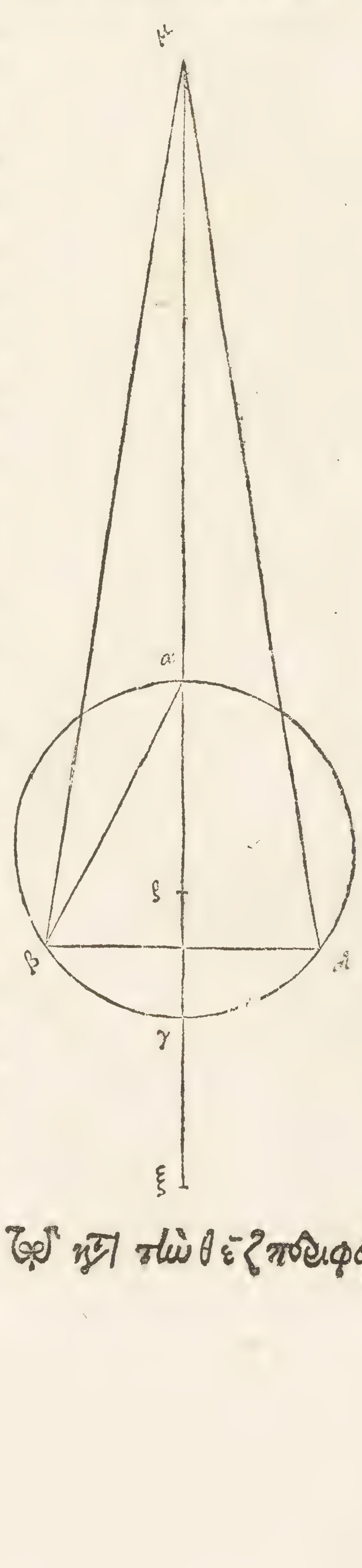
συναμφοτέρῳ

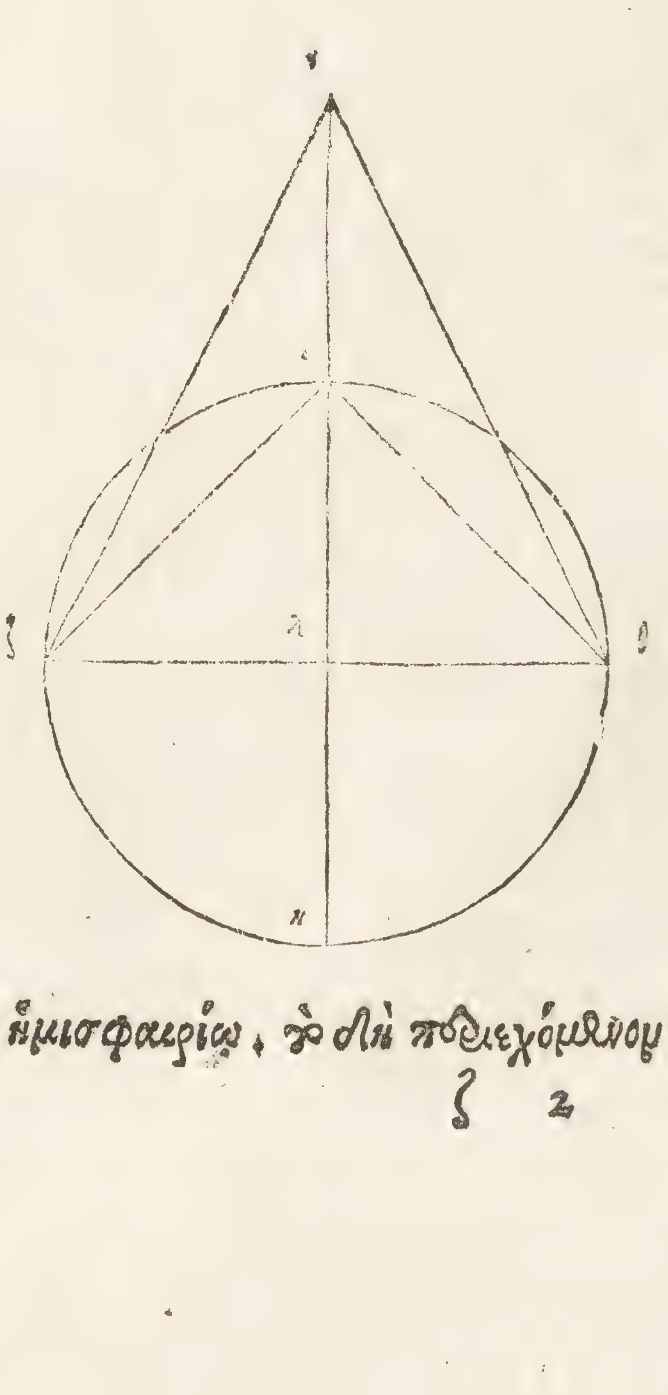
συναμφοτέρῳ τῇ αθ κε. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ὑπὸ τῆς θκ τῆς γθ, ἀπὸ δὲ τῆς κε, τῆς ελ ἴσης τῇ βθ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ, κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς θα. τουτέστιν ἡ λε πρὸς θα. καὶ ἐναλλάξ. ὅτι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ, θα, πρὸς θα. καὶ διελόντι, ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς θα. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λε τῆς θα.

Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαῖρα μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ. καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ εζηθ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ εη. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς αγ, εη διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δβ, ζθ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τῶν δὲ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τομῶν, ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι. θ



λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ εζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ βαδ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον, δῆλον ὅτι ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶ ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ακ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβδ κύκλου ἴση ἡ γξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γξ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μα πρὸς ακ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν βδ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δή ἐστιν οὗτος τῷ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν



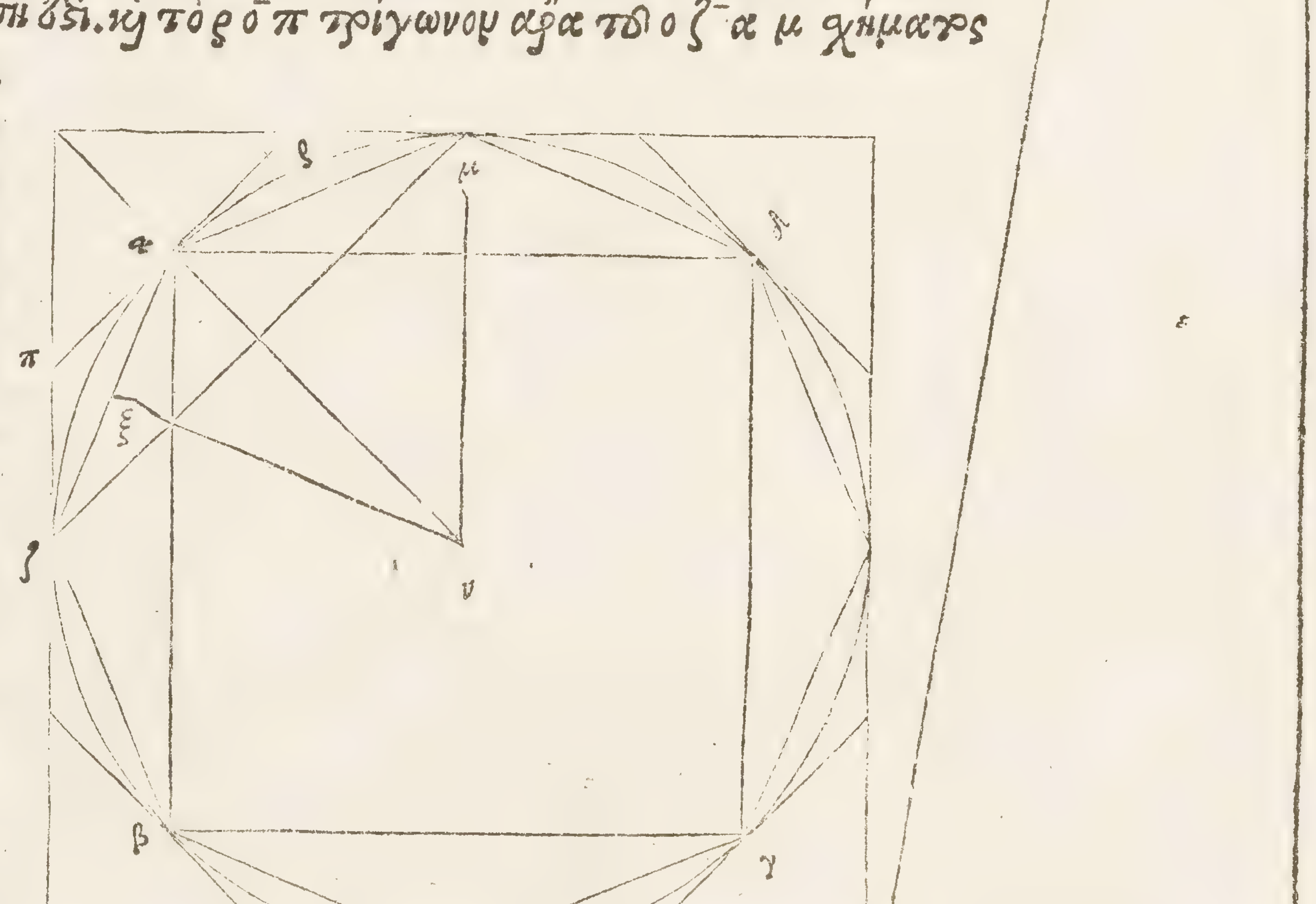


ζ 2 αργ

αεγ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αηγ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τῆς ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τῆς ἀπὸ τῆς αβ. μείζων οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τῆς συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γαε, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξκα. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μηγ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γαε, τοῦ ὑπὸ τῶν μηγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γα πρὸς τὴν ηγ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν αε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ αε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αε, ἥ ἐστιν ἴση τῇ κν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζθ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἢ ἡ μκ πρὸς τὴν μλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν βδ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἐπὶ τῆς εζθ περιφερείας, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τῆς βαδ περιφερείας.

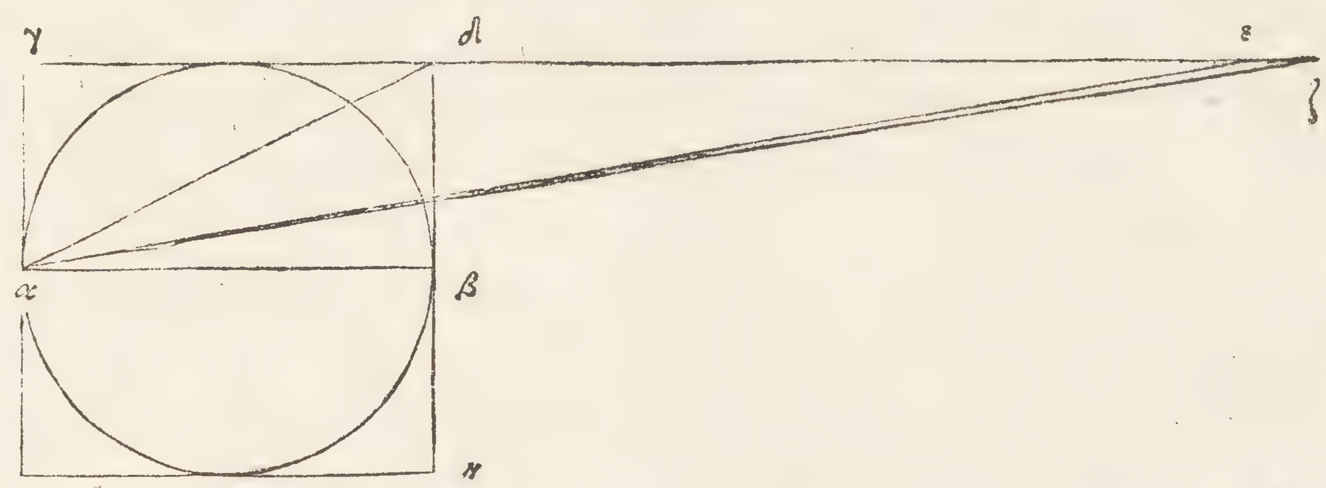
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ
ΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α΄ Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ αβγδ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ αγ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ νξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ νξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ οαρ. ἡ ορ ἄρα τῆς μρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρμ τῇ ρα ἴση ἐστί. καὶ τὸ ροπ τρίγωνον ἄρα τοῦ οζαμ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ πζα τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ αβγδ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν να ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.

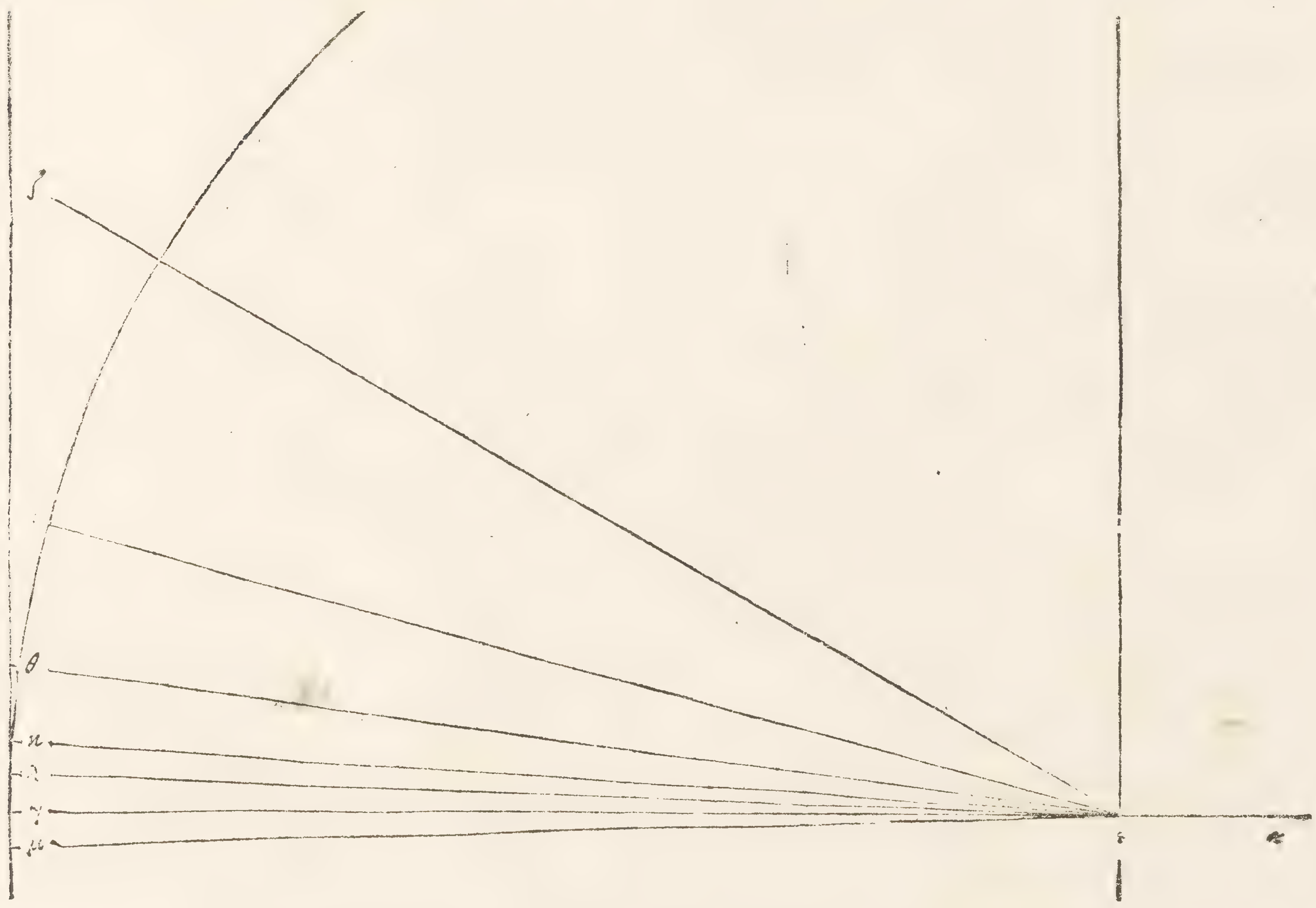


β΄ Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αβ.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γηδ, καὶ ἡ γδ διπλῆ, ἡ δε. ἕβδομον δὲ ἡ εζ τῆς γδ. ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστιν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιόν ἐστι, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον, τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ καθετὸς ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τοῦ ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.



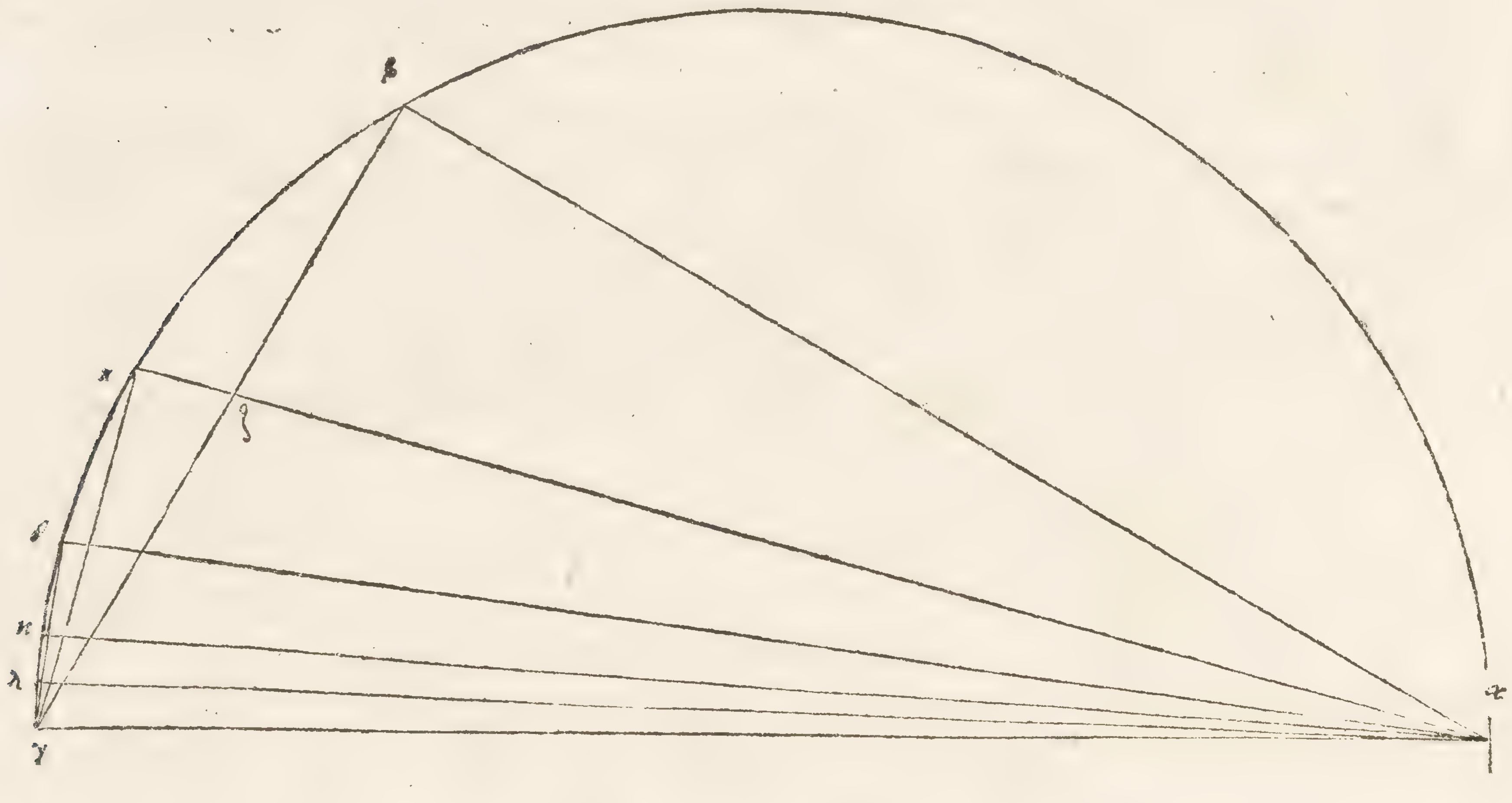
Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλάξ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό- γ



γον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει, λόγον ἔχει, ὃν Μ θυν πρὸς Μ, γυθ. μήκει ἄρα ὃν φςα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ ἡ πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αροβ η' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστιν κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό- λδ β μ μ

γον ἔχουσα, ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἀλλὰ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ. τῆς δὲ γλ διπλασίων ἡ λμ.
α καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙς πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ < πρὸς
μ †μ ͵δχπη. καὶ ἔστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι χξζ <, ἅπερ τῶν ͵δχογ <, ἐλάσσονα ἐστὶ τὸ ἕβ-
δομον, ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ
ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβ-
δόμῳ μέρει μείζων.

δ- Ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ. ἡ δὲ ὑπὸ βαγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ αβ ἄρα πρὸς βγ ἐλάσ-
σονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς γβ, ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ. τετμήσθω δί-
χα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ



ηγβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθὴ, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ
ηζγ τρίτῃ τῇ ὑπὸ αγη. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αηγ τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη
πρὸς ηζ, καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, καὶ συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς βγ. καὶ ὡς
συναμφότερος ἄρα ἡ βαγ πρὸς βγ, ἡ αη πρὸς ηγ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ αη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα λό-
γον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς τὴν γη ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ < δ' πρὸς ψπ. δίχα
ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. ἡ αθ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ελκδ < δ'
πρὸς ψπ, ἢ ὃν ͵αωκγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ. ὥστε ἡ αγ πρὸς τὴν γθ ἐλάσσο-
να λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ' πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ τῇ κα. καὶ ἡ κα, πρὸς τὴν κγ ἐλάσσο-
να ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξς. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὸ κατάλογον ͵αος
πρὸς ξς. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ τῇ λα. ἡ αλ ἄρα πρὸς τὴν αγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βις ς'
πρὸς ξς. ἡ δὲ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζ δ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πο-
λυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ςτ ιλς, πρὸς μαζιβ δ'. ἅπερ τῶν ͵βιζ δ'
μείζονα ἐστὶν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα, καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϙς πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύ-
κλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τρι-
πλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλα-
σίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙ-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.

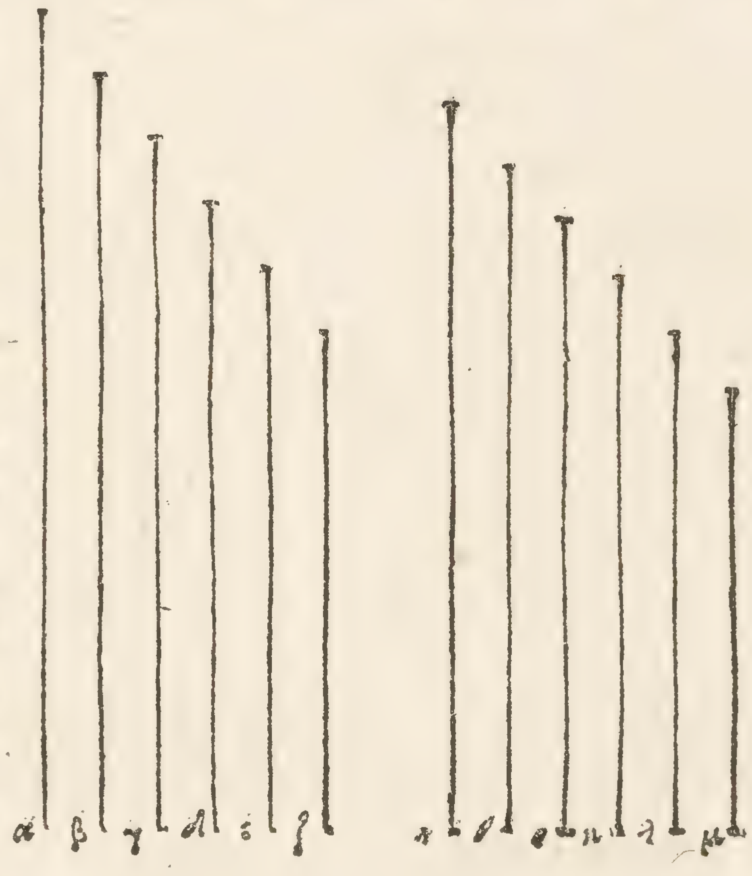
ΑΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύσποτ' ὅλον ἔχειν τι φανείσας μοι τὰς εὑρεσίας αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντὶ ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὑπέκειτο τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκαθασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ, τό τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμήματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμήματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβάλλοντο δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διὰ τί εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἐοῦντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου τομᾶς. μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὴ ἐσεῖται τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι. ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῦσα διάμετρος. τὸ δ' ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθέν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον, ἄλλον ἐπίπεδον ἀχθέν, ἀποτέμνῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τὰν εἰρημέναν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοια ἐντί. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἐῶντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμηθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος. καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διὰ τί, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

δέος τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου. τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφότερος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα, ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμακὲς σφαιροειδὲς καλεῖσθαι. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατυσφαιροειδὲς καλεῖσθαι. ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὴν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτέρου ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα. παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γινομένων τμαμάτων, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ' ἃς ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τά τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμες. ὅμοια δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμᾶμα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω. εἴκα ἀφ' ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἐόντι, καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων. ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ' ἀλλήλοις ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσεων. προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διατί εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γιναμένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμηθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ τῶν γιναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος. καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διατὶ εἴκα τοῦ σφαιροειδέαν τι ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γιναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, τῶν γιναμένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων. καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὅμοια τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ὑπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγμένῳ.

μένω. εἰ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γράψουμέν σοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

Εἴκα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἴκα δὲ ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δέ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμαθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἔσσονται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. εἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γένωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσεις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴκα ἐόντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τὸ ἴσον ἀλλάλων ὑπερέχοντα. ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν οὖν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά. α

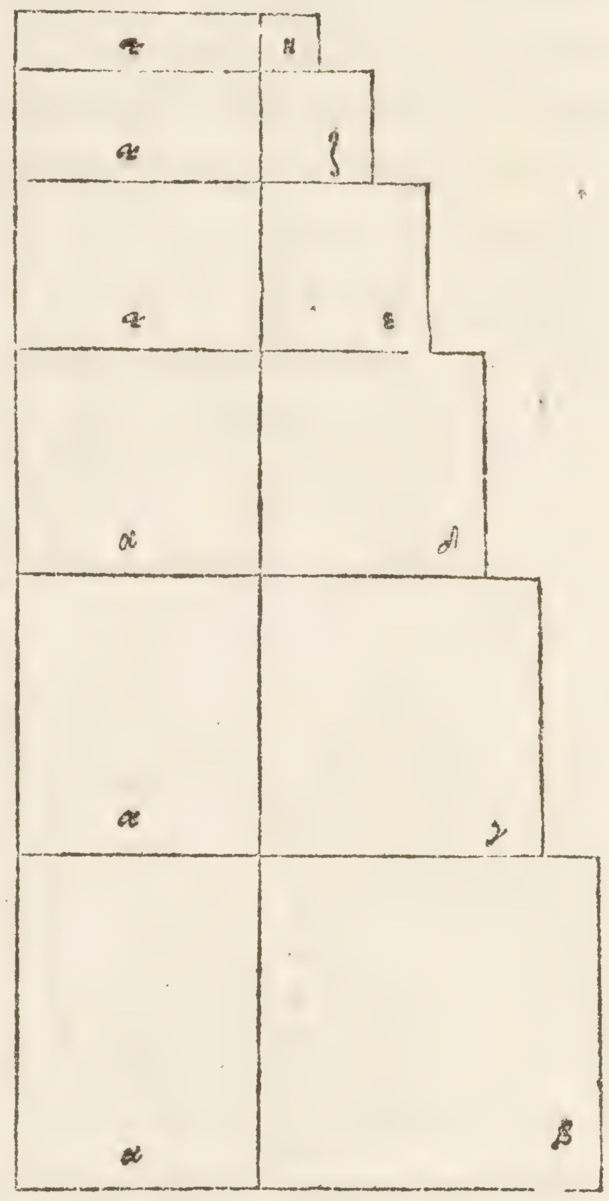
Εἴκα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἢ τινὰ αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τὰ ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἑξεῖ λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ. καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὴ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι β

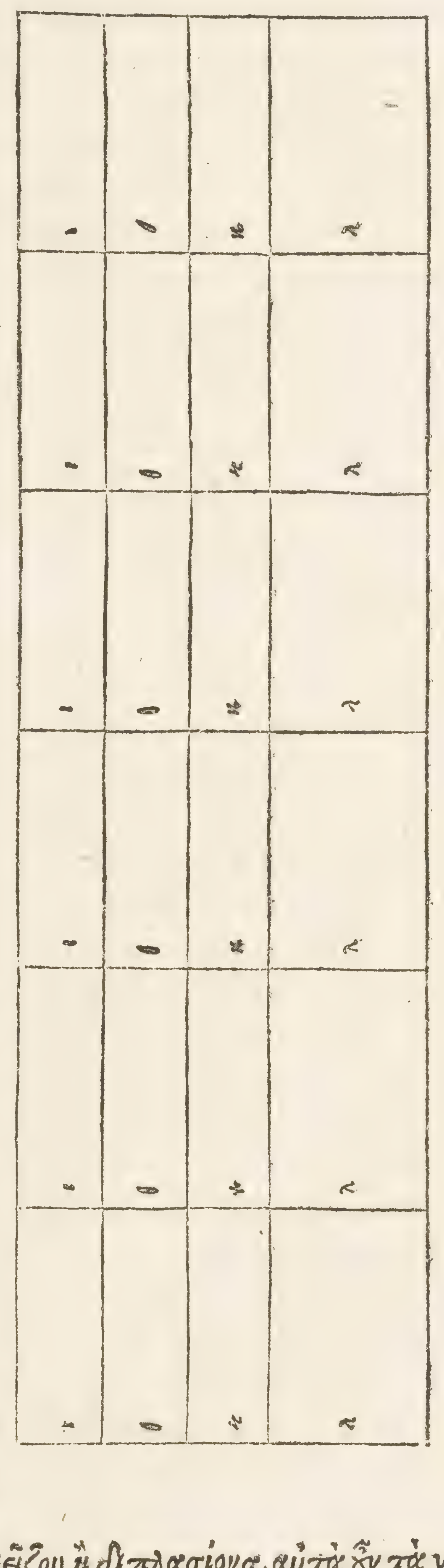




πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ τὸν αὐτὸν ἕχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τε α β γ δ ε ζ μεγέθεων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγωντι ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ σ. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθὲν λέγηται, καὶ τὰ η θ ι κ λ μ λέγοντι ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὅμοια ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθὲν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

γ Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔωντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλήθει, καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἔωντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευραῖς. καὶ μία τᾶν ἴσαν ἐοῦσαν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς. καὶ τᾷ ἡμίσᾳ μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει ἐφ' ἃν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον τῶν θ ι κ λ τῷ μὲν





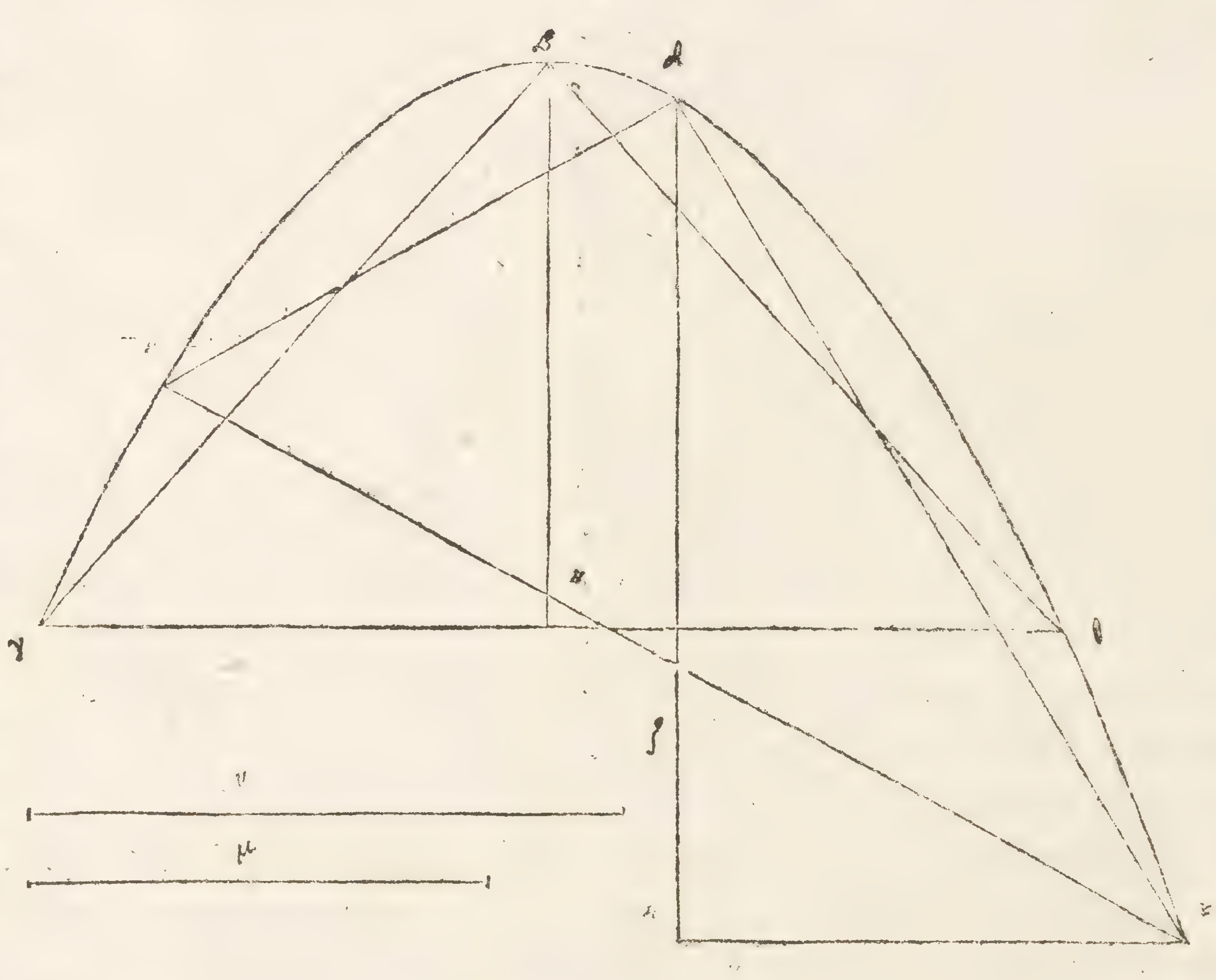
πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστη τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστι γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μεῖζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ' ἃν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἴσαν ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων

μὲν τῶν

μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πάντων τῶν ἴσων ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλασία. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλικᾶν ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ κ, πάντων μὲν τοῦ χωρίου ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐστίν. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα ἐστὶ· τῶν δὲ ἐν οἷς α γ, α δ, α ε, α ζ, α η μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, κ λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ λ ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία τὰ ἐν ᾧ τὸ α β μείζων τοῦ αὐτοῦ λόγου.

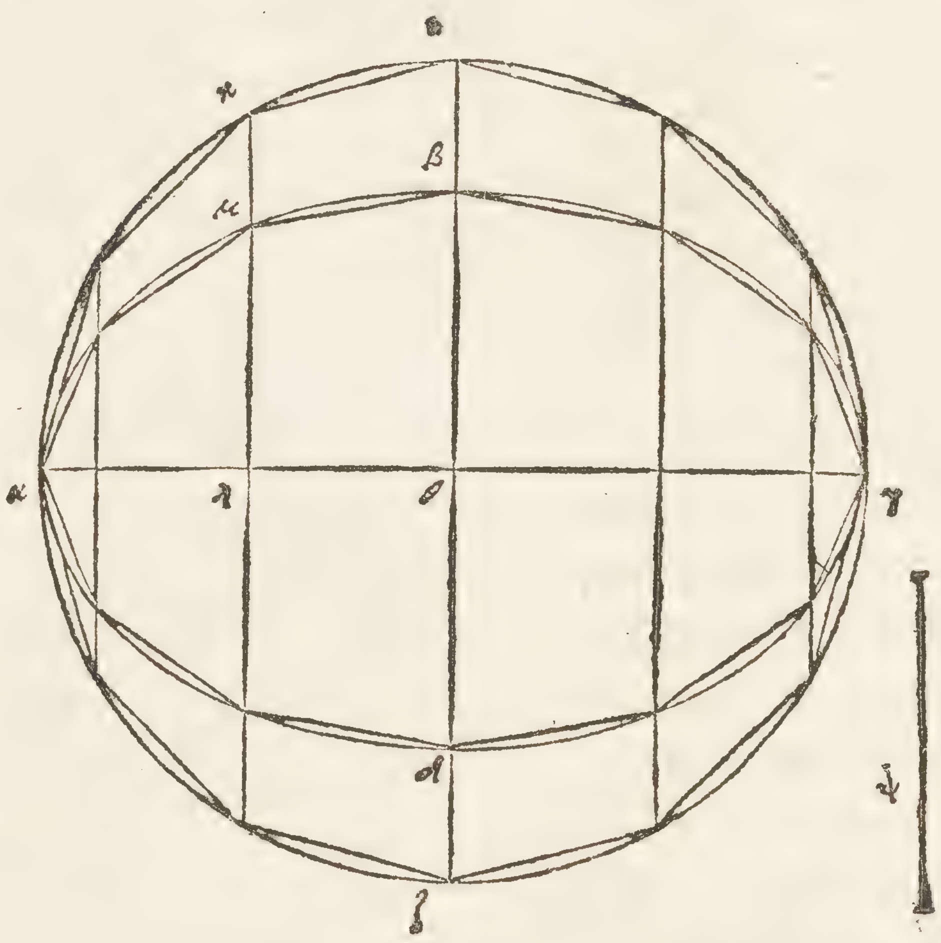
Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὄντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν. ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας παραλλήλους αὐτᾶς. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ὁποσοῦν, ἴσας ἔχον- δ
τα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγμένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ. καὶ ἀποτετμάσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα, τό, τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ δ ζ, β η. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ πρῶτον ἀποτέμνουσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ θ γ, ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω δὴ ἃν δύνανται, αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ' ἃ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ α κ. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐντὶ ἁ δ ζ τοῦ τμάματος, ἅτε α ε δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ζ, καὶ ἁ δ ζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν α ε ἀγομένας. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δ ζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν α ε, δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὗται ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δ ζ ποτὶ τῷ δ πέρας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δύναται οὖν καὶ ἁ α ζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ν, καὶ τᾶς δ ζ. δύναται δὲ καὶ ἁ θ η, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπό τε τᾶς β η. ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἁ θ η ἐπὶ τὰν διάμετρον. ἔχοι καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ η τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπόκεινται αἱ δ ζ, β η. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θ η, α κ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β η, δ ζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ η, β η περιεχόμενον, τῷ ὑπὸ τᾶν α κ, δ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ θ η β τρίγωνον τῷ δ α ζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν α δ ε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ



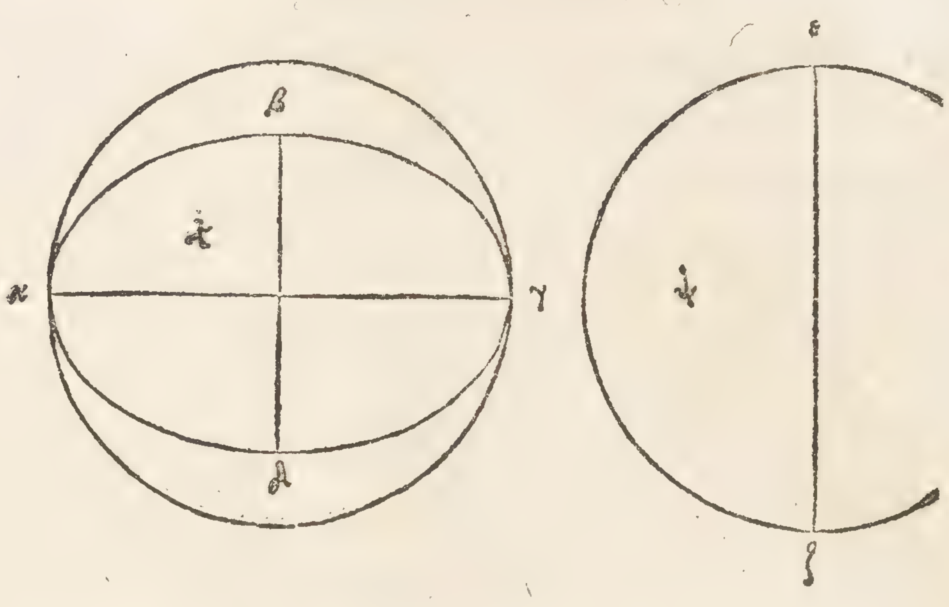
αδε τμᾶμα. τοῦ δὲ θβγ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θβγ τμᾶμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμήματα ἐστὶν ἴσα, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. εἰ δὲ μηδ᾽ ἑτέρα τᾶν τὰ τμήματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθὰς ἐστὶ τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ τὸ γενόμενον τμᾶμα, ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν.

ϛ Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ᾽ ἇς τὰ αβγδ. διάμετροι δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ᾽ ἇς τὰ αγ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ᾽ ἇς τὰ βδ. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὰν αγ, δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν γα, τουτέστι τὰν εζ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν αεγζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος ὁ ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ αβγδ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν αεγζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθετοὶ ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν αγ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ καθετοὶ τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσαν. ἐσσεῖται δέ τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ αεγζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ εθ, κλ καθετοὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μβ, δῆλον ὅτι τὸ λε τραπέζιον ποτὶ τὸ θμ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θε ποτὶ τὰν βθ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ᾽ ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εθ ποτὶ τὰν βθ.



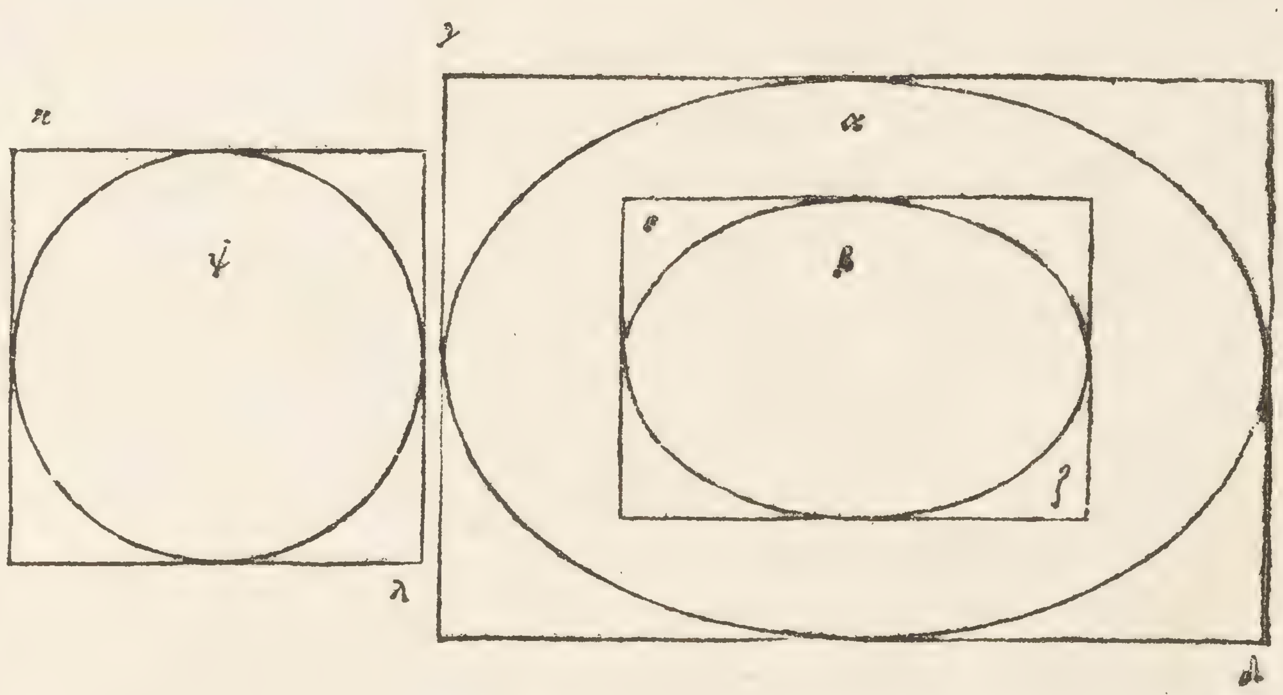
ἔχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον. ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ αεγζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ εζ ποτὶ τὰν βδ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθετοί, ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν αγ. ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖταί τι ἐν τῷ δε κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ εζ ποτὶ τὸν βδ. ἐγγεγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν αεγζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ.

Πὰν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ἔστω γὰρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ α γ, β δ, μείζων δὲ ἁ α γ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ε ζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ α γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν α γ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ α γ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ ε ζ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε δ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α γ, β δ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον. ε



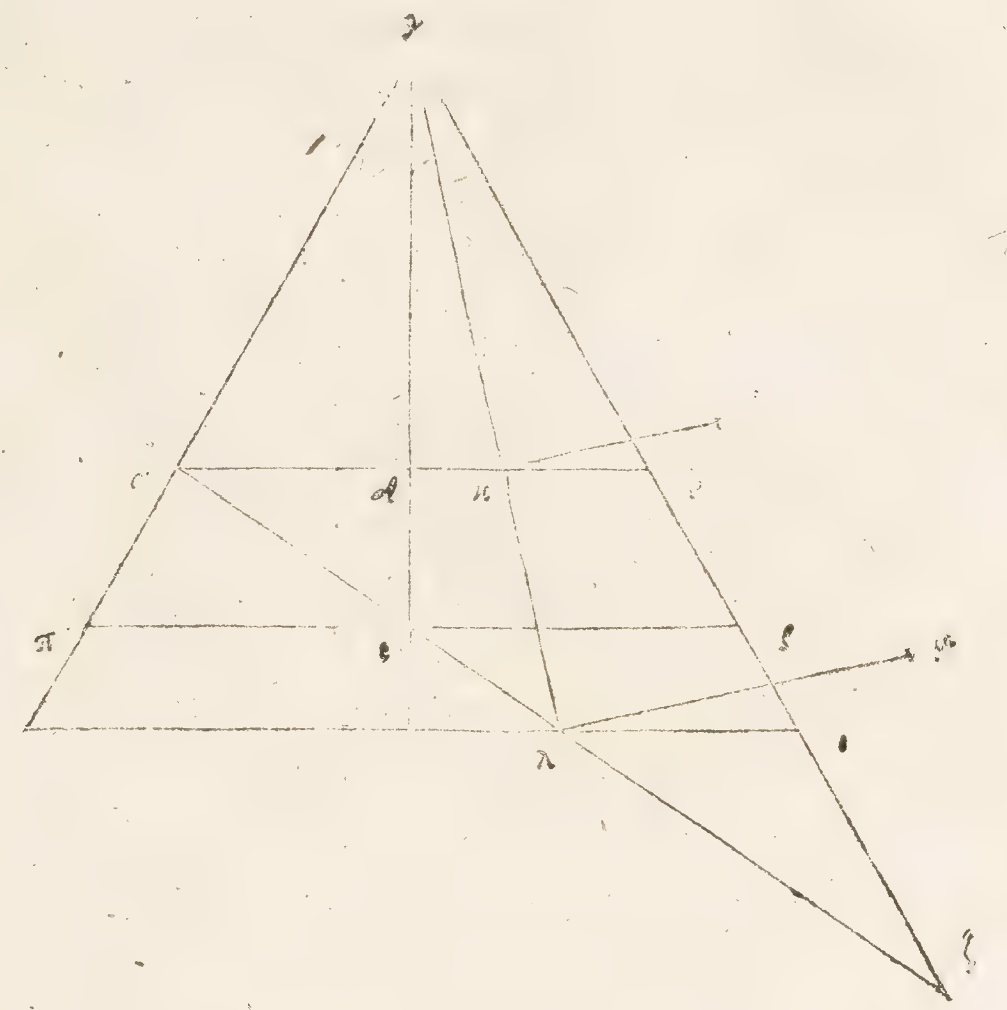
Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων * τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ᾽ ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γ δ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ ε ζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κ λ. ἔχει δὲ τὸ μὲν α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ κ λ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κ λ ποτὶ τὸ ε ζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

* τᾶν τῶν



Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον τι ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ α β. τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γ δ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τᾶς α β εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διάχθω ἁ α ζ, ὥστε τὸ περιεχόμενον η

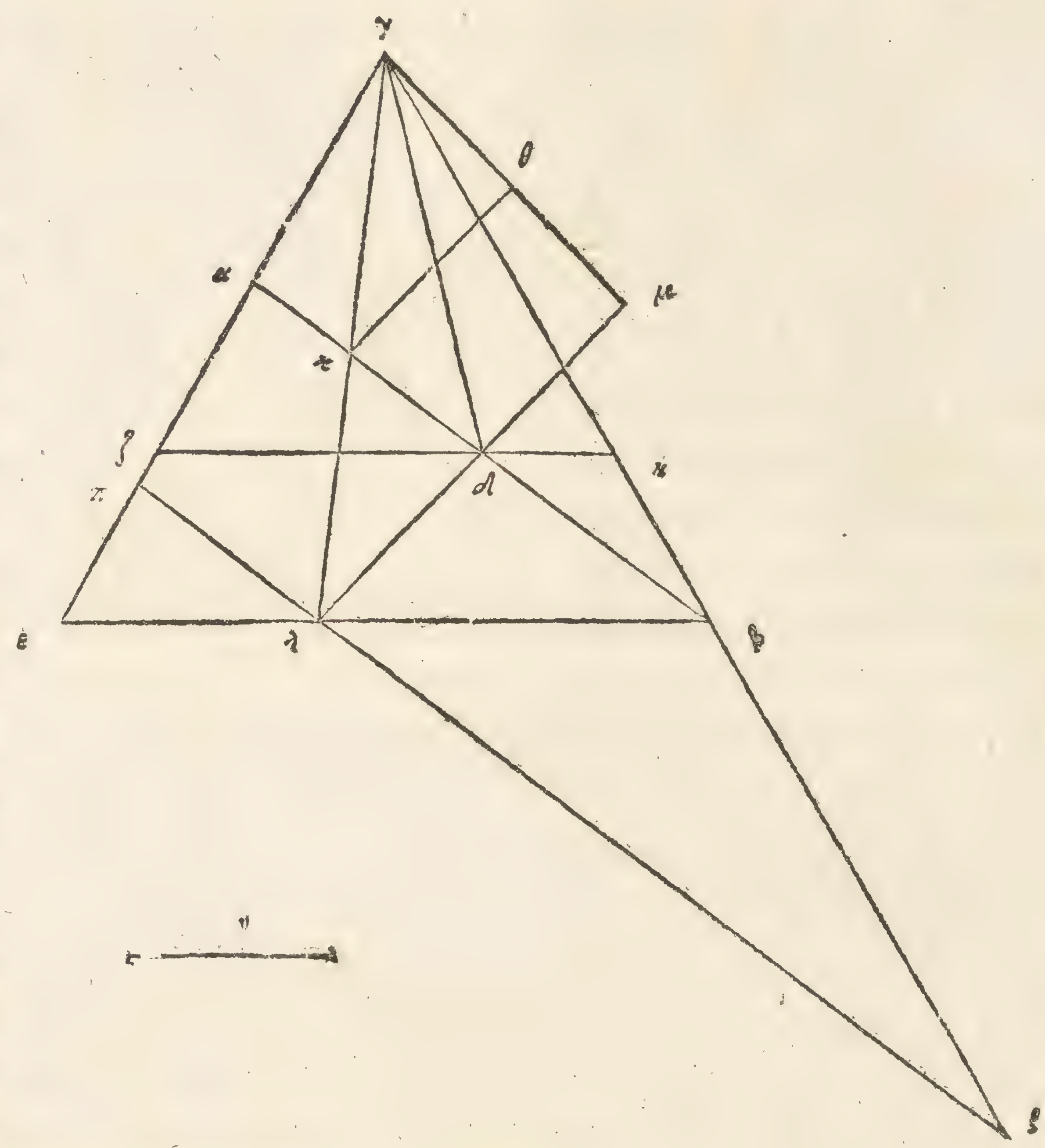
ὑπὸ τῶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δ γ τετράγωνον. δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς α δ, δ β περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς α ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γ α ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν α ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὲ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὴ τὸ σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ



τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θ κ, ἐπὶ τὰν α β. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ γ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπιπτέτω δὴ αὐτὰ τᾷ α ζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ α, ἁ λ μ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν α ζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν α β, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξ ο. διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ π ρ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τὰν ε α, ε ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ε π, ε ρ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π ε, ε ρ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε π, ε ρ. οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν λ ξ, λ ο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ κ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν α ζ κάθετος ἄχθη ἁ λ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.

θ Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακός, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β α, κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δ γ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

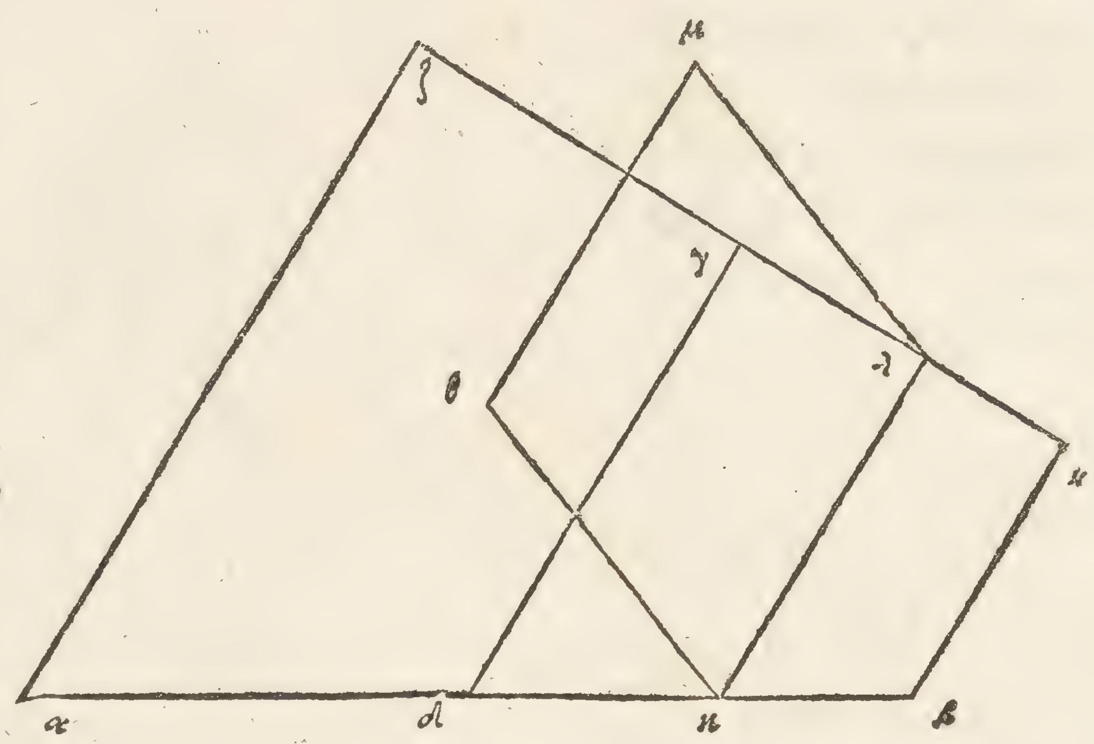
νου τομά. οὖν δὴ ἐντὶ ἴσαι αἱ α γ, γ β. ἐπεὶ ἁ γ δ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ὧν ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω οὖν σα ἁ ε γ τᾷ γ β. ἁ δὲ ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἅ ἐστι συζυγὴς ἁ α β. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζ η παρὰ τὰν ε β. ἀπὸ δὲ τᾶς ε β ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α γ, γ β. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ε β κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ η, κύκλος. εἰ δὲ μὴ ἐστὶν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε β τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ η. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ε β. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν ε β ἀχθεῖσαι ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ε β. ἐν ταύτῃ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α β. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔσται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κ θ ἐπὶ τὰν α β, ἁ δὲ γ κ ἐπιζευχθεῖσα, ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ ε β κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν ε β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ε β, ἁ λ μ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν α β ἁ π ρ. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ η, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε λ, λ β. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ η ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ὑπὸ ε λ, λ β ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἐσσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ α δ, δ β περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἔχει δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτω τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν α κ, κ β. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοι ἐντὶ ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν α β, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



ΟΞυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου ι
τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ β α. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γ δ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῦσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. δεῖ

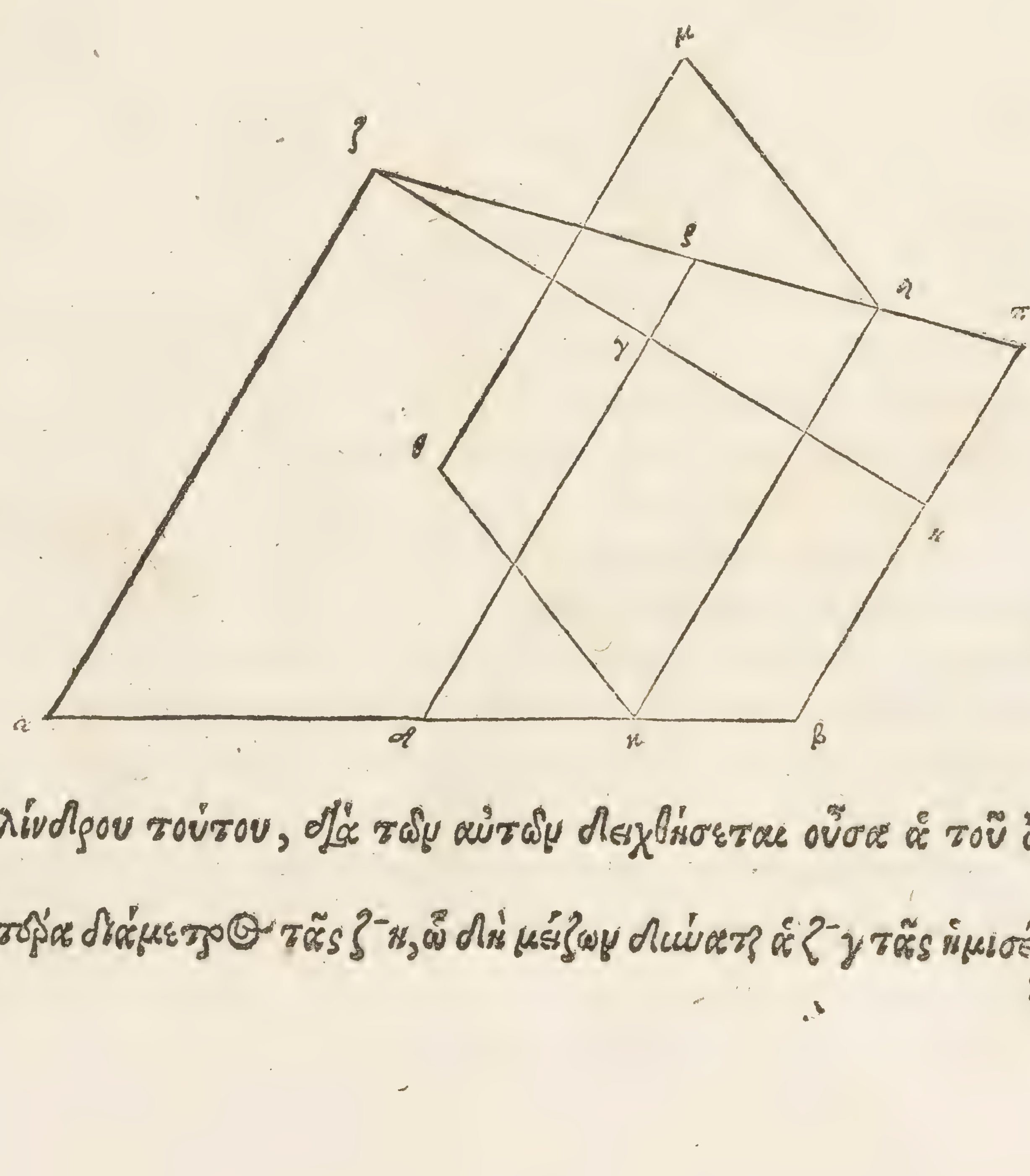
δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ γδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθω παρὰ τὰν γδ αἱ αζ, βη. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τῶν αζ, βη, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζη. ἁ δὲ ζη ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ γδ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζη, ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος, ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ ἁ θκ. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γδ ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λμ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾶς ζη ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζη. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζη. τὸ αὐτὸ δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ περιεχόμενον, καὶ τὸ ἀπὸ ζγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζη τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζλ, λη περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ακ, κβ περιεχόμενον λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ αδ δι᾽ ἐλλείψεως. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζλ, λη περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λμ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θκ, μλ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λκ, μθ. ὥστε καὶ αἱ δγ, μθ παράλληλοι ἐόντι καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θμ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται περὶ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἴκα ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τὰν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένας παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

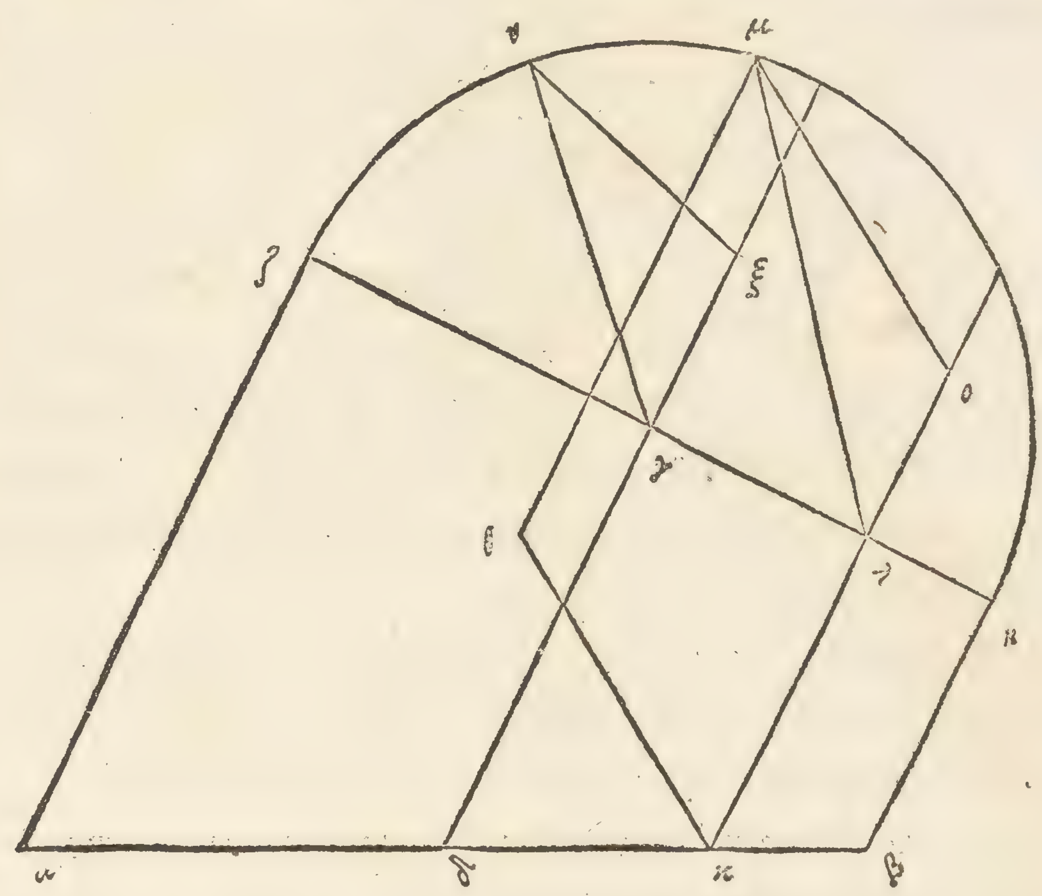
Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζη, καὶ ἴσα ἔστω ἁ πζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς πζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθόν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ βγδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν πζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δρ. ἐν



δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ᾽ ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζη, ᾧ δὴ μείζων δύναται ἁ ζγ τᾶς ἡμισείας τᾶς ἑτέρας

ἑτέρας διαμέτρου. ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς γξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ, ἁ ξν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ οὖν γν ἴσα ἐντὶ τᾷ γζ. ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζη, γν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὸν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον



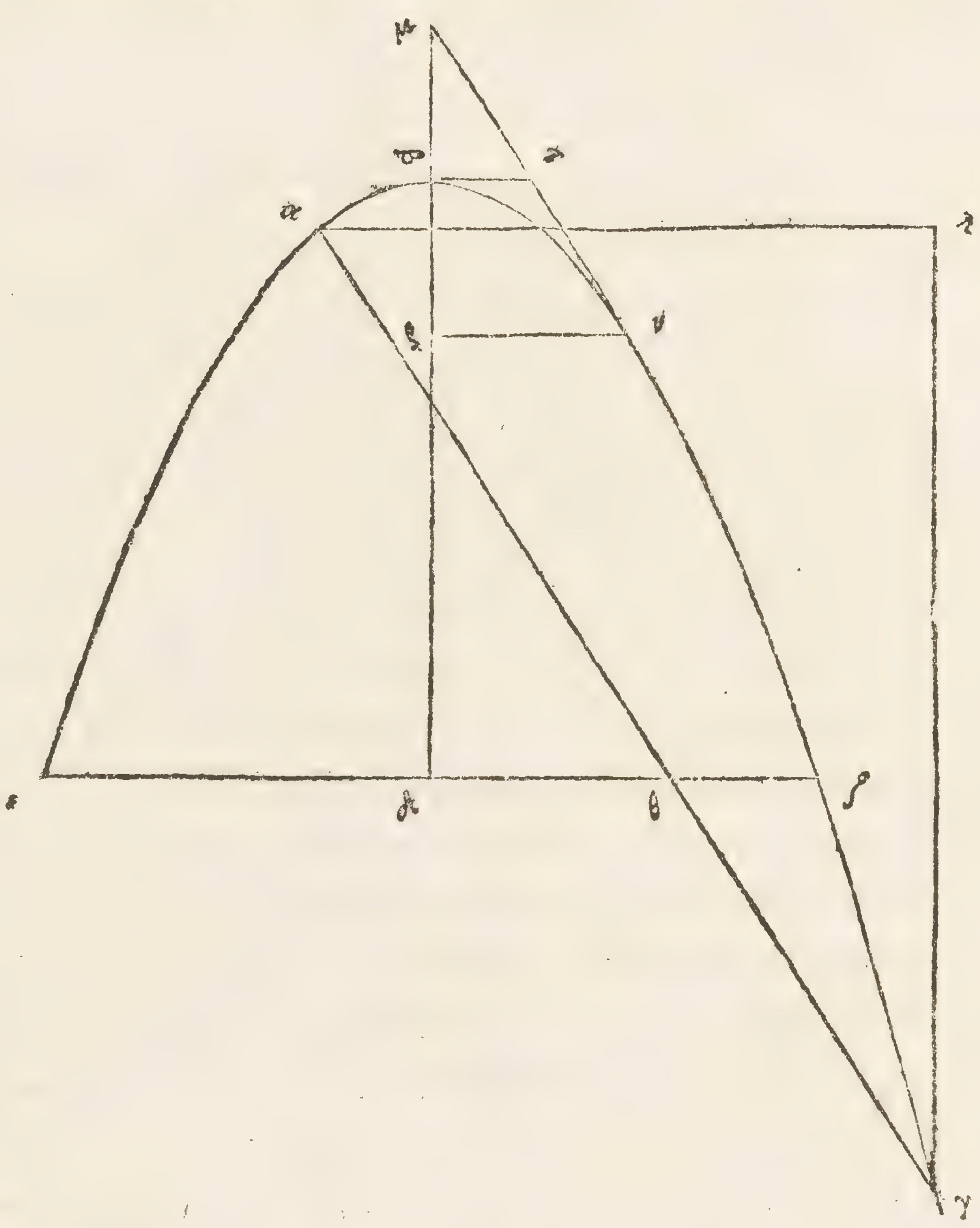
ἐπ' αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θκ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γδ ἔστω ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζη, ἁ λμ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μο. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἁ κλ τᾷ ζη. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς νγ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν λζ, λη περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γν τῷ ἀπὸ τᾶς γζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μο τετράγωνον ποτὶ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς νξ ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξν τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ μο, θκ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κθ, θμ. ἐπεὶ δὲ ἁ μθ παρὰ τὸν ἄξονά ἐντι τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μθ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖόν ἐστι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ια
ἐκ τῶν ὑψέων, ἀποδείκνυται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον.

Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ιβ
ὀρθογωνίου κωνοειδέος τομὰ αὐτὰ τὰ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δὲ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τὰς κορυφὰς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος αὐτὰ τὰ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμηθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν-

τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐούσαν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

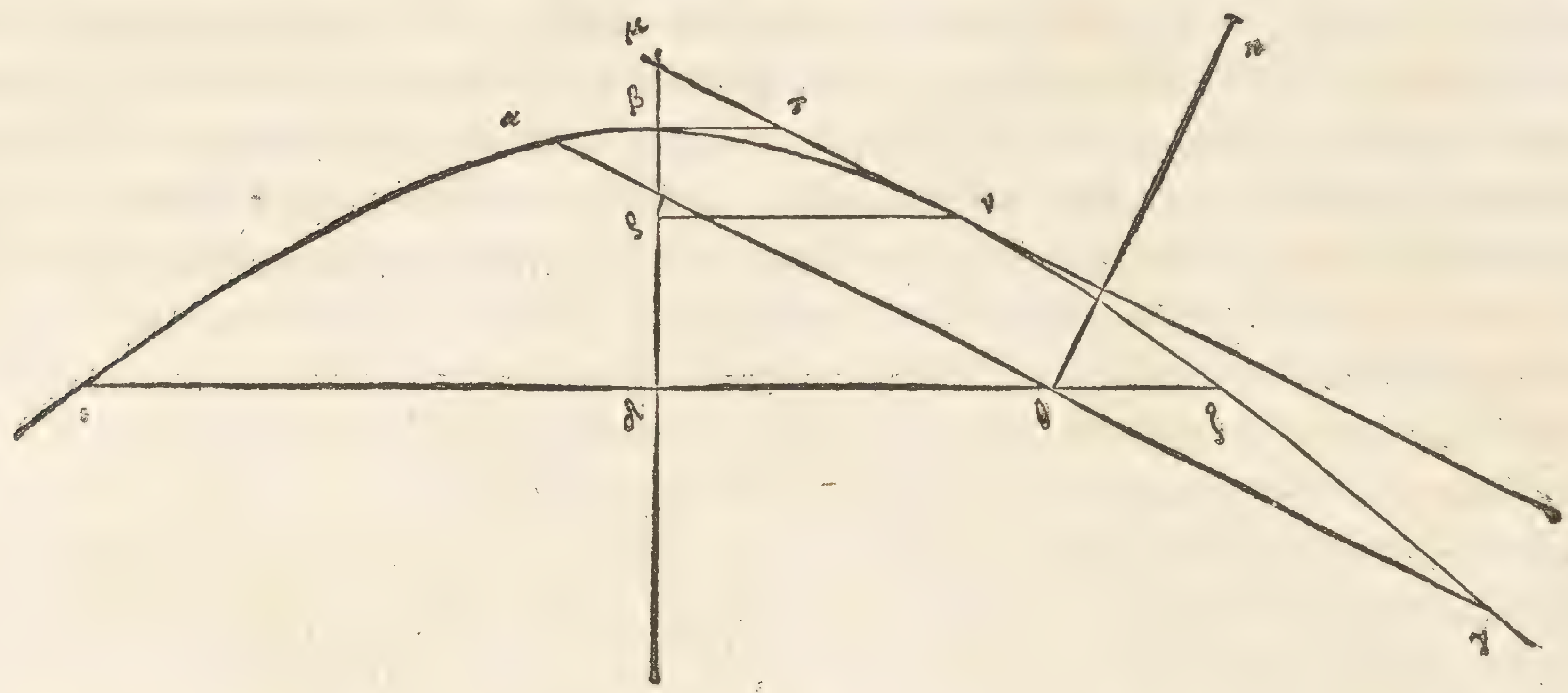
ιγ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμήσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ αβγ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ βδ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν ἁ αγ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ αγ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ ἁ λα, τᾶς μὲν γλ παρὰ τὰν βδ ἐούσας, τᾶς δὲ αλ καθέτου ἐπὶ τὰν γλ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὰν γα, ἁ κθ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κθ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ αγβ ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. διὰ δὲ τοῦ



θ ἄχθω ἁ εζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν βδ. καὶ διὰ τᾶν εζ, κθ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν βδ. τετμήσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κθ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζθ, θε. ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς εζ. καὶ ἡ κθ κάθετος οὖσα, μέση γίνεται ἀνὰ λόγον τῶν ὑπὸ τᾶν εθ, θζ περιεχομένῳ. ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μν παρὰ τὰν αγ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ βτ παρὰ τὰν εζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αθγ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν εθ, θζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶν ντ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς βτ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ντ ἴσα ἐντὶ ἁ τμ. διότι καὶ ἁ βρ τᾷ βμ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αθ, θγ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τμ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τβ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αθ, θγ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς βτ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τμ. ἐπεὶ οὖν ὅμοια ἐντὶ τὰ γαλ, τμβ τρίγωνα * ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομέναν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν αγ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς αγ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αλ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αγ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετροι δὲ αὐτᾶς εἰσὶν ἁ μὲν μείζων ἁ αγ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ αλ.

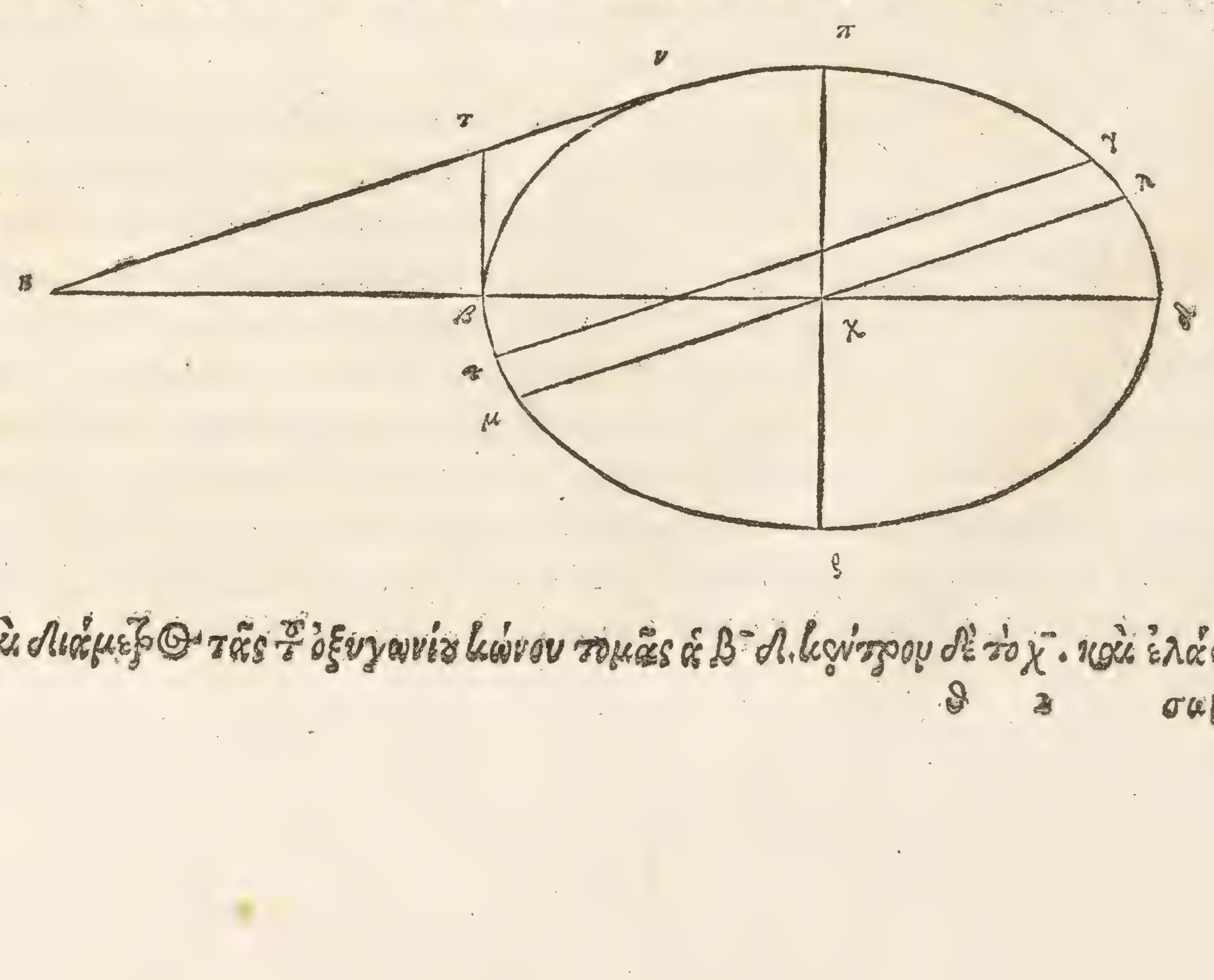
ιδ Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ α γ εὐθεῖα, ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος,



καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ καθετὸς ἄχθω ἐπὶ ταν α γ, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστὶ ἁ α β γ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ποτ' ὀρθὰς τᾶ β δ. καὶ διὰ ταν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα καθετὸς ἁ κ θ, ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταν ε θ, θ ζ. ἄχθω δὴ πάλιν ἁ μὲν μ ν παρὰ ταν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν, ἁ δὲ β τ παρὰ ταν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ε θ, θ ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ καθετοῦ τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὁμοίως οὖν δειχθησοῦντι, καὶ τὰ ἀπὸ ταν ἄλλαν καθεταν ταν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομένων, ἐπὶ ταν α γ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ, ὧν αἱ καθετοὶ ποιοῦντι τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. καί ἐστιν ἐλάσσων ἁ β τ τᾶς τ ν, διότι καὶ ἁ μ τ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς τ ν. καὶ γὰρ ἁ μ β, ἐλάσσων τᾶς β ρ. τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτοντι. δῆλον ὅτι ἁ τομά, ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἁ δὲ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ α γ. ὁμοίως καθετοῦ οὔσης τᾶς ν ρ ἐν τᾶ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ γ λ.

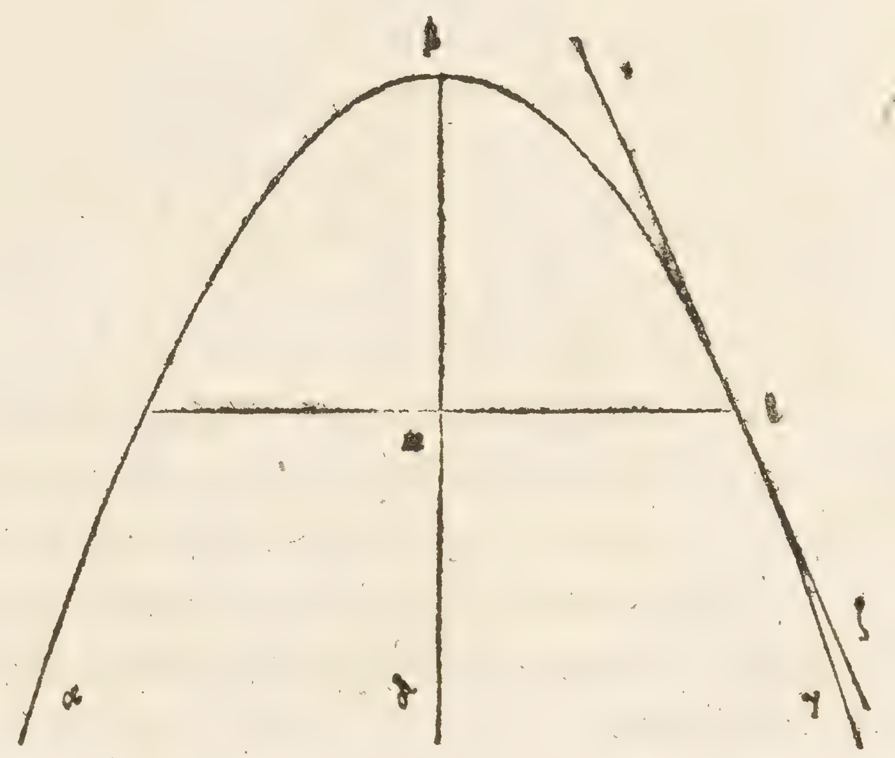
Εἶκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατατμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ σφαιροειδέος τομά. ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου, ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω ιθ



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β δ. κέντρον δὲ τὸ χ. καὶ ἐλάσ-

σωμ διαμετρος ἔστω ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾶ β δ, ἁ δὲ ν π παρὰ ταὺ α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὴ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ ταν α γ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθετῶν ταῦ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ ταὺ α γ, ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ ταῦ π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ταῦ π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ ταῦ μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἡ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν καθετῶν τετράγωνα τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ ταὺ α γ ἀγομέναν ἐλάσσω ἐντὶ τῶν ὑπὸ ταῦ τμαμάτων τᾶς α γ περιεχόμενα. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ γ α, εἴκα τὸ ἐπιπλατυσφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. ταῦ δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. ἐξ αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι εἴκα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα ταῦ ἀπὸ τῶν καθετῶν ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

ις Εἴκα τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτευοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος ταὺ ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ᾽ οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναν παρὰ ταν διάμετρον εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτῆ, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ταν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος· αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ᾽ οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ταν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ ταν οὕτως ἀγμέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἃ ἐστὶν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. εἴκα τοῦ κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαν ἀχθεῖσαν. ἀπὸ δὲ ταν ἀχθεῖσαν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθέν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε ταν τομαν ποιήσει κώνου τομαν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τοῦ σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ ταν κορυφαν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτεται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπι-

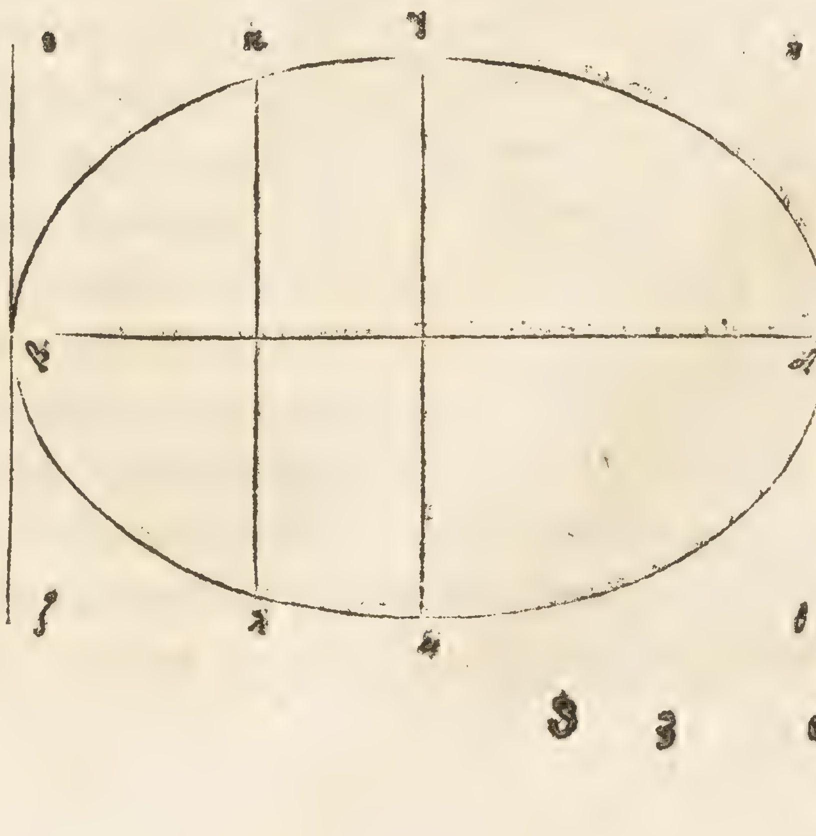


δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ, διάμετρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διά τας ἁφὰς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ, ἔστω ἁ β̄γ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β̄δ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ, ἔστω ἁ ε θ̄ ζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ θ̄. ἀπὸ δὲ τοῦ θ̄ καθετὸς ἄχθω ἐπὶ τὰν β̄δ, ἁ θ̄κ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ̄. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν θ̄κ. ὥς τε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τῷ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κ̄θ, β̄δ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισῶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖαι ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥς τε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου, ἐσσεῖται τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δὲ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ᾽ ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν, ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως τοῖς περὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσα τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύσει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ καὶ ἡ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ᾽ ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μὴ ἡ ἀπὸ τοῦ σαμείου καθετὸς ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐντὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ἐπεὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται. ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ᾽ ἄλλαλα ἐόντι ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

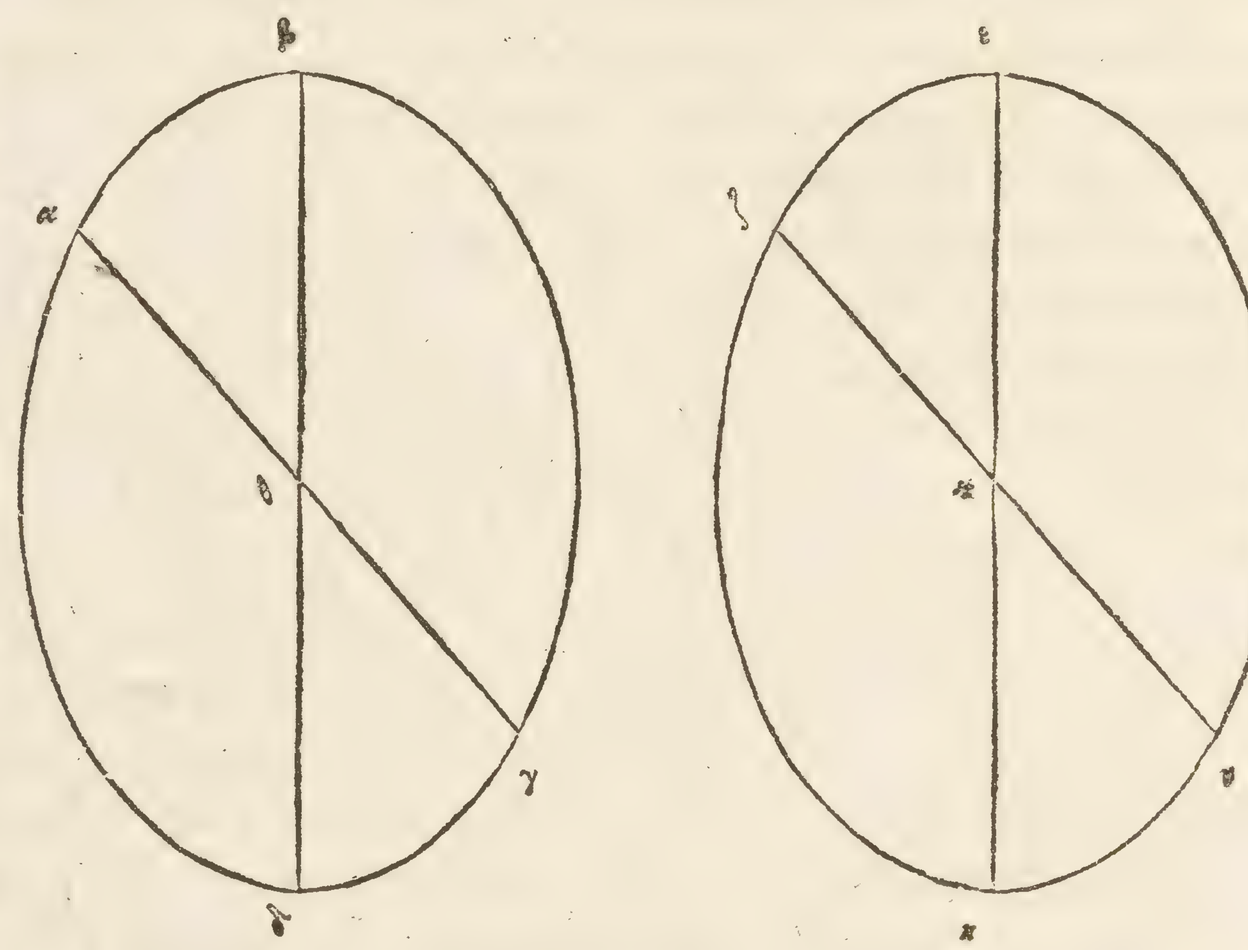
Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐόντι δῆλον. ἀλλ᾽ ἔστω μὴ ποτ᾽ ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθὸν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, ὃ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέραν ἁφᾶν ἀγμένον. εἰ δὲ μὴ ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα. οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαὶ, καὶ τετμηκὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσῶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύοντι παράλληλοι ἐοῦσαι τόδε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ᾽ εὐθείαν ἐόντι. ιζ

Εἴκα τοῦ σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δὲ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ τοῦτο τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ ιθ



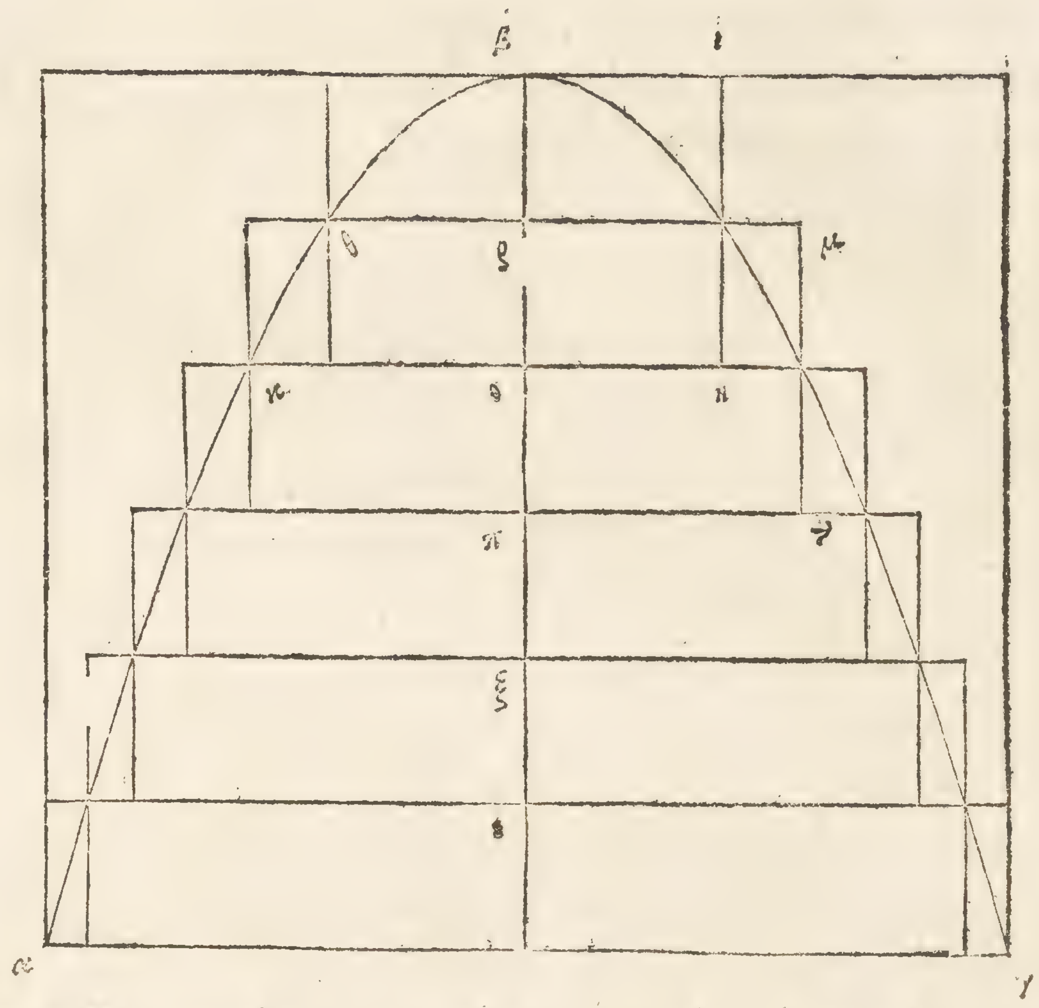
σφαιροειδέος τομὰ ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπιψαυόντων τομαί, αἱ εζ, ηθ εὐθεῖαι. τὸ δὴ λαφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ βδ. πεσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γα. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ αβγδ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ εζ, ηθ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ αγ. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν αγ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν βδ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαύοντεσσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ἢ ὡς τὸ κλ. δῆλον ὡς τὰν παρὰ τὰς τομὰς τὰν γενομέναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γενόμεναι τῷ τε ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

κ Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμημένον, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τό τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμημένον, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ βδ, καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμηκότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ αγ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδές, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομά, ἔστω ἁ εζην ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ εη, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ εζην τομά. ἐντὶ δὴ αἱ τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαί, αἱ αβγδ, εζην, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ' ἀλλάλας τεθείσας τᾶς εη ἐπὶ τὰν βδ, καὶ ἁ ζν ἐπὶ τὰν αγ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν νζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντί, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν νζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τᾶς η τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν αγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. καὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς εη ἐπὶ τὰν βδ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε κατὰ τὸ δ κεῖσθαι, τὸ δὲ η κατὰ τὸ β, τὰ δὲ μεταξὺ τῶν νζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν αγ σαμείων. δῆλον ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ' ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν νζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν αγ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν νζ. τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν αγ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.



Τμάματος

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτεμνομένου, δυνατόν ἐστι τῷ τμάματι στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα, οἷόν ἐστι τὸ αβγ. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ αβγ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γα. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν βδ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστὶ δὲ ἤτοι κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος, τὸν δὴ κύλινδρον τοῦτον ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖται ποτὲ τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὸν εδ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὴ ἁ βδ εἰς

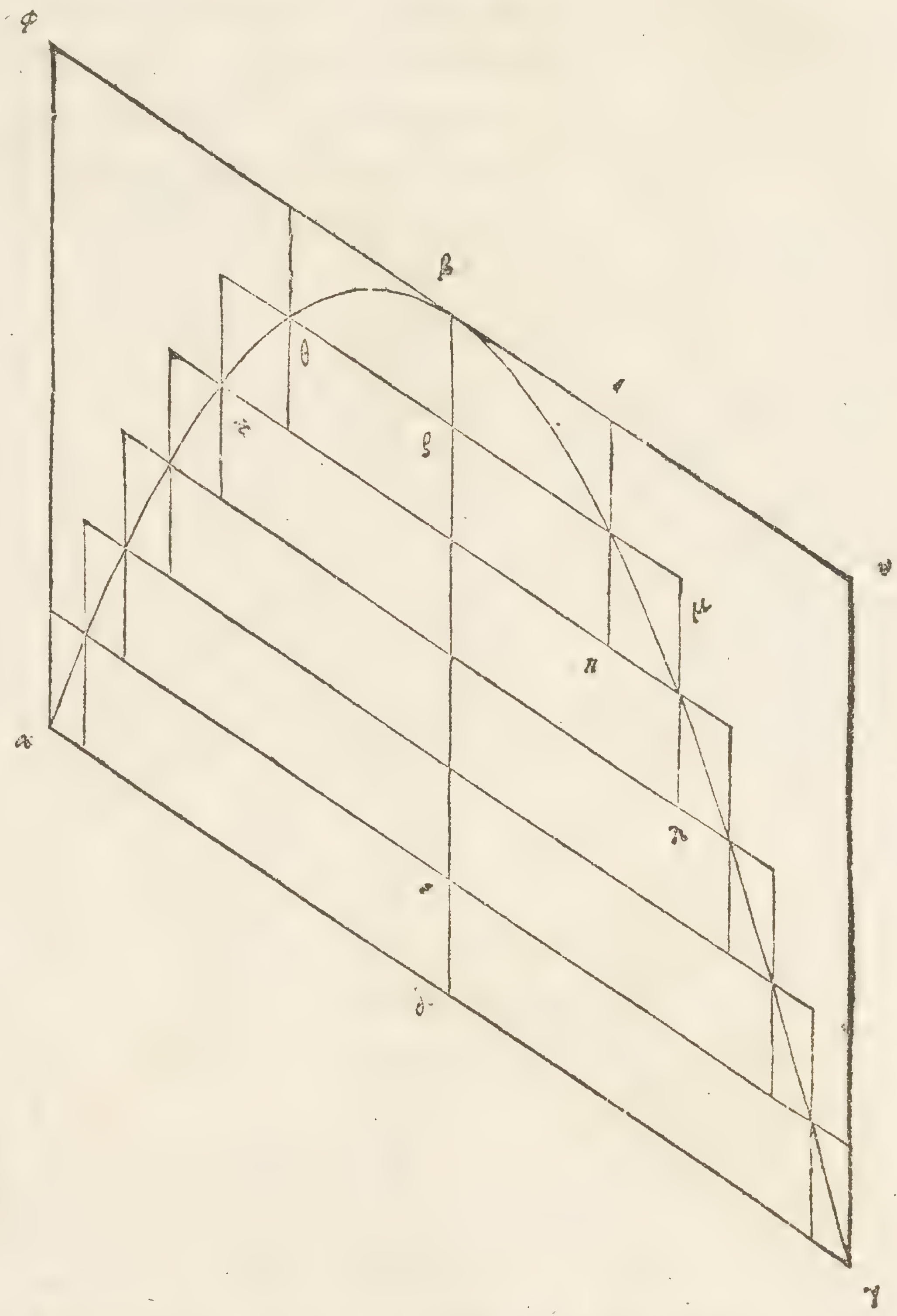


τὰς ἴσας τᾶς εδ, κατὰ τὰ ρ, ο, π, ξ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ, ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν βδ. ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς βδ. ἐφ' ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθω, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ εδ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κυλίνδρου ἐφ' ἅ ἐστι τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ' ἅ ἐστι τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τε τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ' ἃ τὸ β ἐστι. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος, ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὸ β, ὡς ὁ μὲν θη τῷ θι, ὁ δὲ κλ τῷ κμ. καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι εἰσίν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τοῦ κωνοειδέως ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τοῦ σφαιροειδέως ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμηθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα. τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ δγ. * ἁ φυ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φυ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τὸ κατὰ τὰν αγ, ἐπιψαύσει δὲ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μὲν ἐστὶ τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ βδ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ βδ. εἰ δὲ σφαιροειδέος ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπελάφθω ἁ βδ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ βδ δίχα τὰν αγ. ἔστιν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος. ἁ δὲ βδ,

εὐθεῖα

εὐθεῖα ἄξων. ἔστι δὴ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αγ. ἁ γραμμὰ ἁ βδ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου. δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αγ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστιν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα, καὶ οὐ μεῖζον ἐστιν ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος. ἐσσεῖται δέ τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν αγ, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ αβ εἰς τὰς ἴσας τᾷ δε. καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρέσεων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ, ἕσται ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ ἐπιπέδῳ,

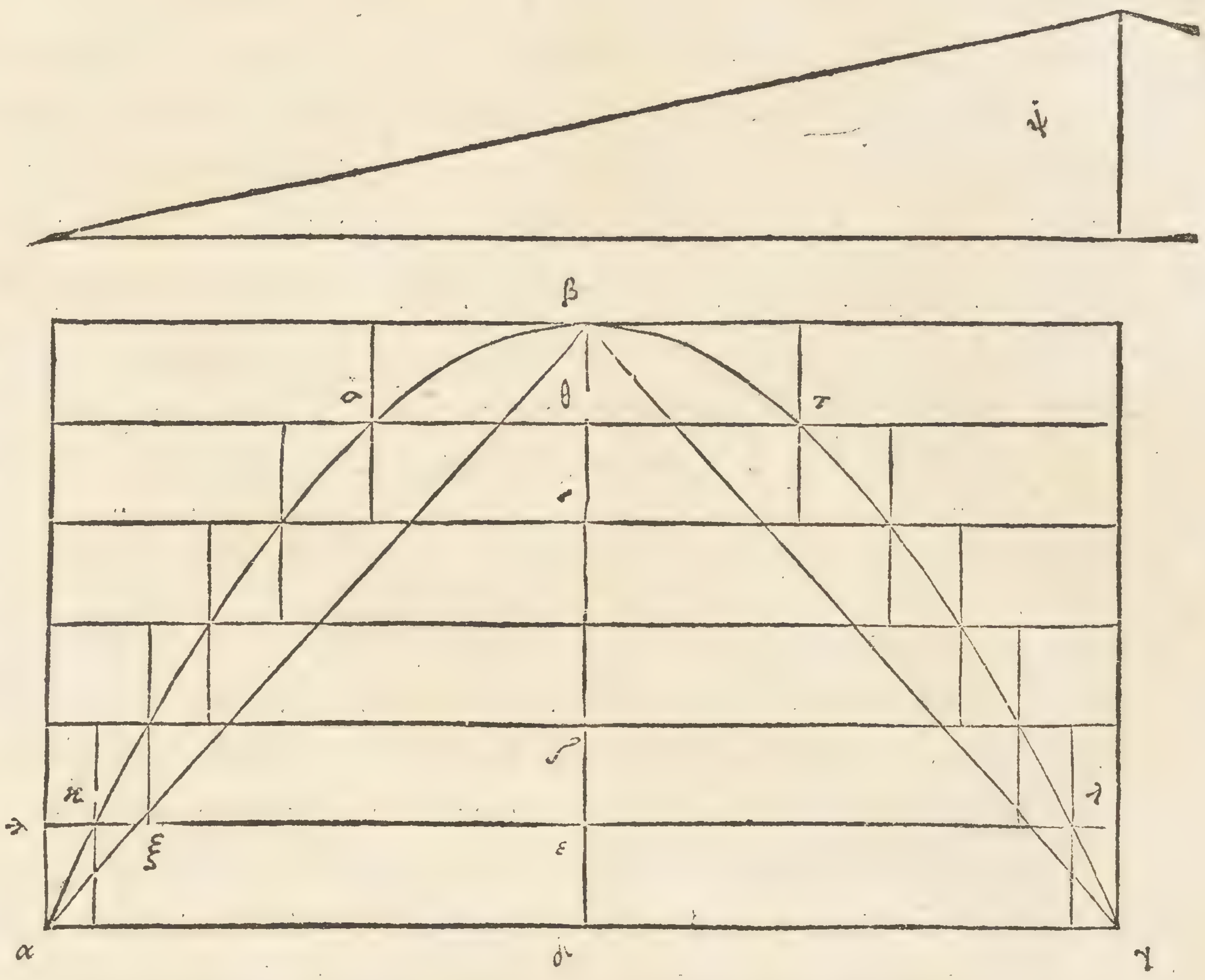


τέμνοντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὅμοιαι τᾷ περὶ τὰν αγ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα. ἐφ᾽ ἑκάστης δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωντι κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ δε. ἐσσοῦνται δὴ τινὰ σχήματα στερεὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστιν δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ. ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δὲ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κγ Τούτων προγεγραμμένων ἀποδείκνυώμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιον ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ γα εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ βδ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. οὗ κορυφὰ τὸ β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιον ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσσεῖται οὖν ὁ ψ κῶνος ἡμίσεος ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ περ ἡμιόλιος ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μὴ ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐντὶ ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγεγραφὸν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι τηλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶ-

μα τοῦ

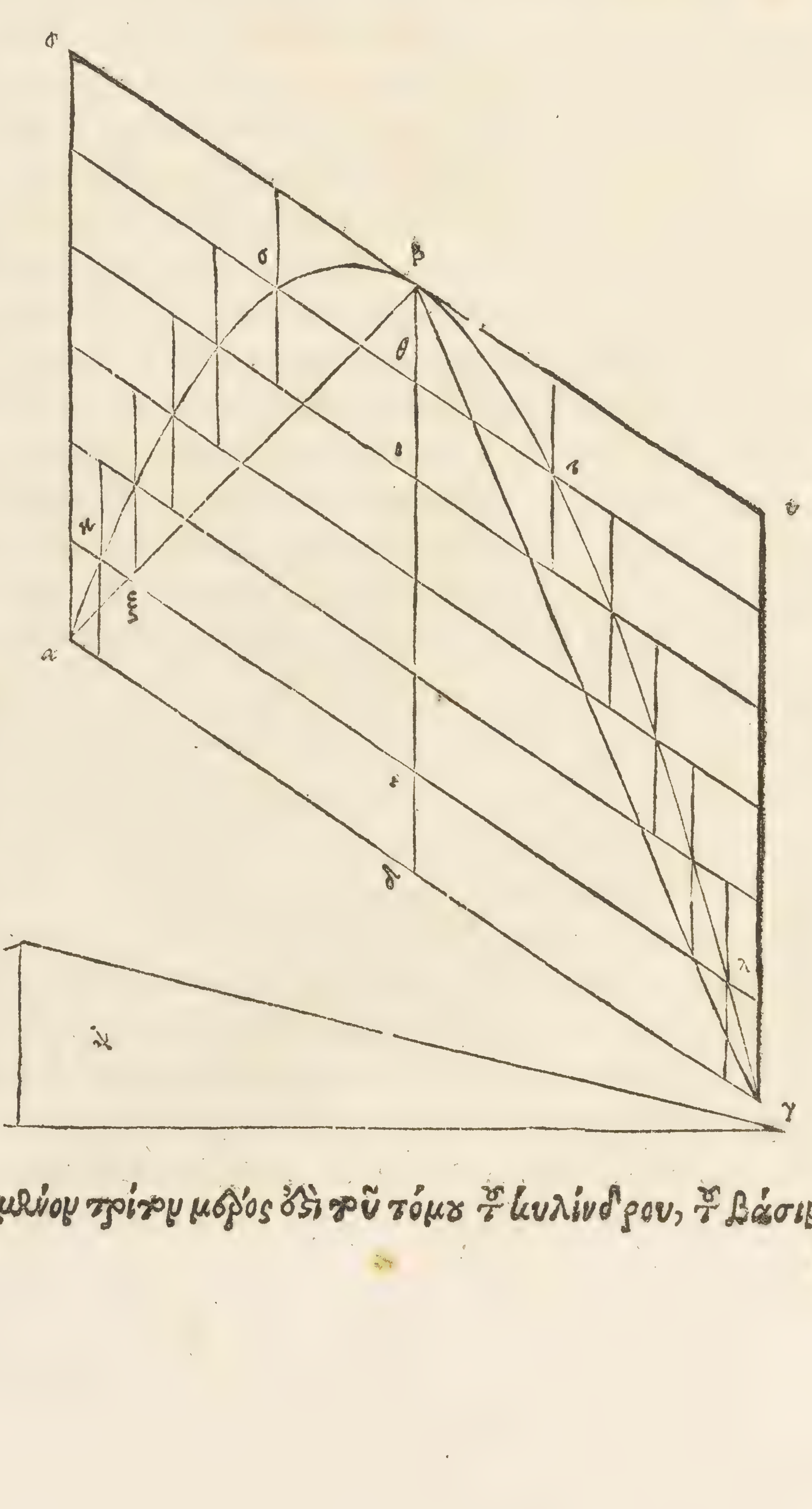
μα τοῦ ψ κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὸν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν στ, ἄξονα δὲ τὰν βθ. τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ. ἄξονα δὲ τὰν δε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν στ, ἄξονα δὲ τὰν θι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος κύλινδρος



διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν εξ. ὁμοίως δεδειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὸν εζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον ὃν ἁ πε, τουτέστιν ἁ δα ποτὶ τὰν ζε. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τοῦτον τὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τοῦ διαμέτρου τᾶς βάσεως αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν αβ, βδ εὐθειῶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δγ εὐθεῖα ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ἐν τῇ βάσει εἰσὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶν αδ μείζων ἐντὶ ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δι μείζονές ἐντι, ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δβ, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ ψ κώνου ἦν διπλασίων. ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν κων ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τᾶ εδ, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν εζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν εζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, καὶ τὸ ὃν ἔχει ὁ δα ποτὶ τὰν εξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς βάσεως αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ ταῦ α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες γοῦν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ β δ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσεις ἐντὶ τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πᾶσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ α δ ἐλάσσονες ἐντὶ, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονες ἐντὶ ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ ψ κώνου διπλάσιον ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὔτε μεῖζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

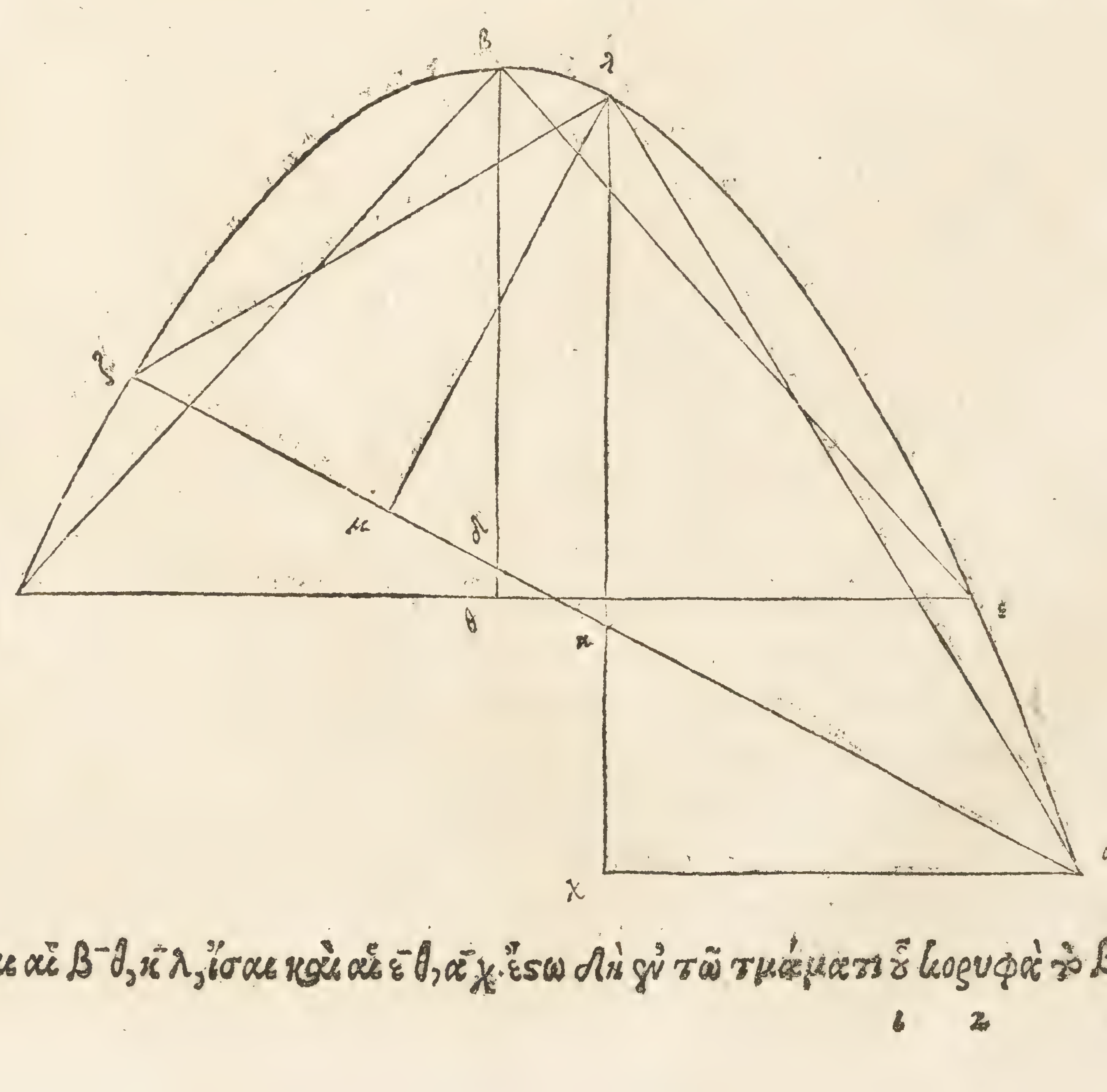
κδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἔσται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ β δ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα τὰν α γ. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον κατὰ τῷ τὰν α δ. ἐπιψαύει δὲ τοῦ τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν α γ, οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τέτμηκε τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ α γ, ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν γ α, καὶ γραμμᾶς τᾶς β δ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστακοῦσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται. τόμος κυλίνδρου τις, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. καὶ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμήματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμῆμα, ἡμιόλιον ἐστὶ τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμήματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν



ἔχον

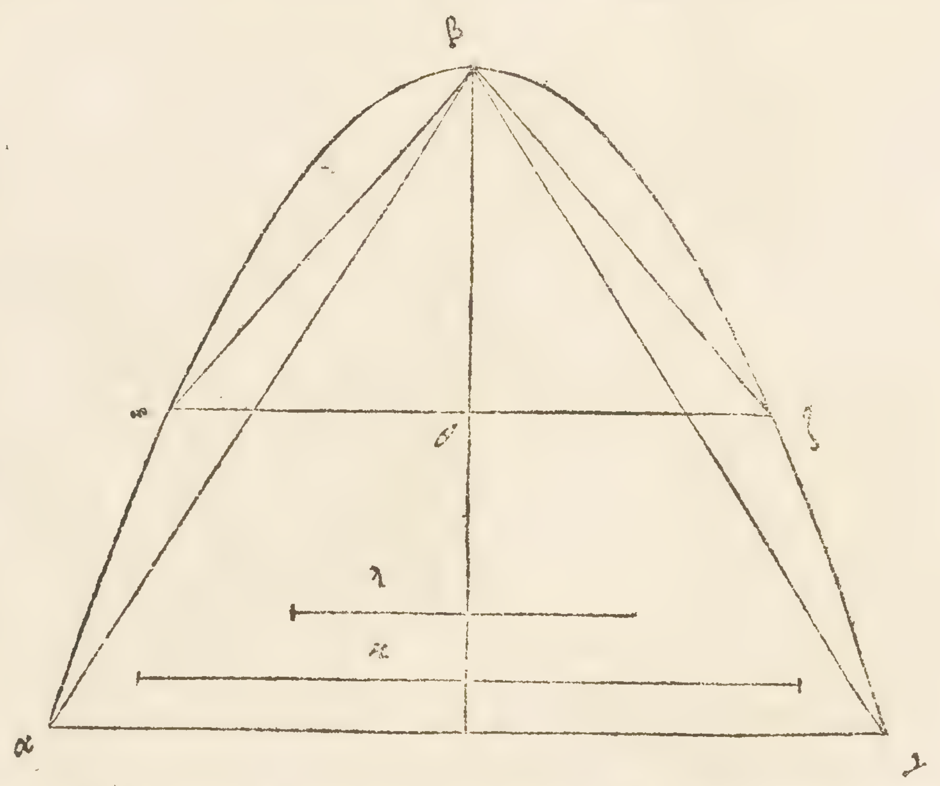
τος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δέ ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ τοῦ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομέων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομέων ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ἡμίσειαι δ' ἐντὶ τᾶν ὁμολόγων διαμέτρων, αἱ αδ, κε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν κε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε μάκει. ἐπεὶ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν. αἱ δὲ αδ, κε παρὰ τὰν κατὰ τὰν β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ. ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ, καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἔχοντα τᾷ δε, πρὸς ἕκαστον τῶν τομέων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶν βάσιων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, μείζων ἐὼν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίων. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλασίων. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον ἐστί. δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Εἴκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ. ἐῶντι δὲ οἱ τῶν τμημάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ βγ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ βδ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ αζ, εγ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ εγ. τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζα. ἄξονες δὲ ἔστω τῶν τμαμάτων αἱ βθ, κλ ἴσαι ἀλλήλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β, λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμῆμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τό τε αλζ, καὶ τὸ εβγ. καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κλ, θβ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ αλκ τῷ εθβ. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ αλζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ εβγ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ αχ κάθετος ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ βθ, κλ, ἴσαι καὶ αἱ εθ, αχ. ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β κῶ-



νος ἐγγεγραμμένος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίνεται δὲ τῷ τμήματι οὗ κορυφὰ τὸ λ, ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἐπὶ τὰν δζ ἁ λμ, ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἐκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διάμετρον τὰν αζ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εγ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς εγ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ κα ποτὶ τὰν εθ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ, ποτὶ τὰν βθ. ἁ μὲν γὰρ κα ἡμίσεά ἐντι τᾶν διαμέτρων τᾶς βάσιας τᾶς τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἁ δὲ εθ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου. αἱ δὲ λμ, βθ ὕψεα ἐντὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν κλ. ἐπεὶ ἁ βθ ἴση ἐστὶ τᾷ κλ. ἔχει δὲ καὶ ἁ λμ ποτὶ τὰν κλ, ὃν ἁ χα ποτὶ τὰν ακ ἔχει, καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ακ ποτὶ τὰν αχ. ἴσα γάρ ἐστιν ἁ αχ τᾷ εθ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τοῦ ακ πρὸς αχ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς λκ πρὸς λμ. τὸ ἄρα ἀπότμαμα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ λκ ποτὶ τὰν λμ. καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ τὰν βθ. ἴση δὲ ἁ βθ τᾷ κλ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ β. φανερὸν, οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ ἑτέρον αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

κϛ Εἶκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένου, τὰ τμάματα ποτ' ἄλληλα τὸν αὐτὸν ἕξουντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτοῖς. ἀποτετμήσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν κ, λ τετραγώνοις. τμηθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος, ἔστω τομὰ ἁ αβγ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, ἄξων δὲ ἁ βδ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ βδ τᾷ κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ἴσον ἐντὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ κ ἴσα ἐστὶ τᾷ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις. ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν κ, λ ἴσα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἕξουντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ λ τᾷ κ, ἔστω ἁ λ ἴσα τᾷ βθ. καὶ διὰ τοῦ θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εζ, ἄξονα δὲ τὰν βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμήματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς αγ, εζ, κορυφὴν δὲ τὸ β σαμεῖον.

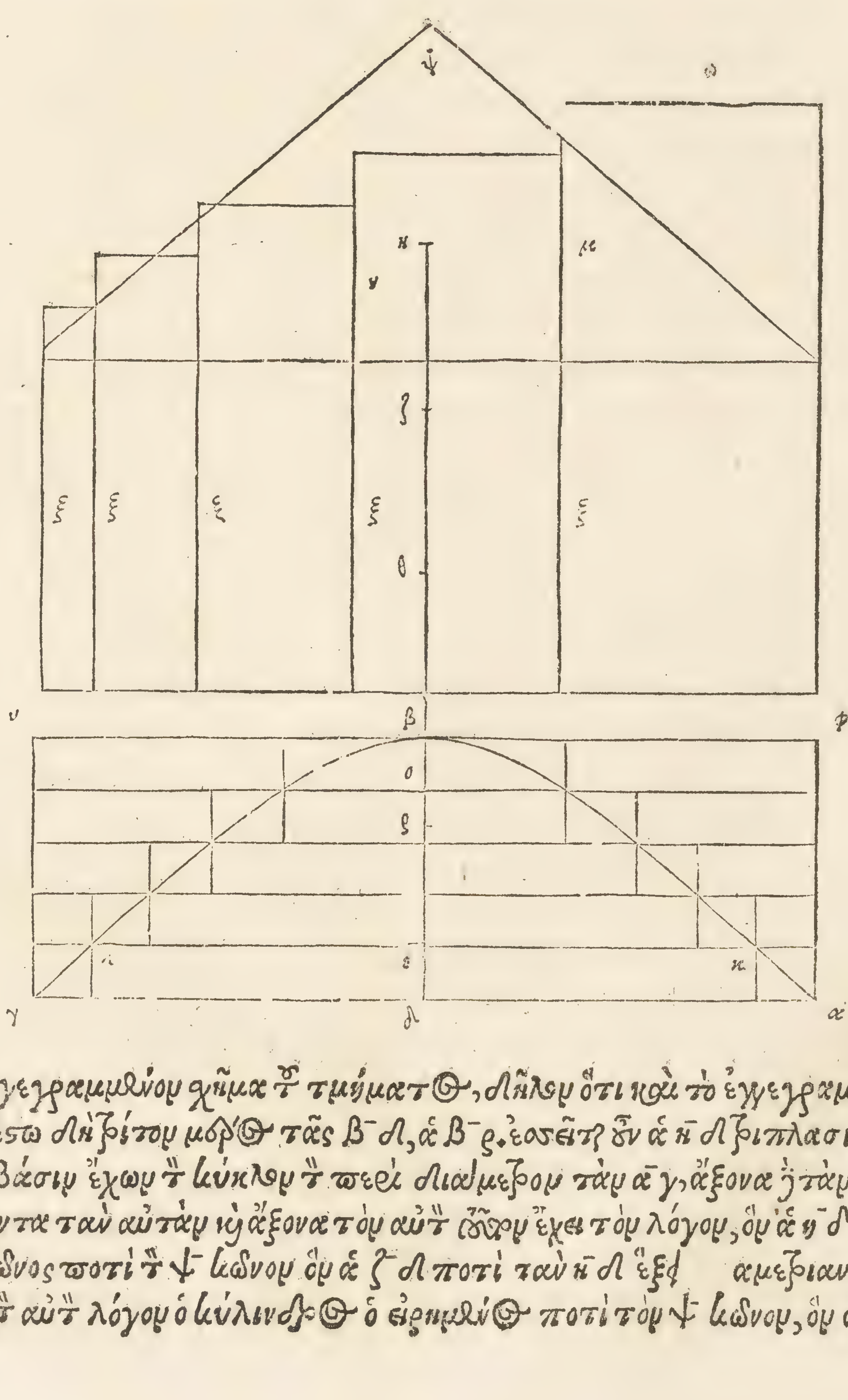


ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν βθ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν θε δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν θε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν βθ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν θβ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν βθ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δβ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν θβ, τοῦτον ἔχει

τὸν

τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δ Β, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θ Β. ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστι. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν Β δ, ἴσον τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θ Β, ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσαν τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν Β δ ἴσα ἁ κ, τᾷ δὲ θ Β ἴσα ἁ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξωνα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον ε, τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

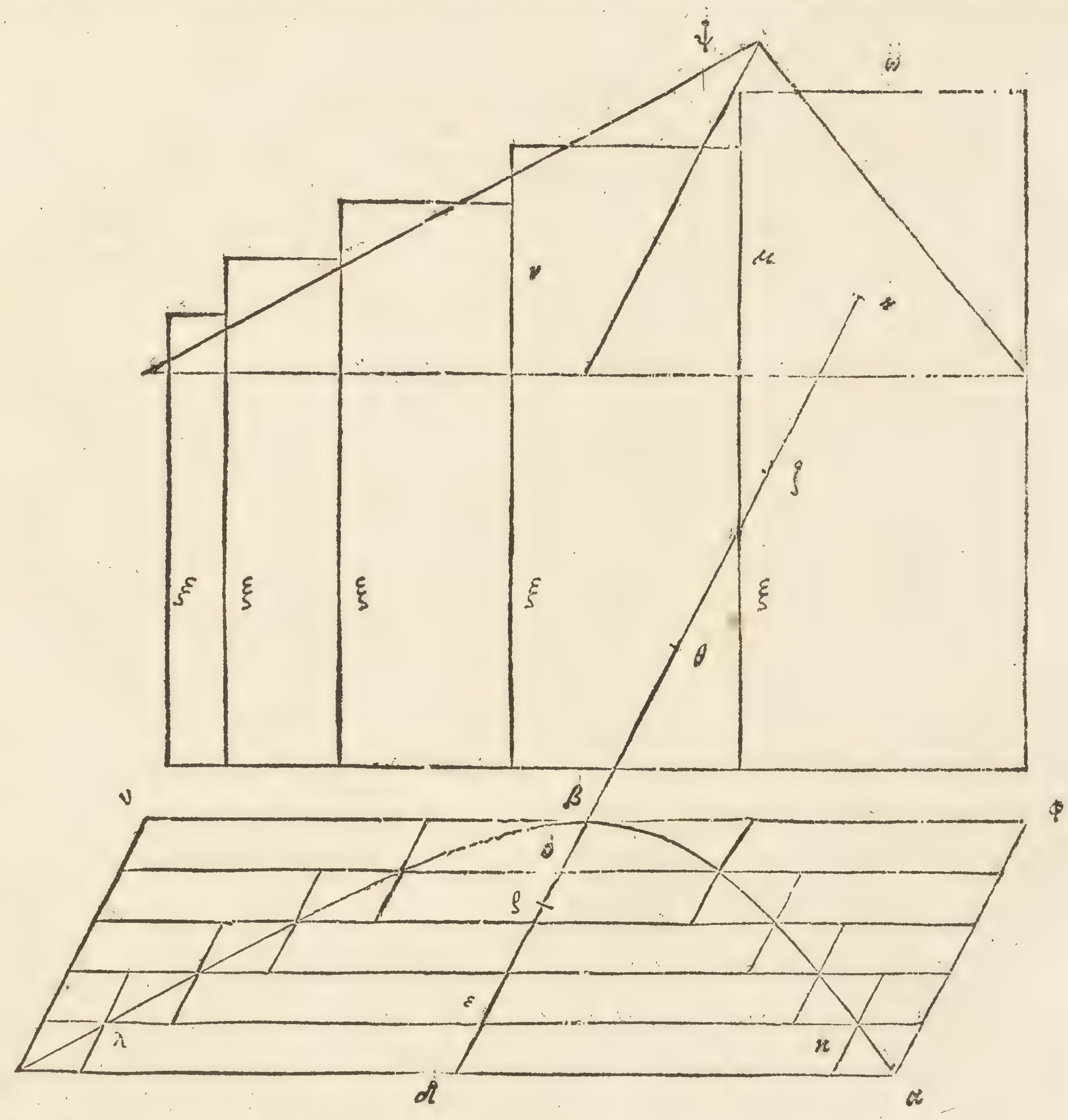
Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, κζ
ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω τι τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ α Β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα εὐθεῖα ἁ α γ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ Β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ Β θ. καὶ τᾷ Β θ ἴσα ἁ ζ θ, καὶ ἁ ζ η. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὰν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, λόγον ἔχει ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν ζ δ. ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φ α, γ υ. ἔστω δὴ καὶ κῶνός τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν Β δ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ η δ ποτὶ τὰν δ ζ. φημὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἴγε μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσον ἐστίν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἄξονα δὲ τὰν Β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, καὶ μεῖζον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς Β δ, ἁ Β ρ. ἐσσεῖται οὖν ἁ η δ τριπλασία τᾶς θ ρ. ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν Β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν θ ρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν η δ ἐξ ἀμείβιαν, ὁμοίως τῶν λόγων τεταραγμένον τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζ δ ποτὶ



ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτὰ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τῷ βδ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζβ. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτῶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζδ β. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ζο β. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς βδ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ' ἇς τὸ μ, ἴσα τᾷ βδ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ βο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ τᾶν ζδ β. ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζδ, βδ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζε, βε. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ζδ, βδ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξμ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ζε, βε ἴσον ἐστὶ τὸ ξν. ἁ γὰρ ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζβ, ἁ δὲ ν τᾷ βε, ἁ δὲ μ τᾷ βδ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξμ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τᾶν περὶ τὰν ν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων τετραγώνῳ. ἐστὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ δε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις. λέγονται δὲ τῶνδε κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δεικτέον δέ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ ν ξ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ, ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶναι ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλημάτεσσι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἑτέρα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον.

κῶνον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸ ψ. ὥστε μεῖζον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλαττον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσον ἐστὶ, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμηθῇ τὸ τμῆμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος ταὐ αὐταὐ τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γ α εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἄχθω διὰ τοῦ β παρὰ ταὐ α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ φ υ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα ταὐ α γ. καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ β θ. τᾷ δὲ β θ ἴσα ἔστω ἅ τε θ ζ, καὶ ἁ ζ η. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ, ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ ταὐ α γ. ἐπιψαύσει δὲ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ ταὐ α γ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμηκε τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ γ α. ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον ταὐ α γ, καὶ τᾶς β δ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, περὶ διάμετρον ταὐ α γ. εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, ταὐ αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν φ υ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, περὶ διάμετρον ταὐ α γ. εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ η δ ποτὶ ταὐ δ ζ. ὃν γοῦν ἔχει λόγον ποτὶ ταὐ δ ζ, τοῦτον ἔχει ὁ ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ ψ. εἰ γὰρ μὴ δυνατὸν, ἐστὶ μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμήματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα κη



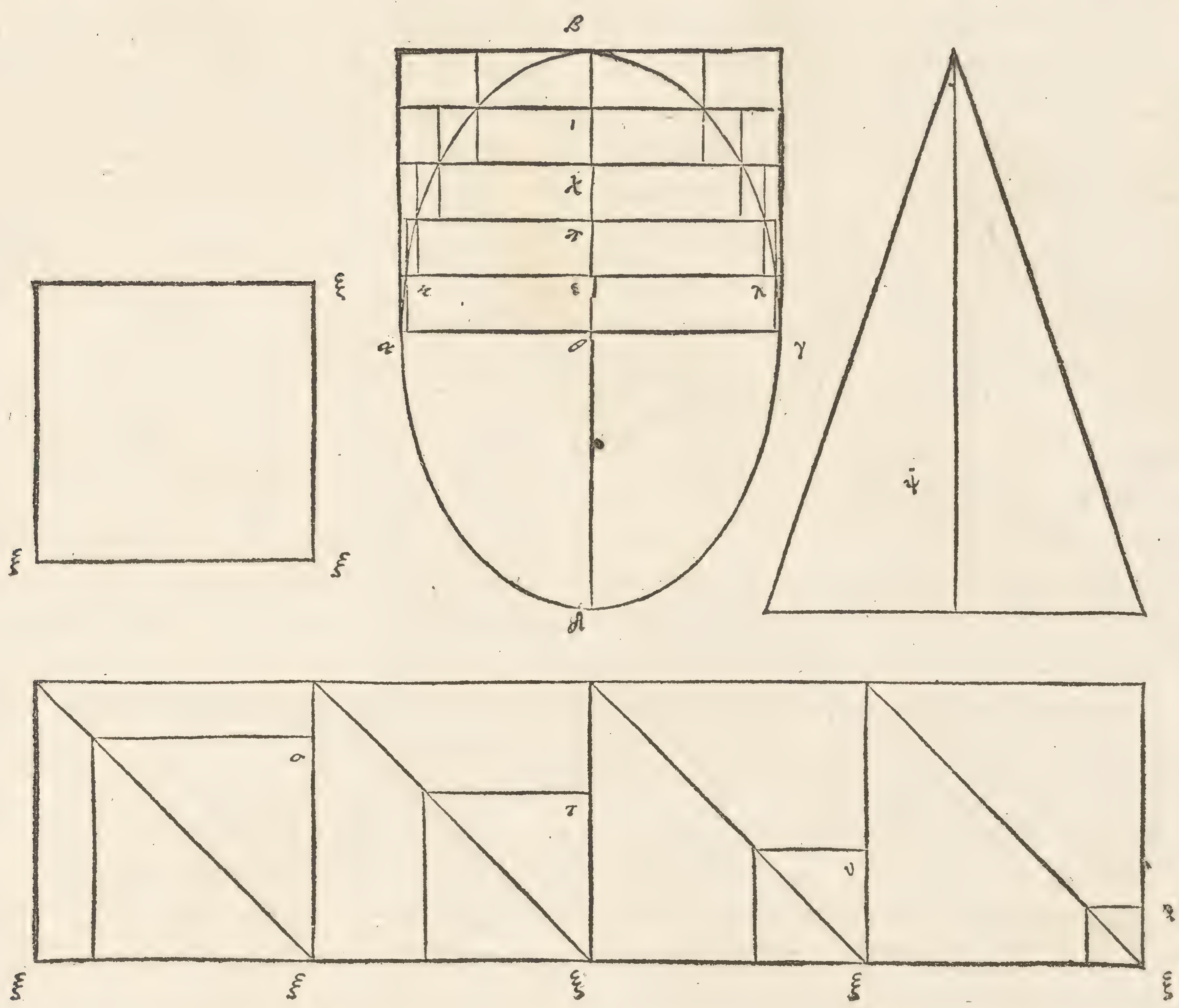
τοῦ ψ

τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντων ἔστε ἔσται ποτὶ ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἅτε β ε τρίτον μέρος ἔστω τᾶς β δ. καὶ τ' ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευαζέσθω. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλήλους, ὃν περ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαί. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπεὶ ἐστὶν αἱ μὲν ζ διαγμέναι διὰ τοῦ θ, καθ' ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ ω χωρίῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ' ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥς τε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ε. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἐστὶν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμῆμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐστὶν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κθ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἥμισεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δὲ, οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ. καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετάχθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνος τὶς ἐν ᾧ τὸ ψ διπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τῷ τμήματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φημὶ δὲ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ

ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἁμί-
σεως τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος
τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἁμίσεως τοῦ σφαιροειδέος μεῖζον
ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ



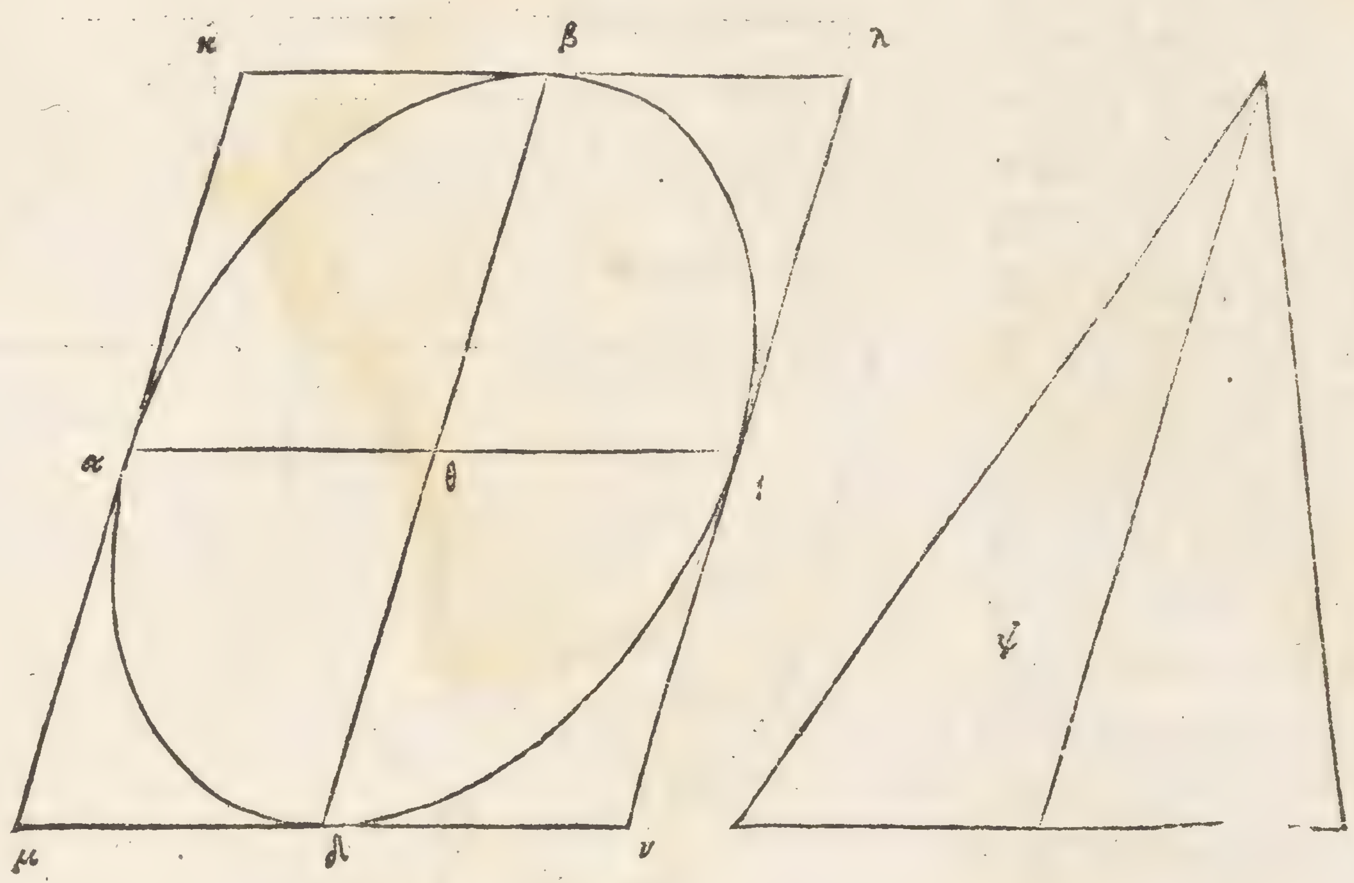
τὰν βθ. ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ
τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὁ δὲ ψ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύ-
λινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ
ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα. ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ
βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος δι-
αιρούμενος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι,
τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' αἷς τὰ ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς
τμάμασι τᾶς βθ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ βθ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγε-
γράφθω. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βι. ἐσσεῖ-
ται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βι, ιδ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαι-
ρήσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς βι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βχ,
χδ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος μὲν ἴσον τμάματι, μεῖζον τοῦ
πλάτεος τοῦ πρώτου αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ
ὑπὸ τῶν τᾶς βδ τμημάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ
ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θε. ὁ δὲ κύλιν-
δρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν
ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγω-
νον τὸ ἀπὸ τᾶς αθ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν βθ, θδ περιεχόμε-
νον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ περιεχόμενον. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λό-
γον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον.
ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῖν ξ ξ ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρουμένους ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρουμένους ἀπ᾽ αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρουμένους ἀπ᾽ αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ᾽ αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γὰρ τινὲς γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξ ρ, ξ ς, ξ τ, ξ υ, ξ φ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπερεχομένᾳ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ, ἐφ᾽ ἃν τὰ δύο ξ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ ἐστιν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μεῖζον ἢ τριπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ ταῦτα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντὶ ἀφαιρημένα ἀπ᾽ αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἥμισεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἅμισεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ᾽ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε π, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε π, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένῳ αὐτῷ τετραγώνῳ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

λ Καὶ τοίνυν εἴκα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμηθῇ, ὁμοίως τὸ ἅμισεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμήσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

ἀποτέμνον

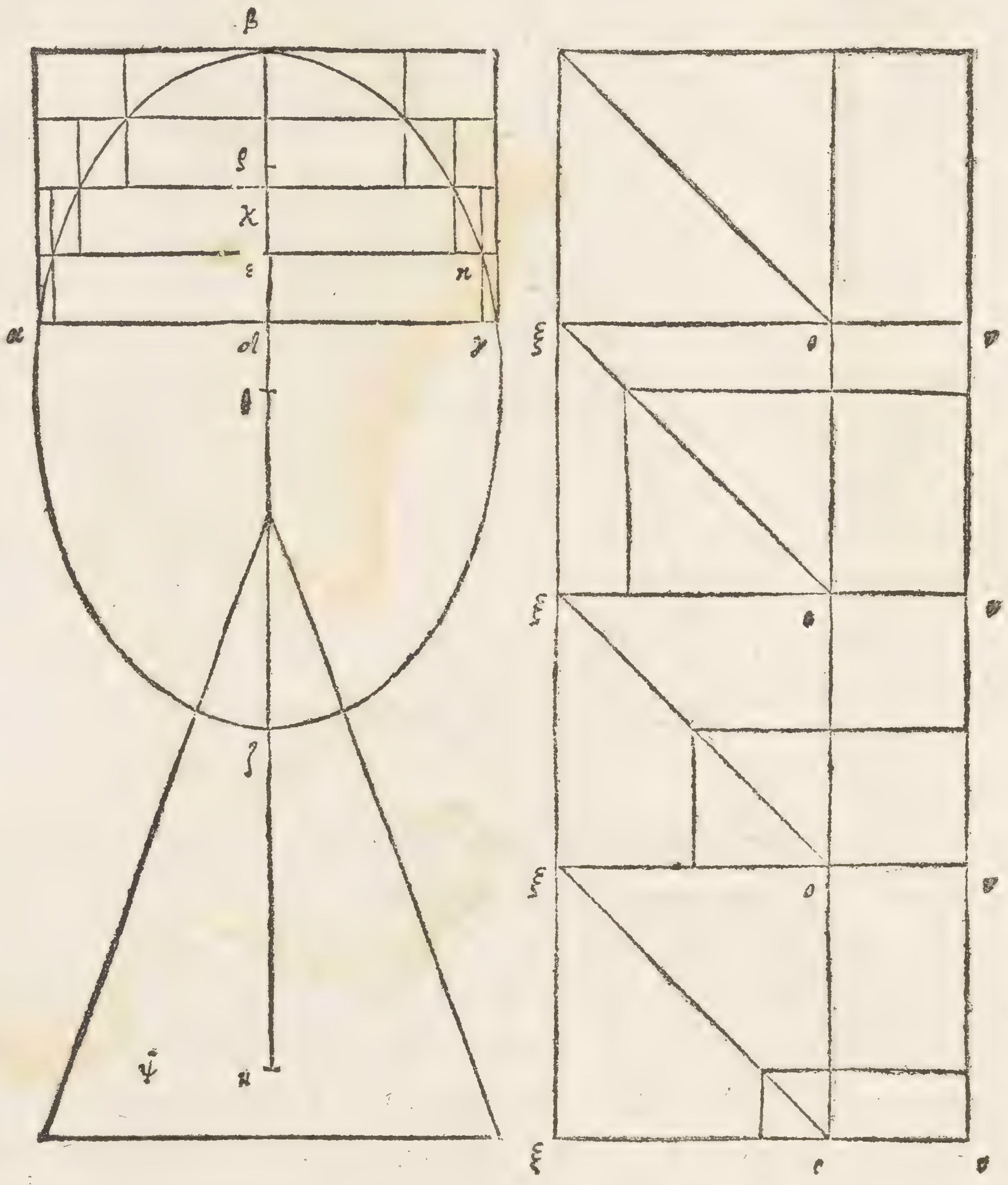
ἀποτέμνον ὑποκείσθω δὲ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθω δή τινες αἱ κλ, μν παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. ἀπὸ δὲ τᾶν κλ, μν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τὸ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι. πεσεῖται δὲ διὰ τοῦ θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμημάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ βθ, θδ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κυλίνδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν βθ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τις κυ-



λίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διαμέτρου τᾶς αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τὸ ἀπότμημα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δή, ὅτι τοῦ σφαιροειδέος ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν, ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμηθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ λα
ἔλαττον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμήματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμήματος. ἔστω γάρ τι τμῆμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ βζ. κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα, τομὰ ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ποιήσει δὴ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν βζ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶναι ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπόκειται. ἔστω δὲ τὸ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ βθ ἴσα ἔστω ἁ ζη. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ

δη ποτὶ τὰν δ ζ. φαμὶ δὴ τὸν ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ β σαμεῖον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. ἐνεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς β δ ἁ β ρ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν β η τριπλασία ἐστὶν τᾶς β θ, καὶ ἁ β δ τᾶς β ρ, τριπλασία ἔσται καὶ ἁ δ η τᾶς θ ρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν β δ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν,



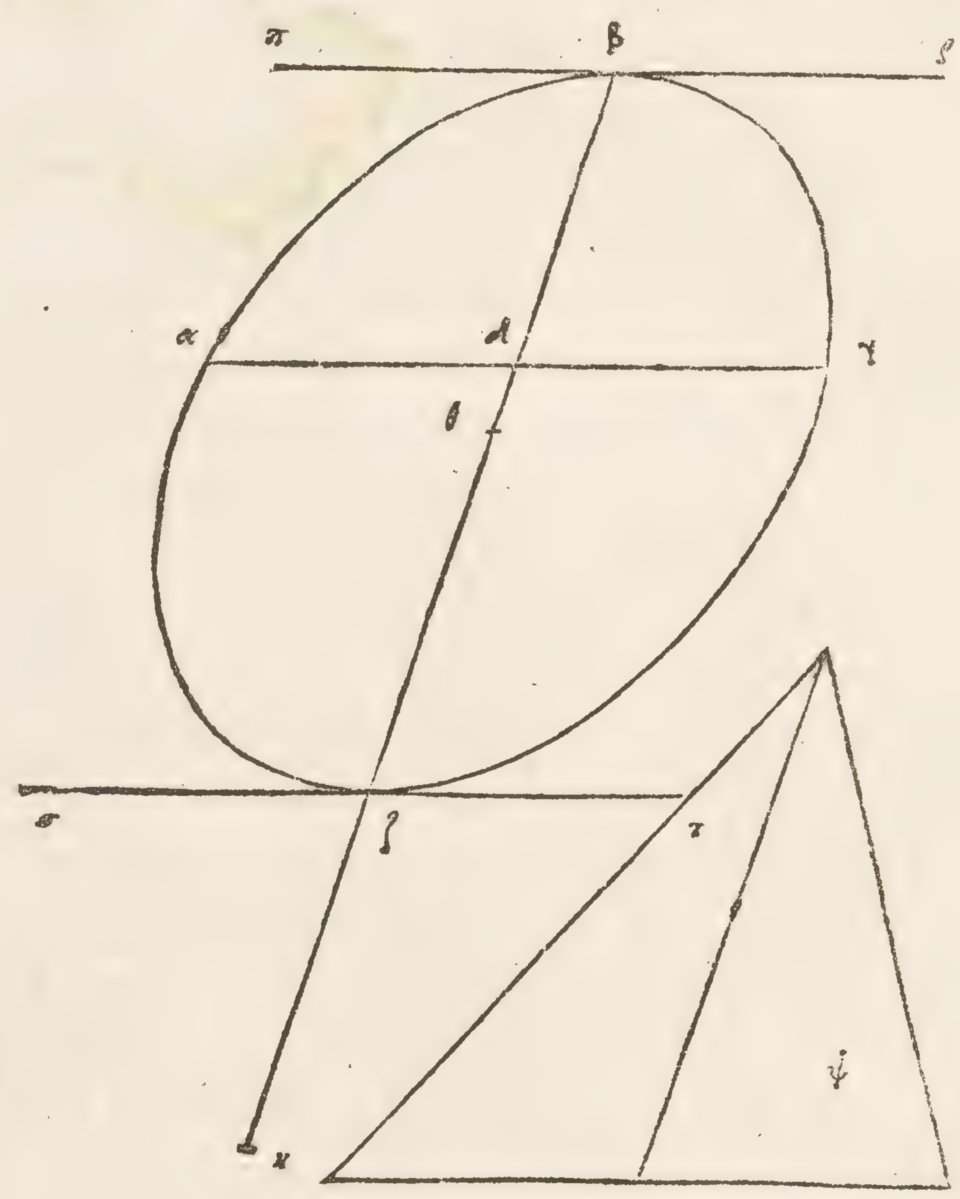
καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ η ποτὶ τὰν θ ρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δ ζ ποτὶ τὰν δ η. ἕξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸν ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ. ἔστω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾷ ξ ν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ β δ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζ δ. ἔστω δὲ καὶ τᾶν ξ ο ἑκάστα ἴσα τᾷ β, δ. τᾶν οὖν ν ο ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς θ δ. παραπεπλώκετω δὴ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ β δ. ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ β ε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ β χ. καὶ ἀφ' ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμήματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου, ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ε, ε ζ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπλωκὸς παρὰ τὰν ν ο, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχων ἴσαν τᾷ δ ε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ χ, χ β. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν ν ο παραπεπλωκός, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοῦντι δὲ ὧδε. τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὴ πρῶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν β δ, δ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε ζ. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν

κύλινδρον

κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ οὖν μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ βδ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ' ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα χωρία τοὺς ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρουμένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεὶ ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ' αὐτᾷ νο, καὶ παρὰ ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα ἴσας τᾷ βδ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἕξουσι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ἐστὶ δὲ τᾶς μὲν ξν ἴσα ἁ δζ. τᾶς δὲ ἡμισέας τᾶς νο, ἁ δε. τᾶς δὲ τρίτας δύο μόρια τᾶς ξο, ἁ δρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι ἐς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ βε, ποτ' αὐτό. ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ' αὐτὸν ἐόντα τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ βδ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ' αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξωνα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον πρὸ τοῦ λεγομένου τοῦ ἐσχάτου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν νο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπὰ, ἃ ἐντὶ ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρουμένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε ἡμισέαις τᾶς νο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξο. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

μένον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

λβ Καί κα τινὶ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τμηθῇ τὸ σφαιροειδές, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τᾶ τε ἡμισέα τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμήματος. τετμήσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδές, ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. καὶ παρὰ τὰν αγ ἄχθω αἱ πρ, στ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ᾽ αὐτᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἔστω ἁ βζ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἇς διάμετρος αὐτᾶς ἁ γα. λελάφθω οὖν ὅτε κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ᾽ εὐθείας τᾶ βδ. οὗ γὰρ τᾶ ἐπιφανεία ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ γὰρ τᾶ ἐπιφανεία ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, καὶ ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζη τᾶ θζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν δζ.

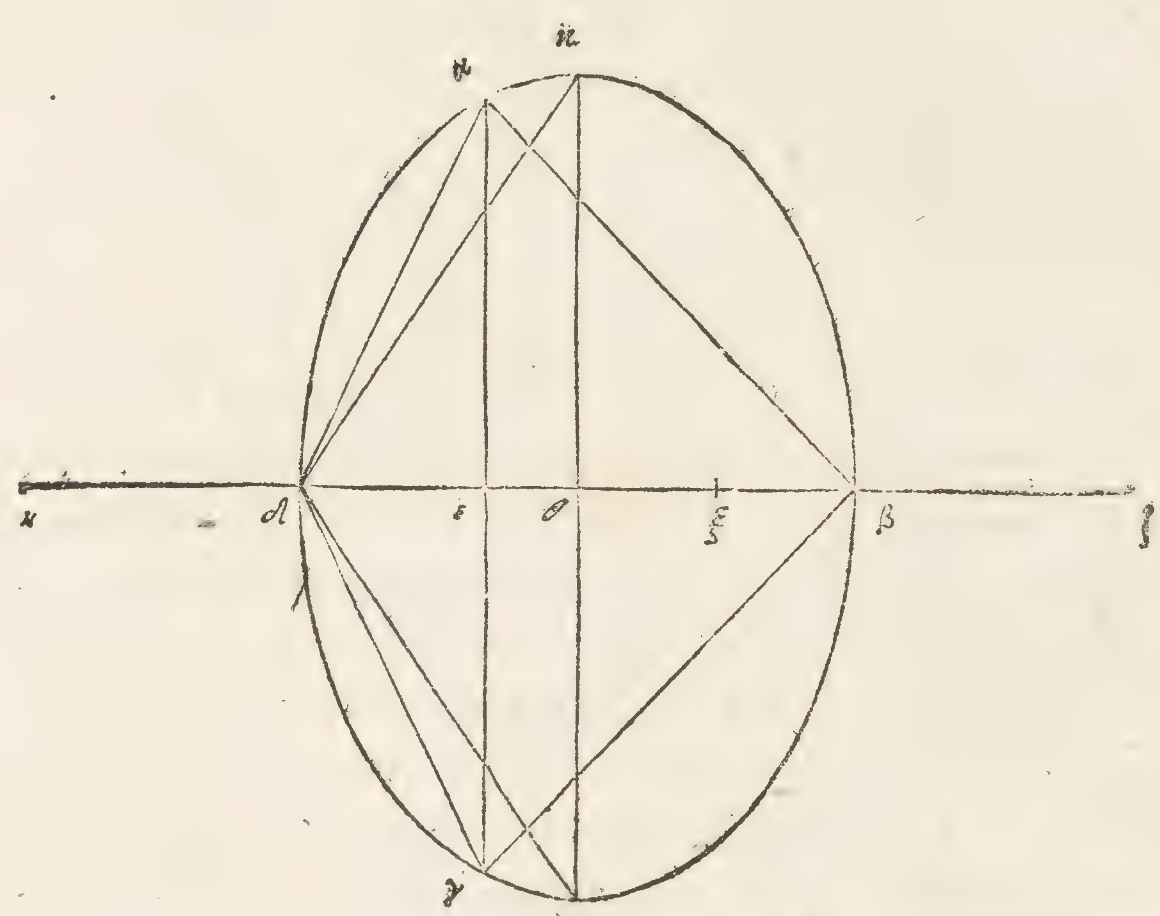


εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ προτέρῳ δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων,

ἢ ποτὶ

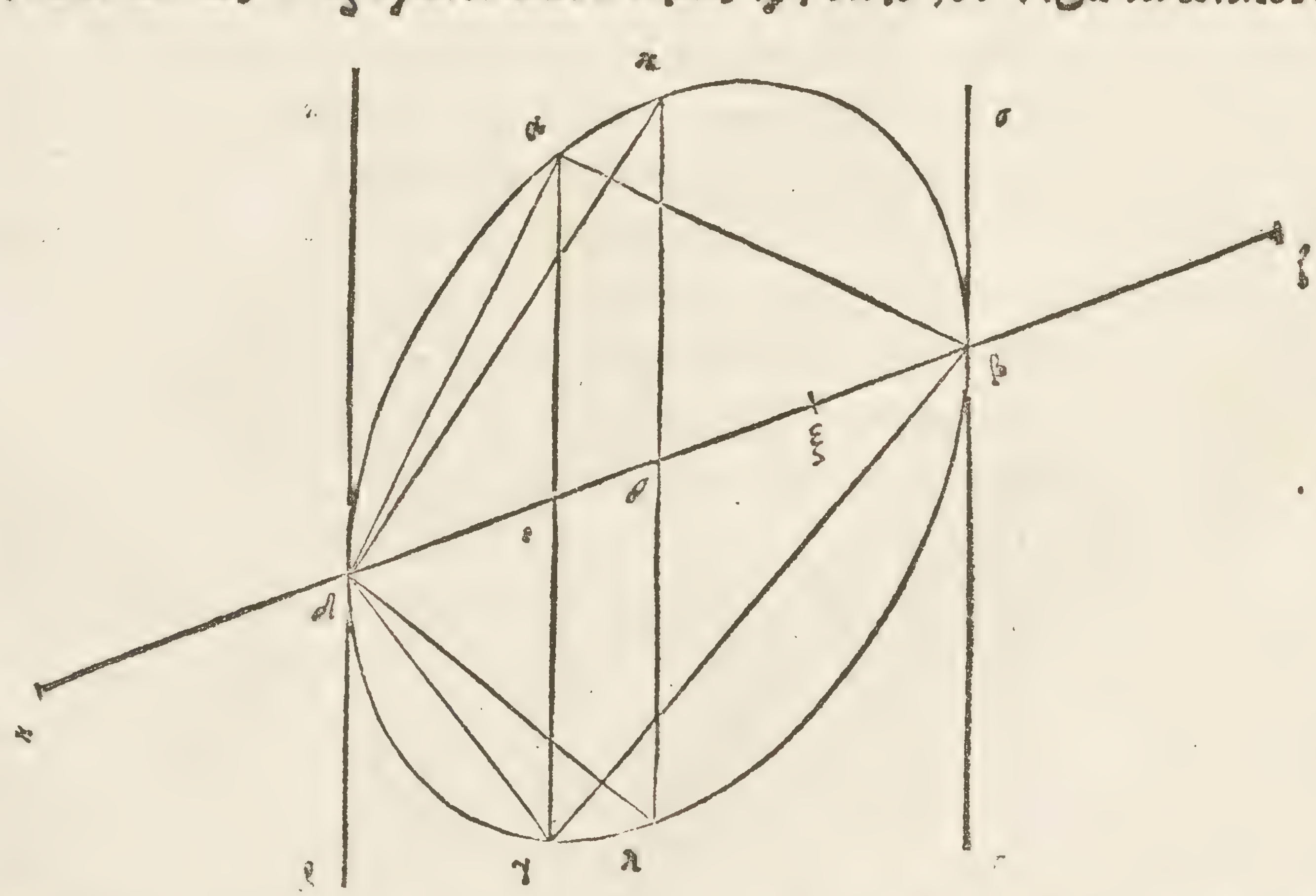
ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς δεῖ δεῖξαι.

ΠΑντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ βδ. τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ γα εὐθεῖα. ἐσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ' ὀρθὰς τᾷ βδ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. ποτικείσθω δὴ ἁ δη τᾷ δθ ἴσα, καὶ ἁ βζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τετμάσθω δὲ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ γινομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἔστι δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον. τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ ταῦτα. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θδ ποτὶ τὰν εδ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εα. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κθ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εα, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ βθ, θδ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βε, εδ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θδ ποτὶ τὰν εδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξδ ποτὶ τὰν θδ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ξδ, βθ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βθ, θδ, ὃν ἁ δθ ποτὶ τὰν δε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξδ, θβ, ποτὶ τὸ ὑπὸ βθδ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ταῦ βθ, θδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βε, εδ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βε, εδ. ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταῦ κλ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βε, εδ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον ταὐ αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ βε, εδ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζε, εδ. τουτέστιν ἁ βε ποτὶ εζ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ζε ποτὶ τὰν βε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἥμισυ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ξδ, βθ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ ζε, δε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον, τοῦ ἐν τῷ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ βθ, ξδ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ κδ



τὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, β̄θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζ̄ε, ε̄δ. ἔχοι καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζ̄η, ξ̄δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε ε̄δ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζ̄η, ξ̄δ, τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ε̄δ πρὸς τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε ε̄δ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄η, ξ̄δ, τοῦ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ε̄δ, τῷ τε ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄η περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ξ̄ε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλαττον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ξ̄ε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ε̄δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἁ ζ̄ε ποτὶ τὰν β̄ε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν β̄ε, ε̄δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β̄ε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὕψεων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, ἔχοι ἂν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὥσπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ξ̄ε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β̄ε. οὗτος δὲ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ. τὸ γὰρ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄η, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄δ, ὥσπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ. καὶ τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ξ̄ε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, θ̄ε, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον (ε̄δ) ὃν ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ. ἁ γὰρ ξ̄ε ποτὶ τὰν θ̄ε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τὰς ξ̄δ, θ̄δ, δ̄ε, καὶ τὰν θ̄δ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ η̄δ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄η, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, ξ̄ε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄δ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, θ̄ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε̄β τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄δ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, θ̄ε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς β̄θ τετράγωνον, ἴσον τῷ ὑπὸ ταῖν ξ̄δ, ε̄δ περιεχομένῳ. ἁ δὲ ὑπεροχὰ ᾇ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β̄ε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς β̄θ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ζ̄ε, θ̄ε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ β̄θ, β̄ζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε̄η ποτὶ τὰν ε̄δ.

κδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἴσαι τᾷ ἡμίσεᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμημάτων, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τετμήσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β̄γ δ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ̄α εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α̅γ ἄχθωσαν αἱ π̄ρ, σ̄τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β̄, δ̄. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α̅γ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β̄, δ, καὶ ἐσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμημάτων τὰ β̄, δ̄. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γενομένων τμημάτων ἁ β̄δ. πεσεῖται δὴ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου,



καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ̄ μεῖζον ὄντος τῶ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα. οὗ κορυφὰ τὸ β̄. ποτικείσθω δὴ ἁ δ̄η ἴσα τᾷ δ̄θ, καὶ ἁ β̄ζ τᾷ αὐτᾷ, δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμημα

ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παρ' ἀλλήλα τῷ κατὰ τὰν α γ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμημα κώνου, κορυφὰν ἔχον τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δ θ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκατέρου ἑκάτερον. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. αὐτὸ δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὰ γὰρ ἀποτμήματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τούτων ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τᾶς δ ε πρὸς τὸν ε β. ἔχει καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν η ζ, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη, ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξεις ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας, ἐπιστέλλω τοι. μὴ θαυμάσῃς δὲ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι, διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ ματεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. ποῖα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι, Κόνων μὲν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν εἰς τὰν μάτευσιν αὐτῶν χρόνον μετήλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν. καὶ ταῦτα πάντα εὑρὼν, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρὼν, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων, οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκέσθαι. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλους δὲ ποτεσσόμεν, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδὲ μίαν ἐκφέροντες ἐλέγχωνται, ἀπό θ' ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντὶ, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξεις ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμάζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερὸν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὴν

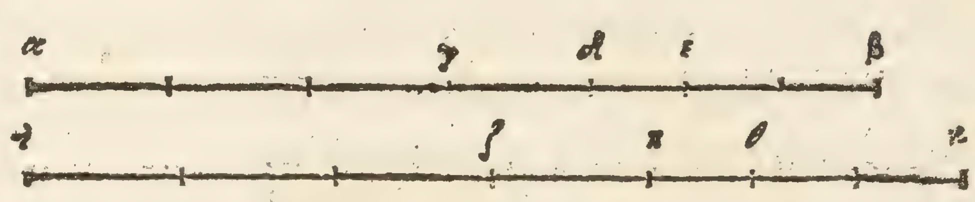
σφαίραν βιβλίου. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δέ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δέ, τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δέ, δύο δοθέντων τμημάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμημάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμήματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξεις, Ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδος ἦν. ἐστὶ δέ, εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ ἴσαν ἴσα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ ἴσαν ἴσα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα. μείζονα δέ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴκα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμηθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷον ἐστὶ τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστον ἐστὶ τῶν ἄλλων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμημάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμήματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμηθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ ἀποτμηθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ, καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος δύο τμήματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσοιοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, δῆλον, εἴκα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἐόντι ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμήματα ποτ' ἄλληλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχωντι δυνάμει ποτ' ἀλλήλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δ' αἱ ἀποδείξεις οὔτω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοίνων ἐόντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμεν σοι. ἐστὶ δὲ τάδε.

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σημείῳ, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴκα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον. ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος ἐπὶ τὸ αὐτό, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴκα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σημεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τοῦ χωρίου, τοῦ ἐν

τᾶ δευτέρα περιφορᾶ ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾶ τρίτα ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾶ τετάρτα τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾶ πέμπτα τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι, τοῦ ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ ποτιλαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ ποτιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν, τᾶ ἐν τῆ δευτέρα περιφορᾶ ποτιλαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικας τᾶς ἐν μιᾶ περιφορᾶ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέοντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γεγραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστήμασι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβληθῇ, φαμὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἕλικι μεταξὺ ταῦν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον, ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ἇς ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ' ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δὴ μὲν καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. πρόκεινται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρείαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμματα τάδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τᾶν ὑπεροχᾶν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος αὐτᾶ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

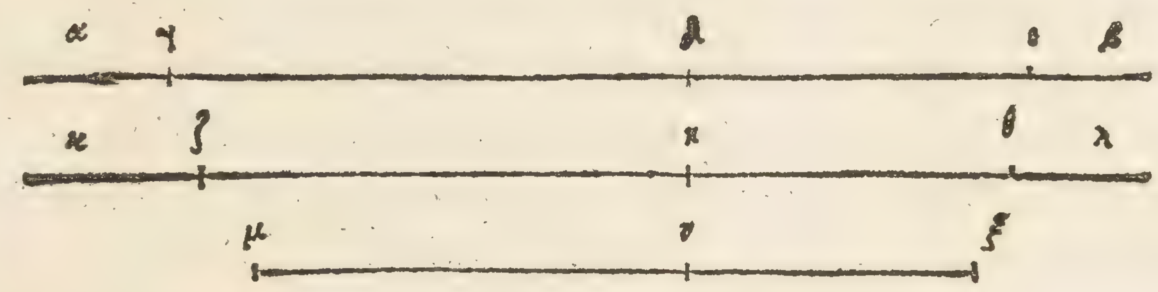
Εἴκα ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾶ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὃν περ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τᾶς γραμμᾶς ἐπορεύθη. ἠνέχθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τᾶς α β γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾶ δύο γραμμαὶ αἱ γ δ, δ ε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζ η, ἐν ᾧ δὲ τὰν δ ε ὁ η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α γ γραμμὰ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν η θ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γ δ, δ ε γραμμῶν αἱ α δ, δ β γραμμαὶ καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥς τε ὑπερέχειν τὰν α δ τᾶς δ β. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γ δ γραμμὰ ἐν τᾶ α δ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζ η ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λ η. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δ ε γραμμὰ ἐν τᾶ δ β, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θ η χρόνος ἐν τῷ κ η χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως ἐνεχθαι κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν γ δ ἐνήνεκται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάστῳ ἐνήνεκται τὰν ἴσαν τᾶ γ δ.



φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν α δ γραμμάν, ἐν τοσούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ λ η χρόνος. ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γ δ γραμμὰ ἐν τᾶ α δ γραμμᾶ, καὶ ὁ ζ η χρόνος ἐν τῷ λ η χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν β δ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ κ η χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ α δ γραμμὰ τᾶς β δ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δ α διαπορεύεται γραμμάν, ἢ τὰν β δ. ὥς τε ὁ χρόνος ὁ λ η μείζων ἐστὶ τοῦ κ η χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζ η, η θ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥς τε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ ταῦ ἐκ ταῦν γραμμᾶν ταῦν γ δ, δ ε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συνθεῖσαν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν χρόνον τὸν η θ. α

Εἴκα δύο σημείων ἑκατέρου ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτῷ ἑαυτῷ φερομένου, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρα ταῦν γραμμᾶν δύο γραμμαὶ αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὲρ τῶν σαμείων διανυέσθων, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω ἐπὶ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο ἐπὶ τᾶς κ λ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τῷ α β δύο αἱ γ δ, δ ε γραμμαί, καὶ ἐν τᾶ κ λ αἱ ζ η, η θ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τῷ ἐπὶ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν γ δ γραμμὰν διαπορευέσθω. ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον ἐπὶ τᾶς κ λ ἠνεγμένον τὰν ζ η, ὁμοίως καὶ τὰν δ ε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ἁ ζ η β

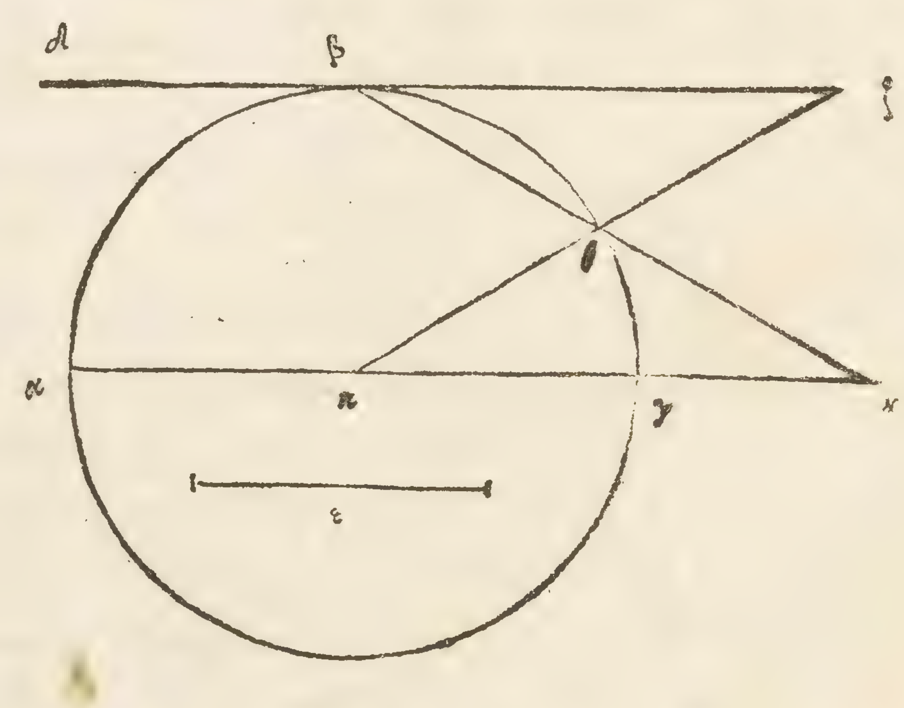
ποτὶ τὰν η θ. ἔστω δὴ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν διαπορεύετω τὸ σημεῖον ὁ μ ν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ζ κ. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δ ε γραμμὰν διαπορεύετο τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ν ξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν η θ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἕξουσιν ἅ τε γ δ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν πρὸς ν ξ. καὶ ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν ποτὶ τὸν ν ξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ.



γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα οὖσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἔσται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτᾷ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, ἐστὶ εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τὰς εὐθείας, τὸ ἓν τμῆμα ἔλασσον ἔσται τὰς ὑπεροχάς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμήματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μεῖζον ἐσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα, ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

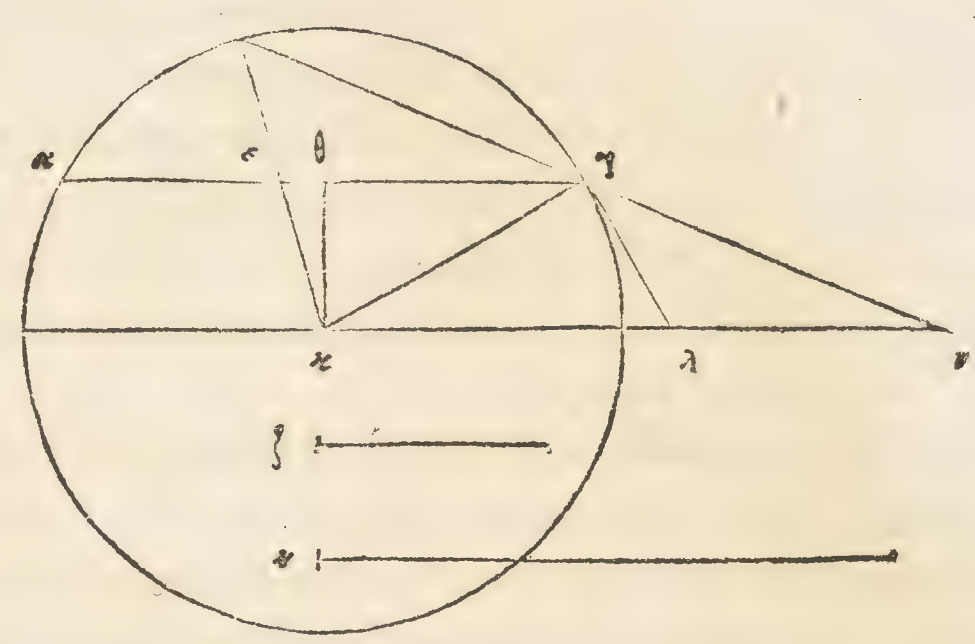
ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσης τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπό τι τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δ ζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δ ζ, ἁ α κ. καὶ κείσθω ἁ η θ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὴ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ κ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὰν θ η. ἡ ἄρα ζ θ ποτὶ τὰν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν β θ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς β θ περιφερείας. ἁ δὲ θ η μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζ θ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



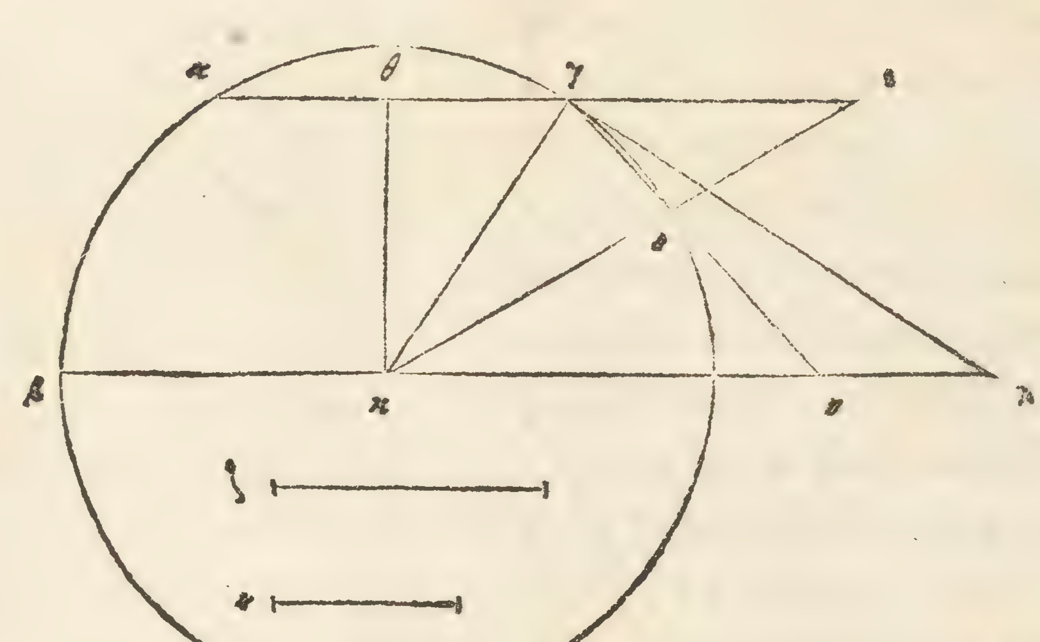
ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον μέρος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἦν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένων. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. ἐστὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν κ θ, καθέτου οὔσης τᾶς κ θ. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν α γ ἁ κ ν. καὶ τῇ κ γ ποτ' ὀρθὰς ἁ γ λ. ὅμοια δή ἐστι τὰ γ θ κ, γ κ λ τρίγωνα. ἐστὶν οὖν ὡς ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ, οὕτως ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ

τὰν

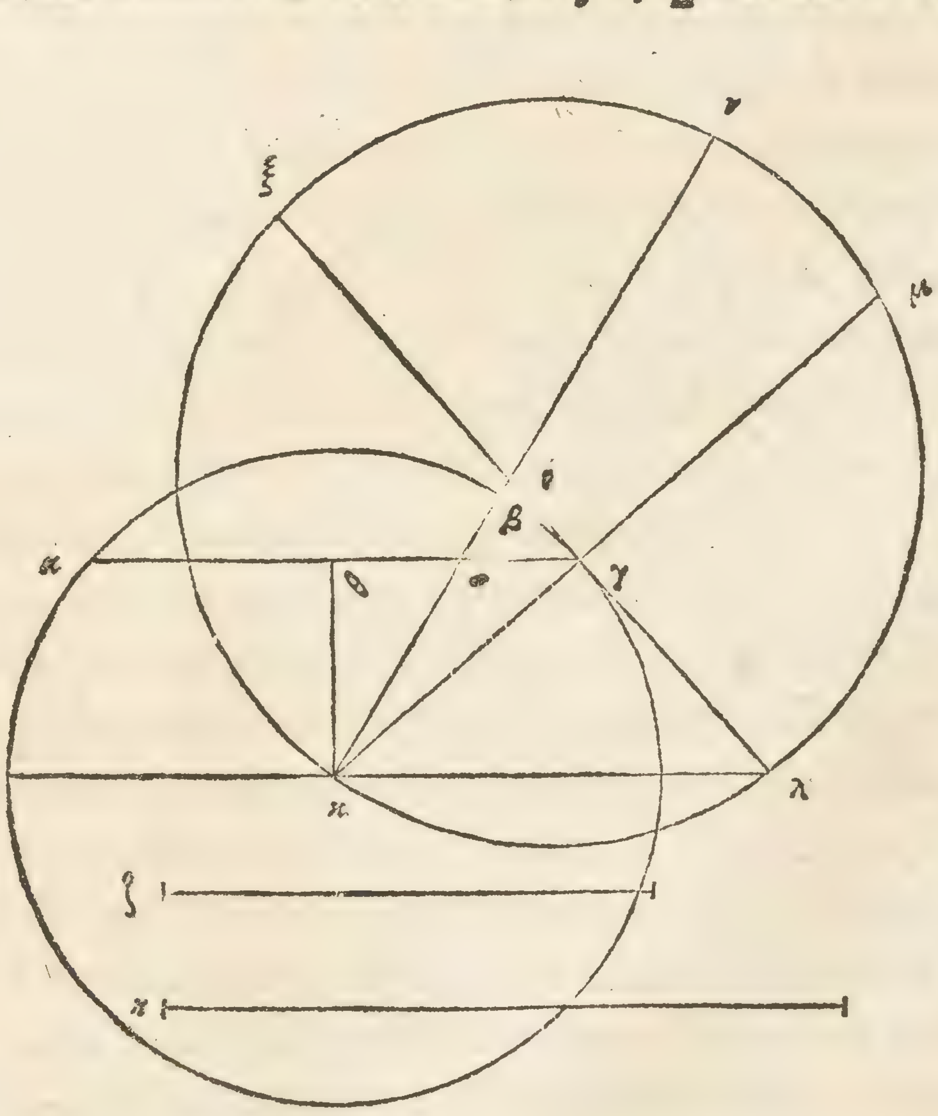
τὰν η, τουτέστιν ἐχέτω ἁ κ γ πρὸς μείζονα τᾶς γ λ. ἐχέτω ποτὰν β ν. κείσθω δὲ ἁ β ν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ. δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τεθῆμεν. καὶ πεσεῖται ἐκτὸς, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γ λ. ἐπεὶ οὖν ἁ β κ πρὸς β ν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η, καὶ ἁ ε β ποτὶ β γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ η.



Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας, καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐν ἀπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τῆς ἐκβεβλημένης τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου καθετὸν ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτὰ, καὶ ἔσω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔσω ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ. μείζων οὖν ἐσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ γ πρὸς γ λ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ πρὸς η, τουτέστιν ἕξει ἁ κ γ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γ λ. ἐχέτω πρὸς ι ν νευούσας ἐπὶ τὸ γ, δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τῆς γ λ. ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς γ λ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κ γ πρὸς ι ν, ὃν ἁ ζ πρὸς η, καὶ ἁ ε ι πρὸς ι γ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η. ζ

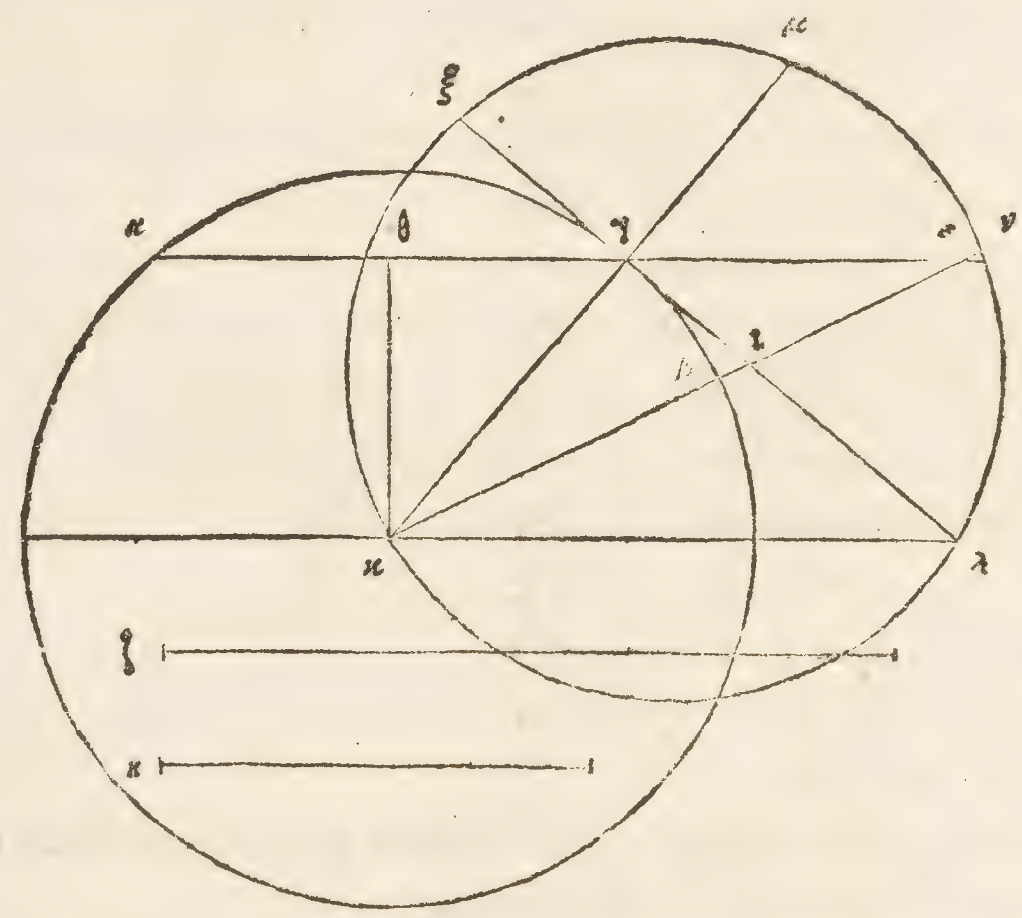


Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἶναι ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθετὸν ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἔσω κύκλος δεδομένος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α. καὶ ἁ ξ λ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η ἔσω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ πρὸς θ κ. ἐσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ κ πρὸς γ λ. εἶναι παράλληλος ἀχθῇ ἡ κ λ τῇ θ γ, ἐχέ- η



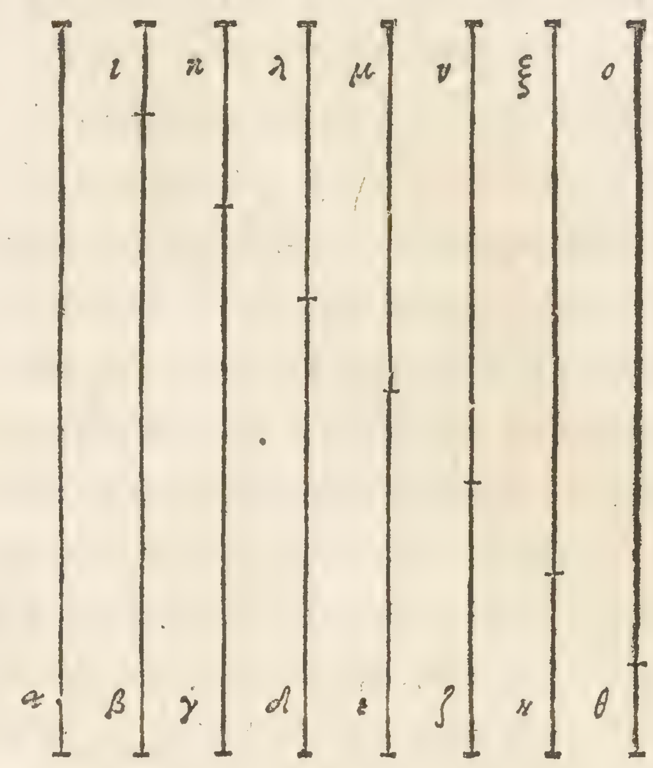
τω δὴ ἁ κγ πρὸς γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς η. μείζων δέ ἐστιν ἁ ξγ τᾶς γλ. γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ κλξ. ἐπεὶ οὖν ἐστι μείζων ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλήλαις αἱ κμ ξλ, δυνατόν ἐστι τᾶ μγ ἴσαν ἀλλάλαν θέμεν τὰν ιν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξι ιλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κε ιλ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξι πρὸς κε. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. ὥστε καὶ ἡ ιν πρὸς γλ ἐστιν, ὡς ἡ ξι πρὸς κε. ὥστε καὶ ἡ γμ πρὸς γλ, καὶ ἡ ξγ πρὸς κγ, καὶ πρὸς κβ ἐστιν, ὡς ἡ ξι πρὸς κε. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξγ ποτὶ τὰν γκ, καὶ ὃν ἡ η ποτὶ τὸ ζ. πέπτωκεν οὖν ἁ κν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφορείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ βε ποτὶ τὰν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η λόγον.

θ Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε ταὶ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν, ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχει. εἶναι ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ ταὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐταὶ ἀγομέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα διήχθω, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ξγ κατὰ τὸ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. ἔσται δὴ μείζων. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐχέτω οὖν ἁ κγ ποτὶ ταὶ γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ ταὶ η. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτη ταῖς γλ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξκλ σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξγ τῆς γλ, καὶ ποτ' ὀρθὰς εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ κμ, ξγ, δυνατόν τῇ γμ ἴσην θεῖναι τὴν ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξι λ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λι κε ἐστίν, ὡς ξι πρὸς κε. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ξιλ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν λι κε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν κε πρὸς ικ, οὕτως τὴν λγ πρὸς λι. καὶ ὡς ἄρα ἡ ξι πρὸς κε, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. τουτέστιν ὡς νι πρὸς γλ, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς γλ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ γμ πρὸς γλ, οὕτως ἡ ξγ πρὸς κγ, τουτέστι πρὸς κβ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ξι πρὸς κε, ἡ ξγ πρὸς κβ. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς λοιπὴν τὴν βε ἐστίν, ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ξγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει ἡ η πρὸς ζ. ποτιπέπτωκε δὴ ἁ κε ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφορείας ἁ βε ποτὶ ταὶ γι, ταὶ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.



ι Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ ταῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσαῶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ ταὶ β ἴσα τᾷ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾷ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾷ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾷ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾷ δ. ποτὶ δὲ ταὶ η ἁ ξ ἴσα τᾷ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾷ β. ἐσσοῦνται δὲ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασαῶν τᾶς τε α, καὶ τᾶν γενομέναν, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσια ἐντὶ τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν α, β,

α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς βι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς κγ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένοις. ὁμοίως δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἴσαν τᾷ α τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, διπλάσια ἐντὶ τῶν ἀπὸ τᾶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομεν, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐν ἑκατέρᾳ γραμμᾷ τᾶν ἴσαν τᾷ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν δ, λ ἴσα τῷ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς, ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσου πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τὰ περισσὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἐστὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α καὶ τᾷ ἴσα ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾷ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε θ τὰν α, καὶ ἁ α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας ἐν τᾷ α. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ α, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐντὶ τᾶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾷ τε β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε γ, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν λοιπῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ τὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλάσια τᾶς ἑπομένας.

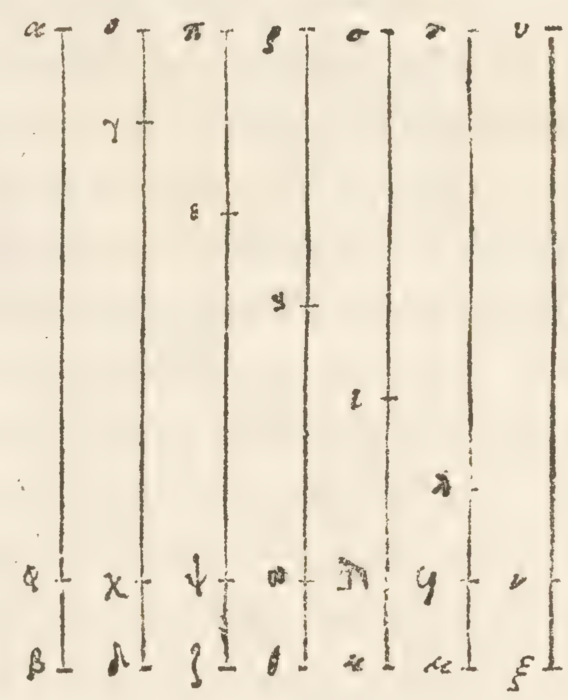


Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπεὶ δὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσια ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγεγραφέωντι, ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μείζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχί- ια

λαχί-

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνῳ, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν α β τᾶς γ δ, ἁ δὲ γ δ τᾶς ε ζ, ἁ δὲ ε ζ τᾶς η θ, ἁ δὲ η θ τᾶς ι κ, ἁ δὲ ι κ τᾶς λ μ, ἁ δὲ λ μ τᾶς ν ξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν ταῖ γ δ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γ ο. ποτὶ δὲ ταῖ ε ζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ ε π. ποτὶ δὲ ταῖ η θ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ η ρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν ταῦ γινομέναν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ν ξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ α β, ν ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ν υ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ αὐταῦ, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστης ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α β ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταῦ α β, φ β περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α φ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς ο δ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ο δ, δ χ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χ ο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς π ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ π ζ, ψ ζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψ π τετραγώνου, ἀπὸ ταῦ ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία. καὶ

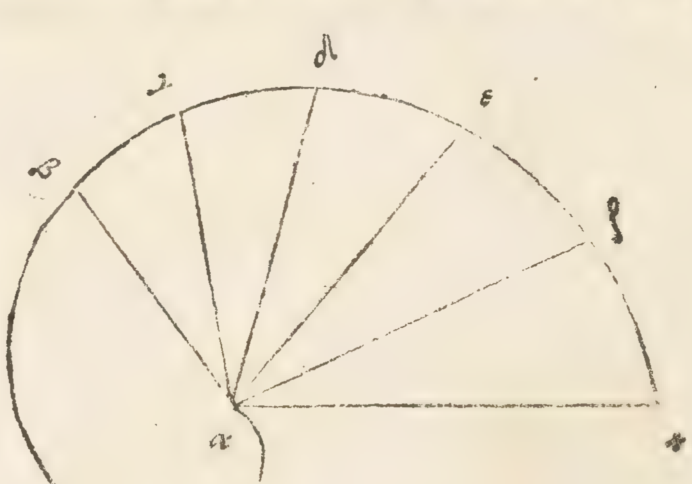


τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τῶν ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, ποτί τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταῦ α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φ α τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ, ν ξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. τὰ δὲ ἀπὸ ταῦ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ ταῦ β φ, χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. κοινὰ μὲν οὖν ἐντὶ ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ ἴσαν τᾷ ν ξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ν ξ, καὶ τὰς ἴσας ταῖς ο χ, π ψ, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμαῖς ταῖς μὲν γ ο, ε π, ρ η, ι σ, λ τ, υ ν, ἴσας εἶμεν, ταῦ δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονα ἐντὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ ἐστὶ κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ ταῦ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, μ ϛ, ν ξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ν ζ, καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τοῦ ὑπὸ τᾶς ν ξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. ἐντὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ χ ο, ψ π, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, τῶν ἀπὸ ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ.

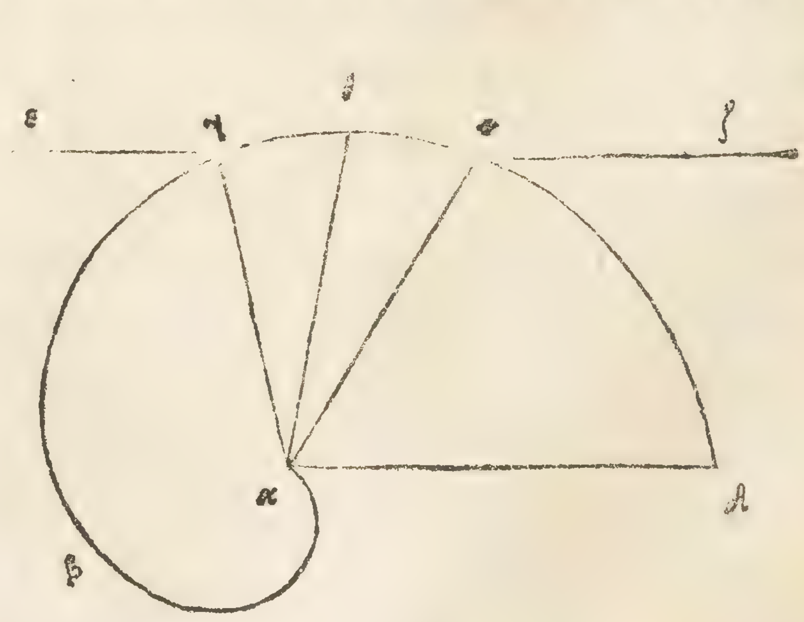
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφῇ ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει, τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, * ἰσοταχέως ὡς περιενεχθεῖσα. ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ' ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἂν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσει, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ᾇ περιφορὰ γίνηται προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα, ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς, κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι ὁποιαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σημεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γα τὰν αβ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ. ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ. καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ. καὶ αἱ λοιπαί. ιβ

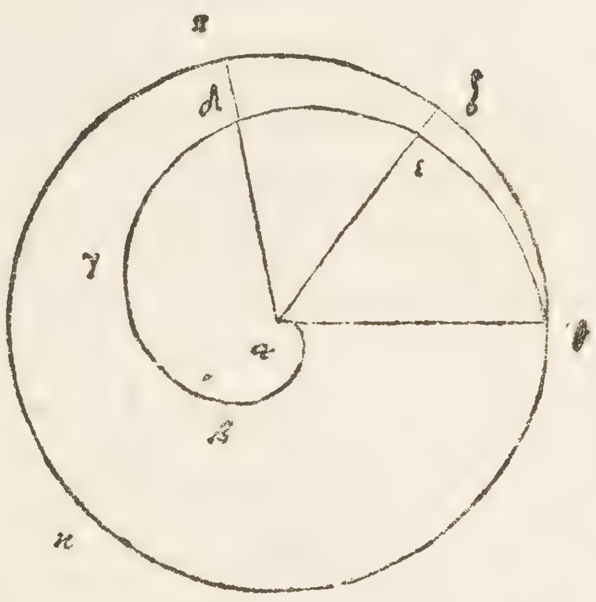


Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σημεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ αβγδ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ αδ εὐθεῖα * καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζε. φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σημεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ αγ, αη. καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν αη, αγ. καθ' ὃ δὲ σημεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ, τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε αη τᾶς αθ, καὶ ἁ αθ τᾶς αγ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχουσιν ὑπὸ τῶν ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ αη, αγ τᾶς αθ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς αθ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονες ἐντὶ ἢ διπλασίας. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ὃ συμπίπτει (τὸ) σημεῖον τᾷ γη εὐθείᾳ ἁ αθ, μεταξὺ τῶν θ, α ἐντὶ σημείων, τέμνει ἄρα ἁ εζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ γη σημείων ἐν- ιγ

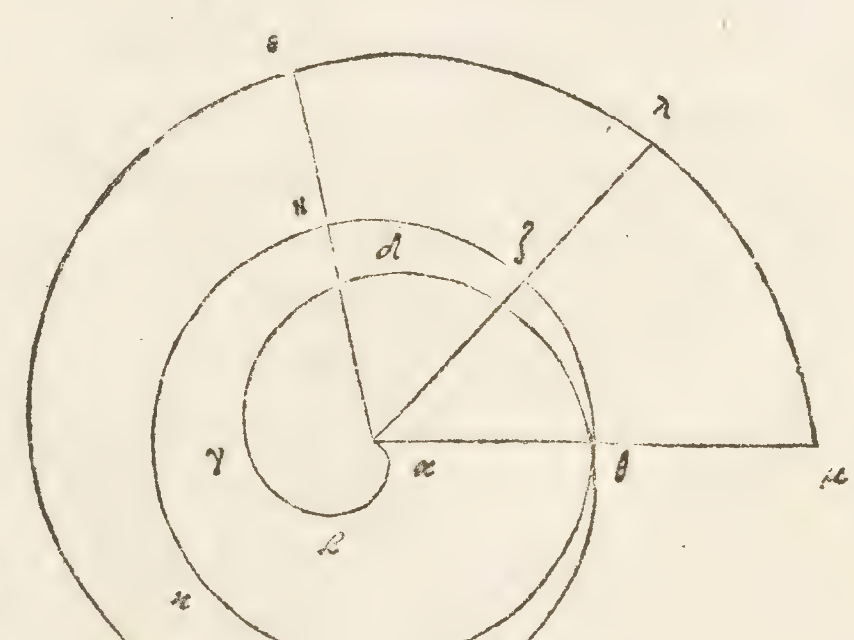


τὸς ἐστὶ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ε η τᾶς ἕλικος.

ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὴν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ ε θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θ κ η. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ α ε, α δ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς α θ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ θ κ η κύκλου περιφερείας ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν α θ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θ κ ζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν α ε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σημεῖον τὰν α δ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θ κ η περιφερειᾶν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

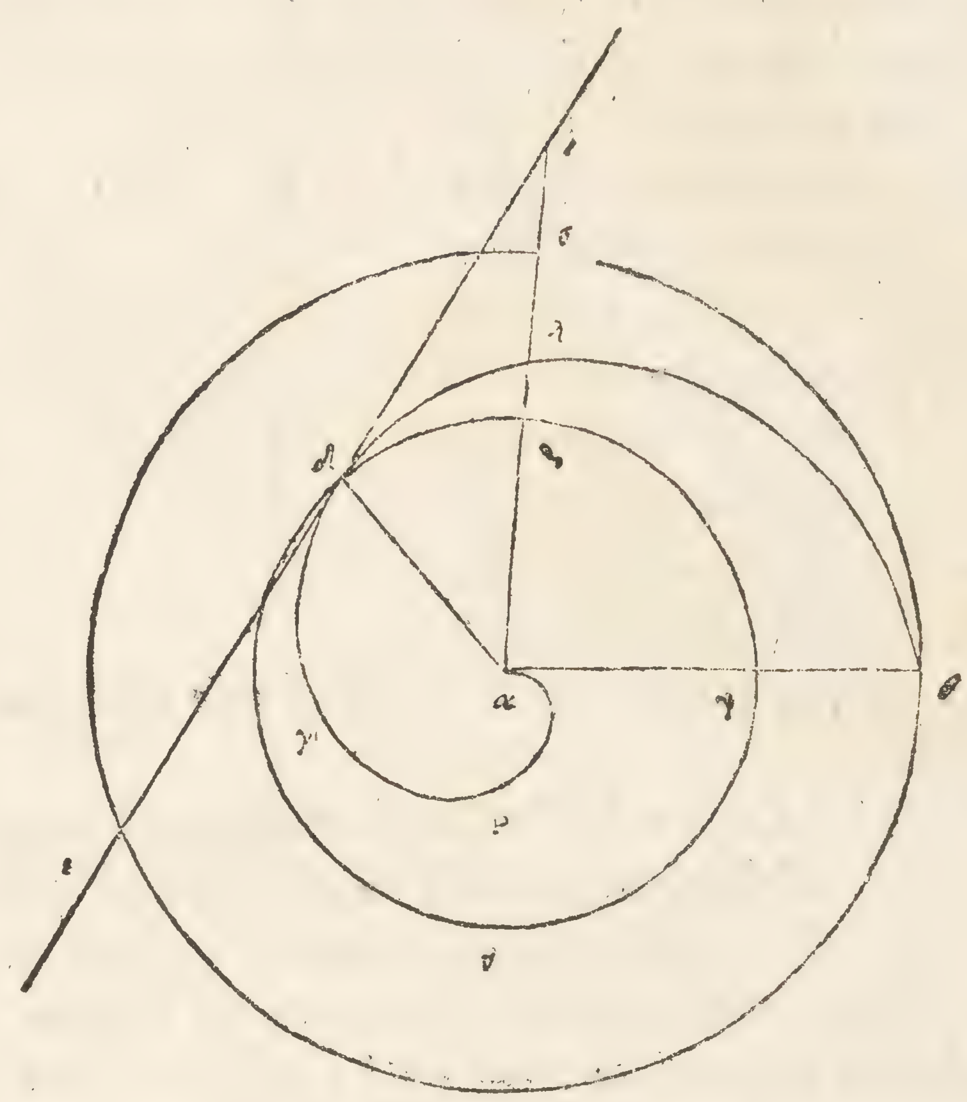


ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἁ μὲν α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ λ ε μ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι αἱ α ε, α λ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ α λ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θ κ η μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν α λ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ ζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν α ε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ἔτι τὰν θ κ η ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὑτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ α λ γραμμὰ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τὰς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



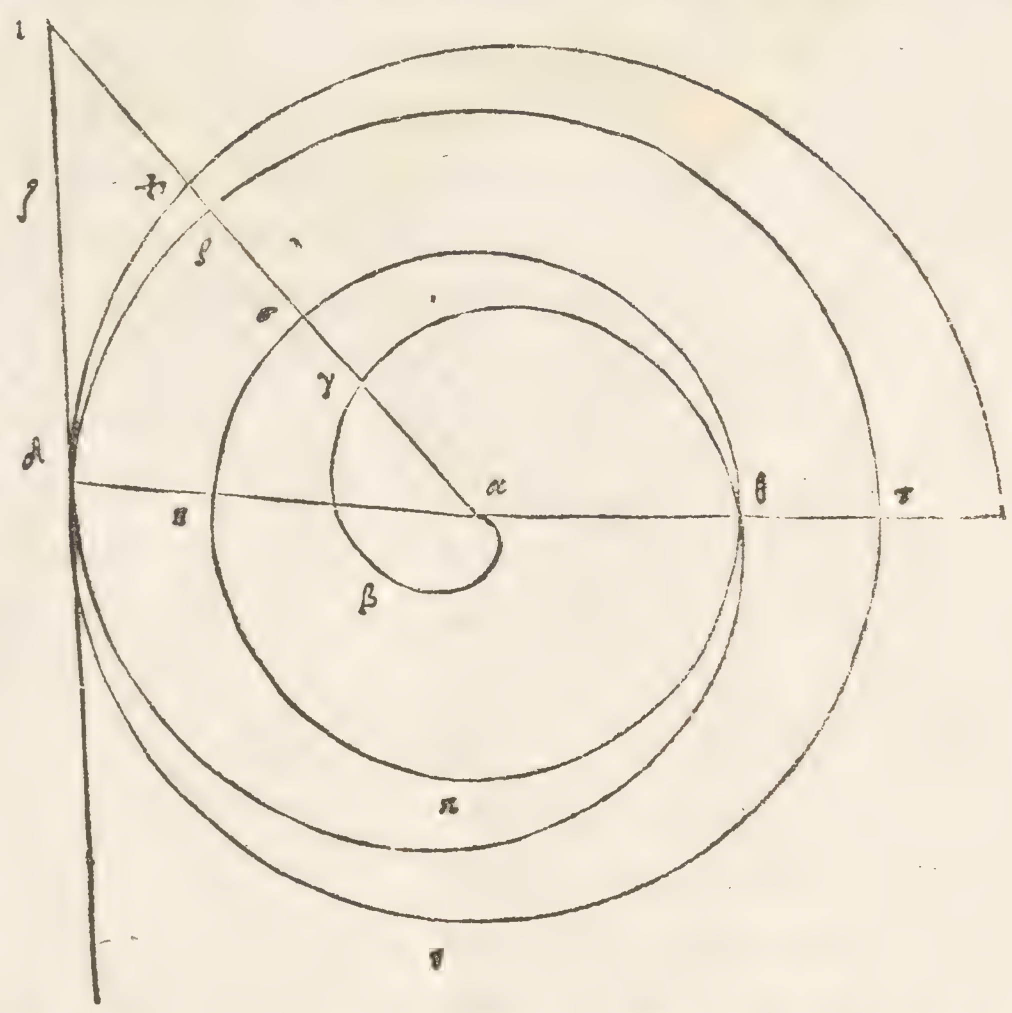
Εἴκα

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ αθ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θκη. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπιζεύχθω ἁ δα. δεικτέον ὅτι ἁ δζ ποτὶ τὰν αδ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δτν, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰς ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσας εὐθείας τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς αδ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αδζ οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὴ οὐκ ἔστι, δεικτέον οὖν. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθή. ἡ ἄρα εδζ ἐπιψαύει τοῦ δτν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ αι. τέμνει δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. τὰν δὲ τοῦ δντ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρι εὐθεῖα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδντ περιφέρεια ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ αλ εὐθεῖα ποτὶ τὰν αδ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ αι ποτὶ τὰν αρ, ἤπερ ἁ λα ποτὶ τὰν αδ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρα τᾷ αδ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αδζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ις

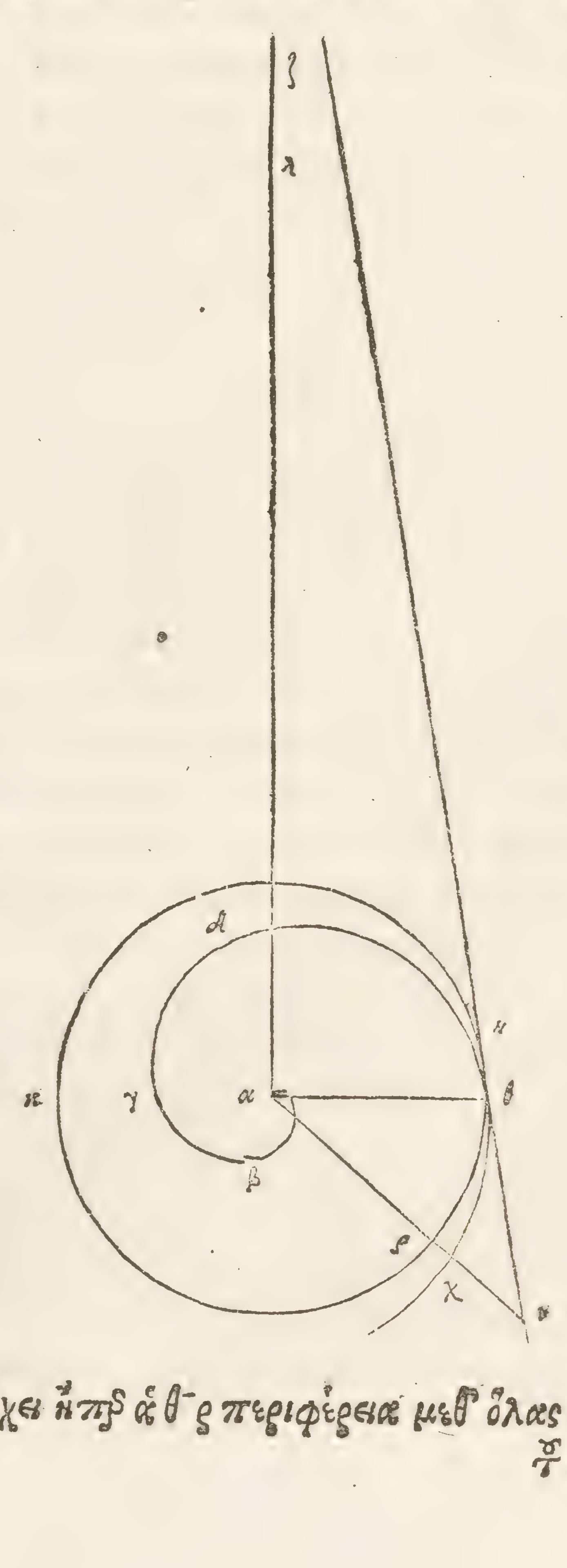


Καὶ τοίνυν εἴ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ εζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾶς γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρνδ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν αδζ, οὐκ ἔστιν ὀρθή, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθή. ἐπιψαύσει δὴ ἁ εζ, τοῦ ρνδ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ αι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρνδ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρι πρὸς ρα ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δρν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δυτ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδυτ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δυτ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ' ὃν λόγον ἔχει ἁ ρδυτ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ δυτρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δυτ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ δητρ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σηκθ περιφέρεια, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θσηκ, ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ιζ

θ σ η κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴση μὲν γὰρ ἡ ρ α τῇ α δ, μείζων δὲ ἡ ι α τῆς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὴ ὀξεῖα ἐστι. τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα κατὰ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς, ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

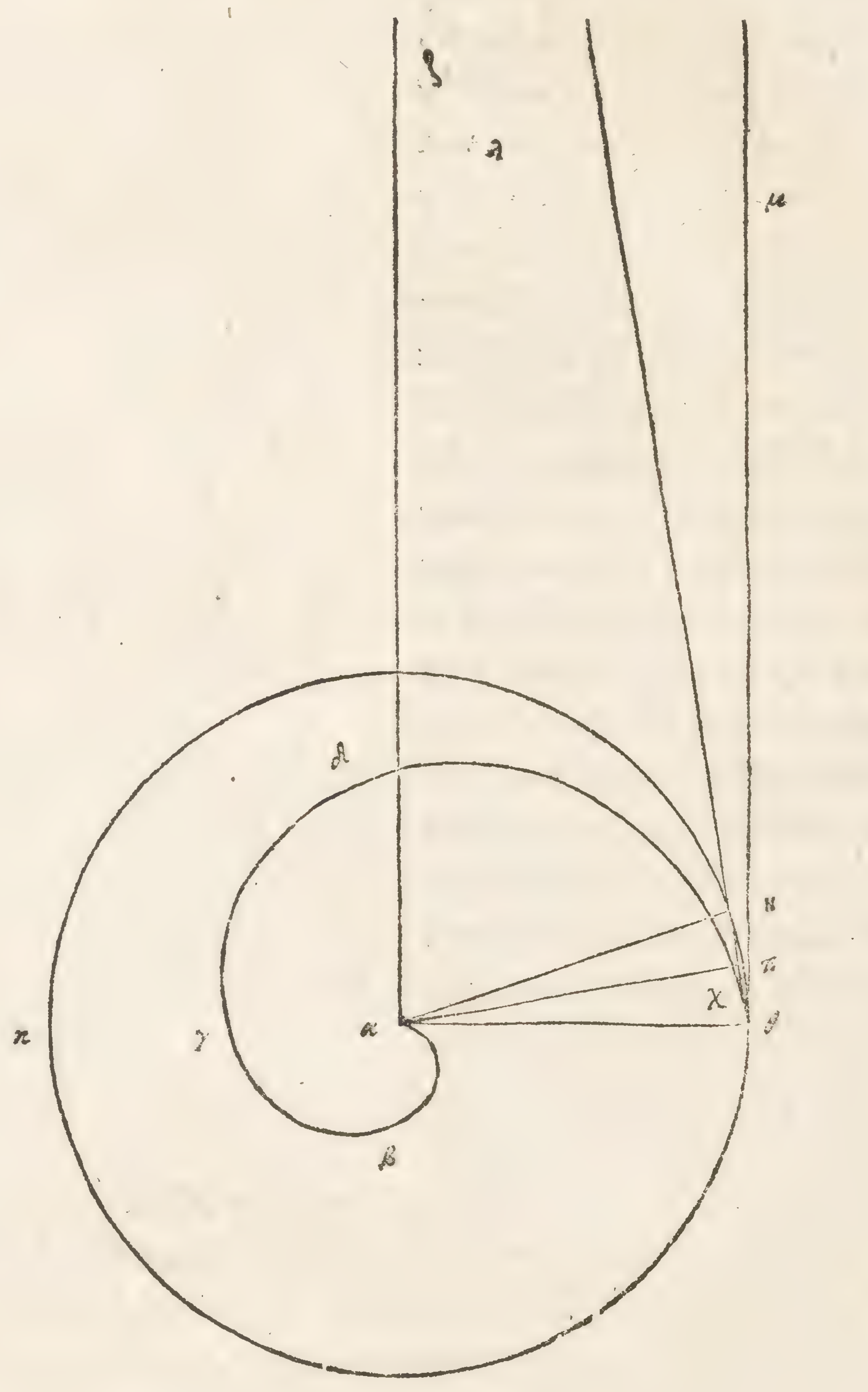


ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω πρὸς ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ κ η κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐστὶ δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ η. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστίν, ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἕξει οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



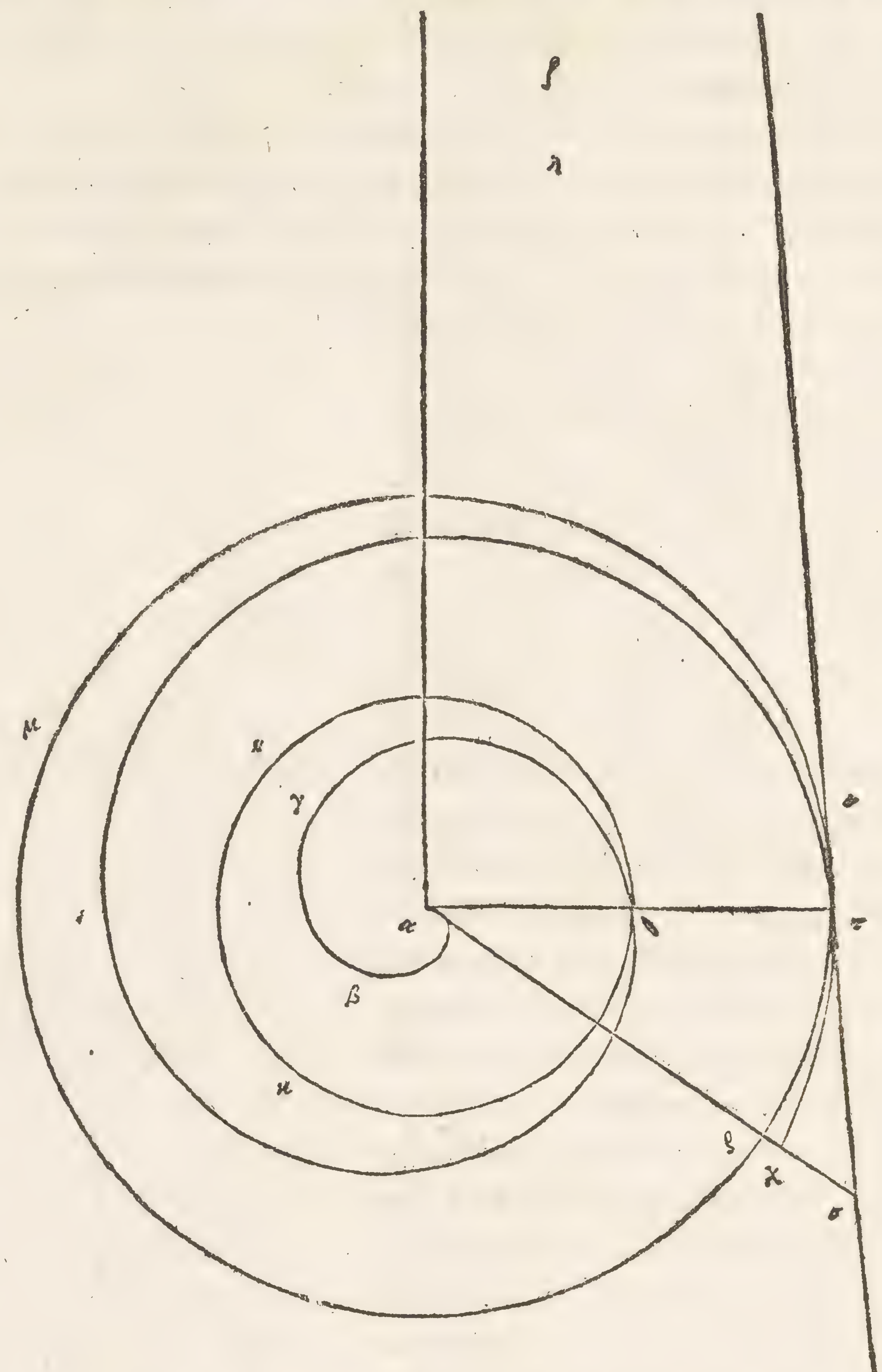
τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα ποτὶ τὸν αθ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ να ποτὶ τὰν αρ, ἤπερ ἁ χα ποτὶ τὰν αθ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ να μείζων ἐστὶ τᾶς αχ. ἁ δὲ αρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θα. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θηκ.

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν αλ, τᾶς μὲν αζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θμ παράλληλον τᾷ αζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θηκ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θη. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ αθ ποτὶ ταν αλ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ηθ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν απ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θπ, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θα ποτὶ τὰν αλ. τεμεῖ δὴ ἁ απ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ νρ πρὸς ρα, ὃν ἁ θπ πρὸς αλ. ἁ δὲ θπ ποτὶ τὰν αλ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θπ εὐθεία μείζων ἐστὶ τᾶς θρ περιφερείας, ἁ δὲ αλ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ νρ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρα ποτὶ τὰν αν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θηρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θηρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θα εὐθεῖα ποτὶ τὰν αχ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρα ποτὶ τὰν αν, ἢ ἁ αθ ποτὶ τὰν αχ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα.



Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύοι εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν αβγθ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θετ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θηκ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τμν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τζ. ἁ δὲ ζα ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τα. συμπεσεῖται δὲ τᾷ αὐτᾷ τᾷ τζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν ατζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζα εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τὶς εὐθεῖα, ἁ λα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τμν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἐστὶ δή τις κύκλος ὁ τμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα ιθ

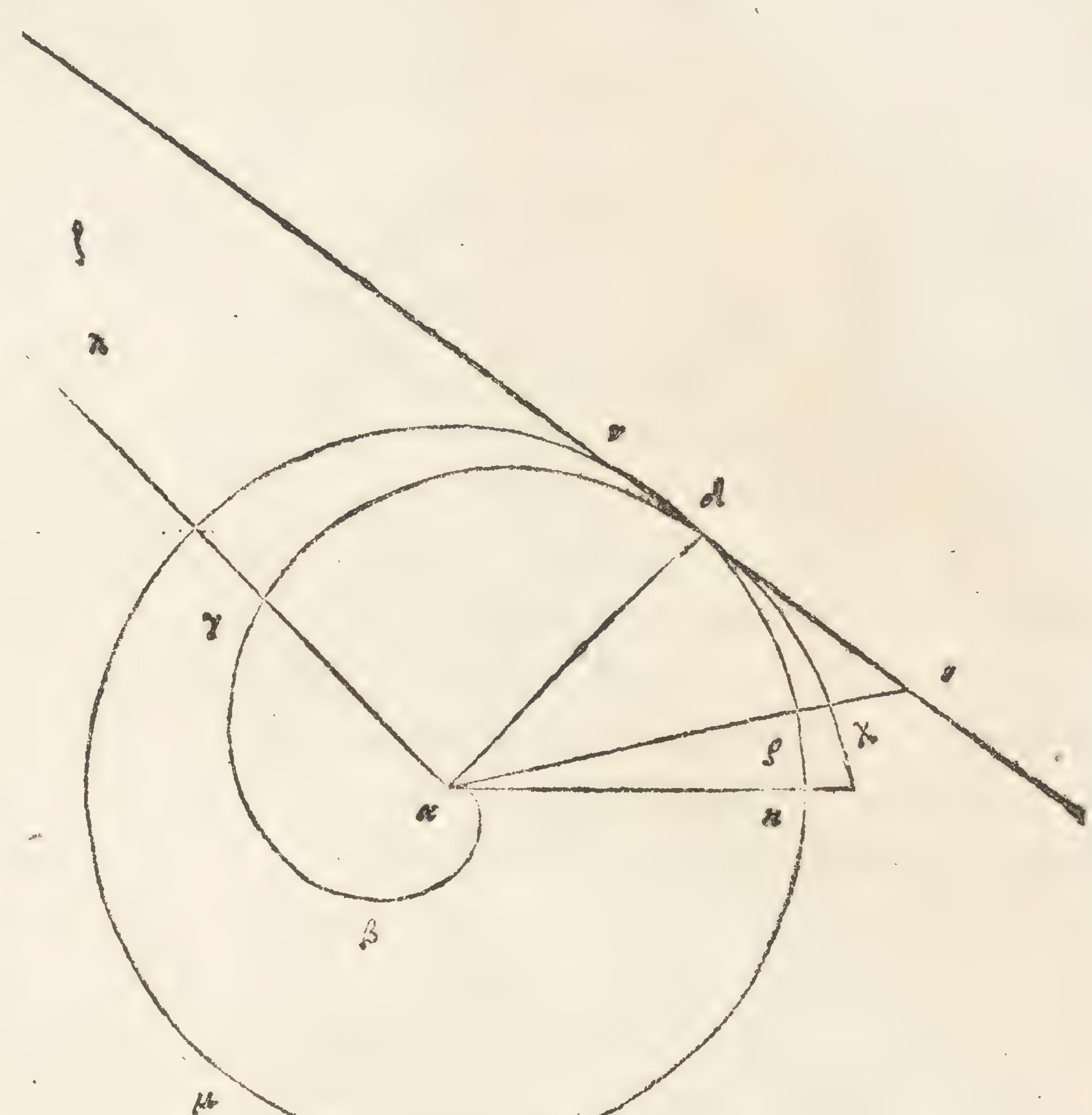
ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τ ν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τ α ποτὶ τὰν α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τ ν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν, δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν α σ, ποτὶ τὰν τ ν ἐκβεβλημέναν, ὥστε ταν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ταν ρ σ ποτὶ τὰν τ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τ α ποτὶ τὰν α λ. τέμνει δὴ ἁ α σ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρ σ ποτὶ τὰν τ α, ὃν ἁ τ ρ ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ τ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μ κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει α ρ σ ποτὶ τὰν α ρ. ἢ ἁ τ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σ α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τ ρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τ μ ν κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τ μ ν κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α ποτὶ τὰν α τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ α σ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ χ α ποτὶ τὰν τ α, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζ α εὐθεῖα τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾶ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύει τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.



κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾶ ἐπιζευχθείσα κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς, τᾶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεῖσα συμπεσεῖται αὐτᾶ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾶ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾶ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ἐν τᾶ πρώτα γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δ ε ζ κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ α δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α δ κύκλος γεγράφθω, ὁ δ μ ν. τεμνέτω δ' οὕτως τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζ α ποτὶ τὰν α δ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾶ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζ α εὐθεῖα τᾶ κ μ ν δ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

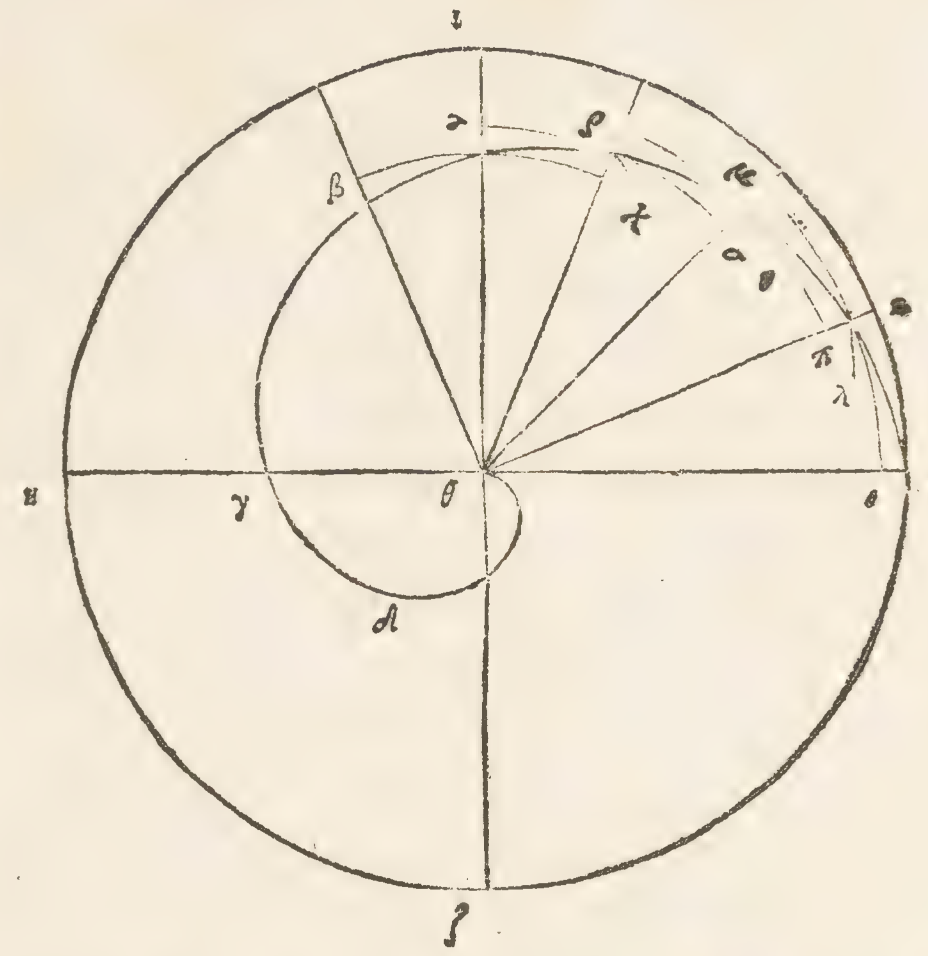
μὴ

μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατὸν, πρότερον μείζων. λελάφθω δέ τις ἁ λα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κμν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δα πρὸς αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμισεία τᾶς δν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν τὰν αε ποτὶ τὰν νδ ἐκβεβλημέναν. ὥστε τὰν ερ ποτὶ τὰν δρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν αλ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ερ ποτὶ τὰν αρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ αρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ μείζων τᾶς κμδ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει ἁ ερ εὐθεῖα πρὸς ρα, καὶ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ αε πρὸς αρ ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ κμρ περιφέρεια πρὸς κμδ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κμν πρὸς τὰν κμδ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα πρὸς αδ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εα πρὸς αρ, ἢ ἁ αχ πρὸς δα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς κμδ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση ἄρα. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέντι ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλα τᾶ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερεία, καὶ ἔτι τᾶ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας περιφορᾶ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος. τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾶ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



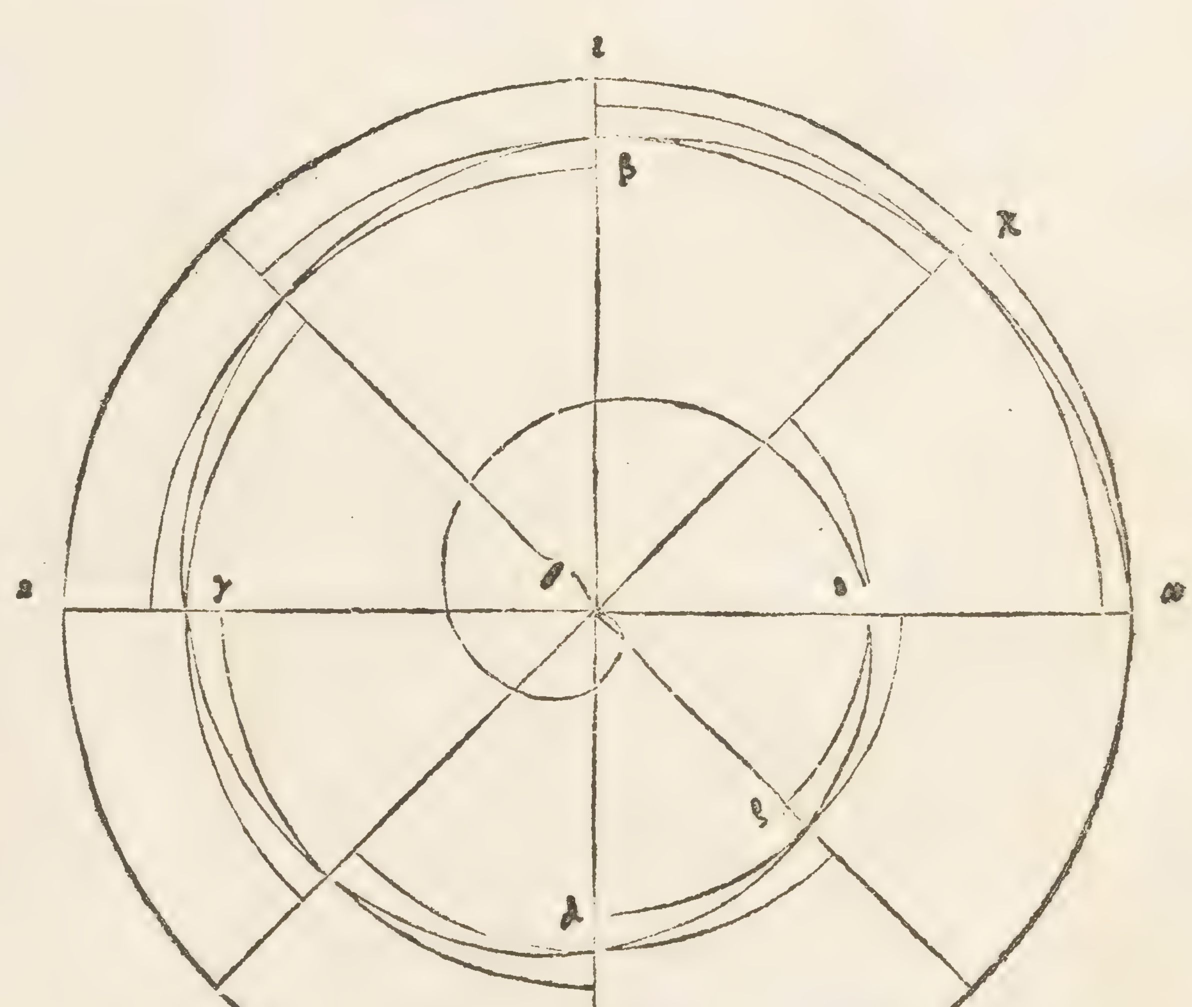
Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥς τε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θα. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζηια. αἱ δὲ αη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ἀεὶ δὴ τὰς ὀρθὰς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ αθκ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν αθ, θκ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν κατὰ τὰν ἕλικα ἄχθωσι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σημεῖον ἁ θκ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θλ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγομένα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾶ ἔσαι κἂν συμπέσῃ τᾶ θα κατὰ τὸ ο, α, ο μ. καὶ τᾶ μετὰ τὰν θκ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσα. πάλιν δὴ καὶ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σημεῖον ἁ θμ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θν κύκλος γεγράφθω. κα

γράφθω. ἔσαι καὶ συμπέσῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἳ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, διὰ τᾶν συμπέσῃ ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶ τε προαγομένα εὐθεία, καὶ τᾶ ἑπομένα, ἔσαι δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλο τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θυω τῷ θυρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.



Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ ΛΑΒΟΝΤΑ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζη κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ αη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν



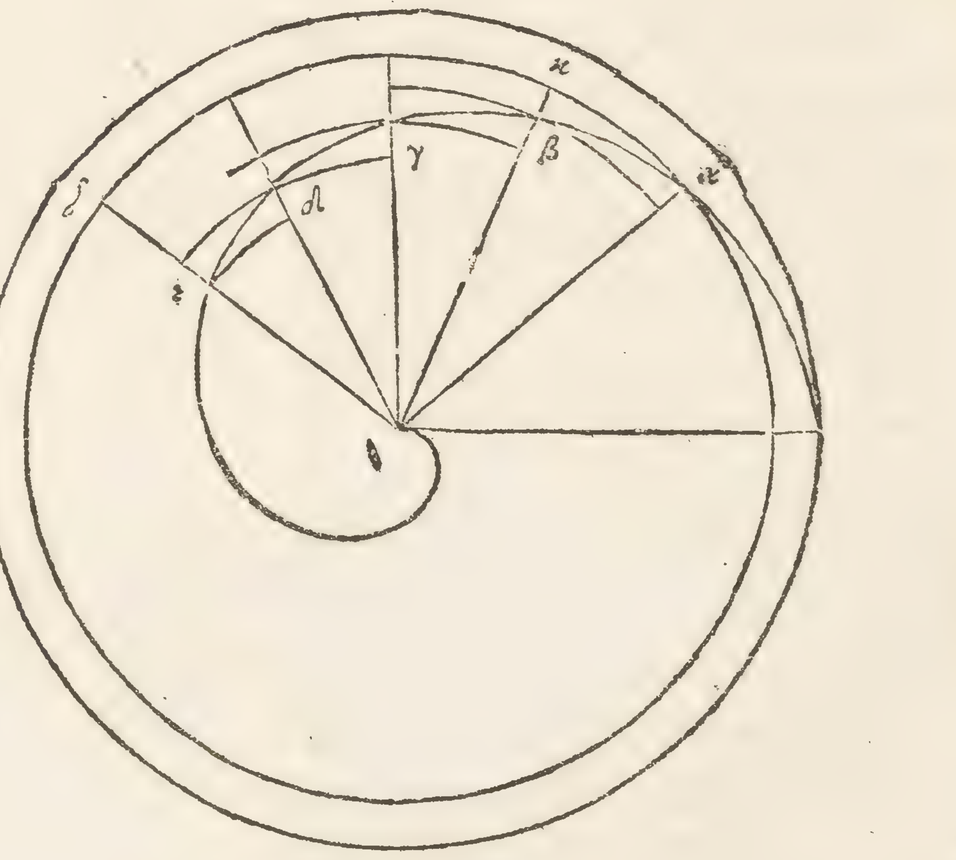
περιέχοντος, ἔσσεται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος, καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ ικα

τομεύς,

τμεύς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισᾶν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνιᾶν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν κ θ α καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τμεὺς ὁ θ κ α. μείζων γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἇ ὑπερέχει ὁ θ κ α τμεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

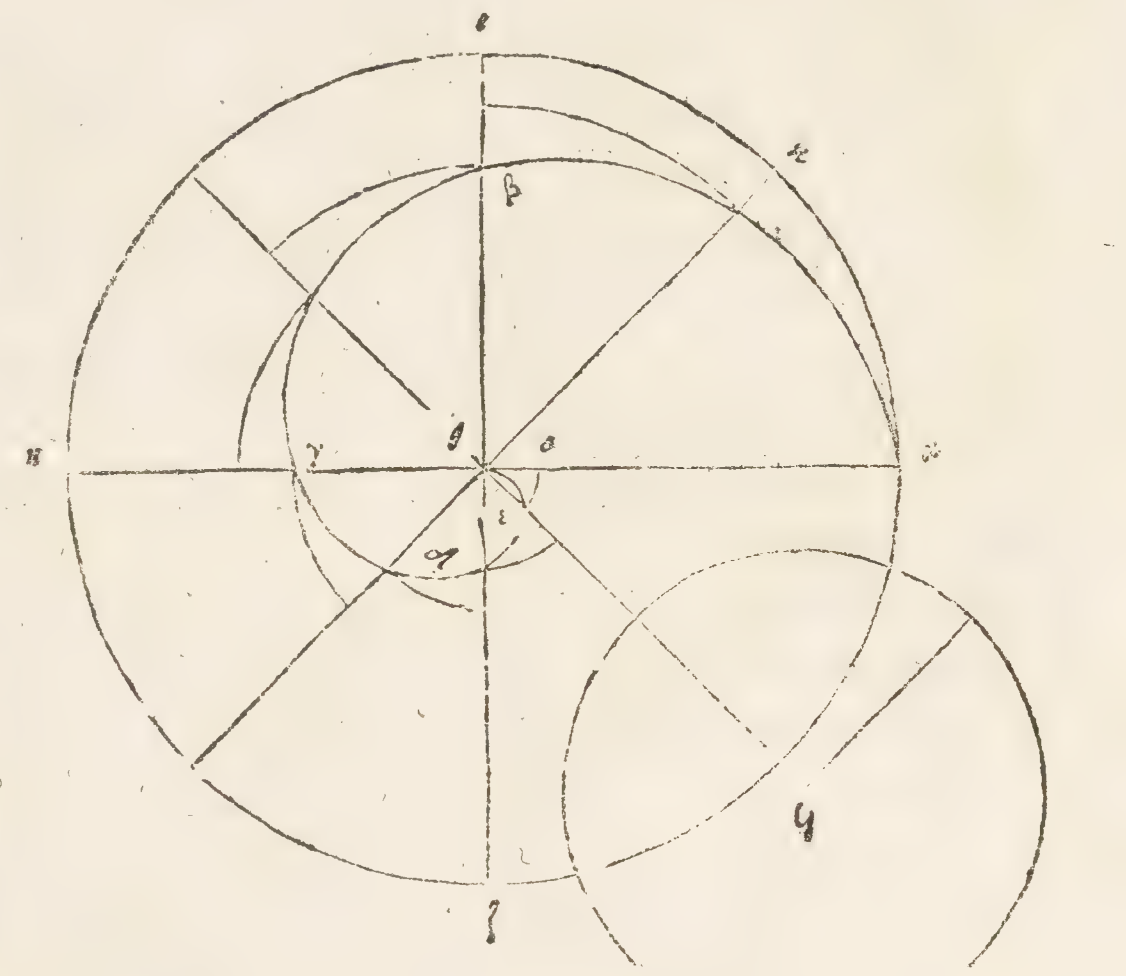
Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατόν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ΛΑβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομένων, δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ. θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α. καὶ συμπιπτέτω τᾷ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τῷ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τμεὺς ὁ θ α κ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων καθ᾽ ἃ τέμνουσι τὴν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ θ. ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένα καὶ τᾷ ἑπομένα. ἐσσεῖται δὴ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὡς τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κγ

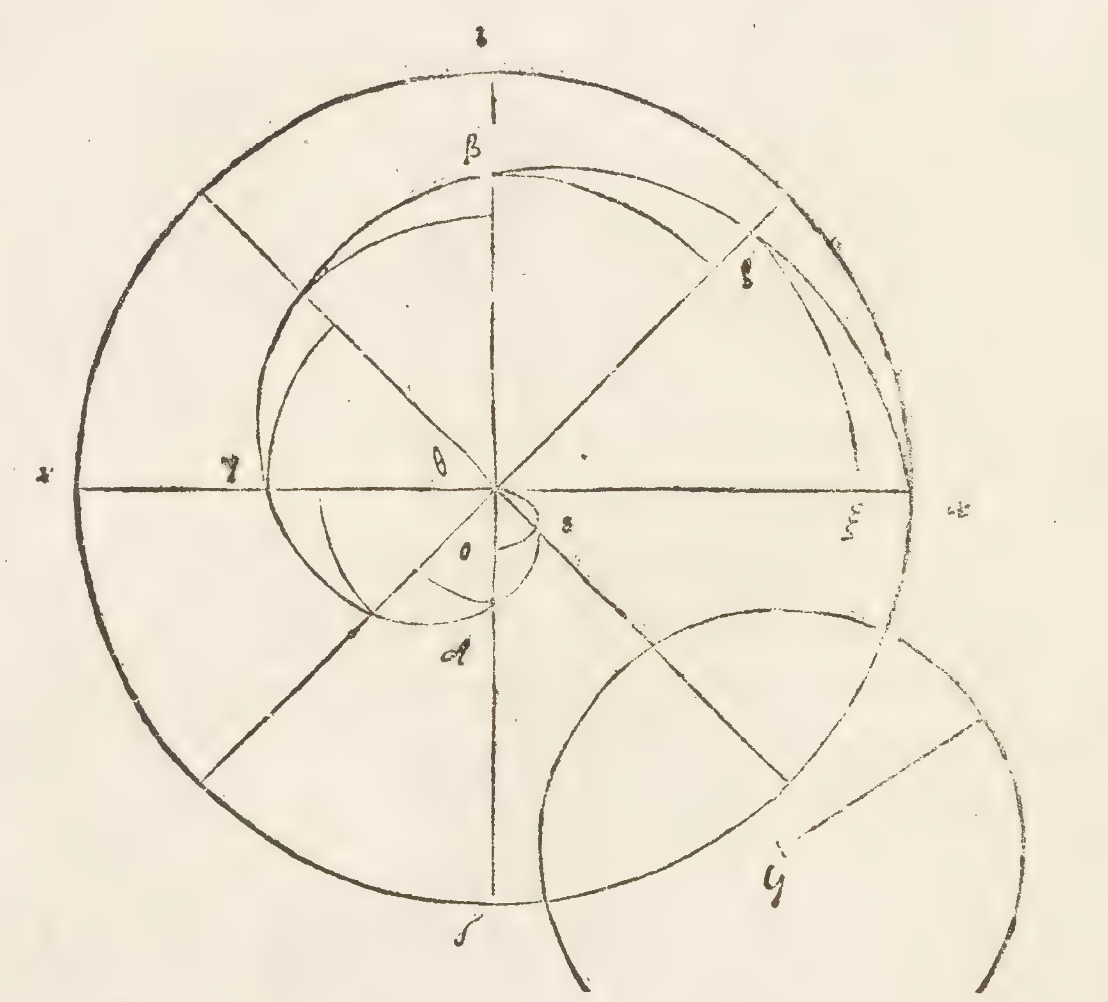


ΤΟ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ ς κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ἴσῳ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ἴσος κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἕως τᾶς ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μείζων μὲν ἁ θ α, ἐλάσσων δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα

ἴσα τᾶ ὑπεροχᾶ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφθαι ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ α ζ η ι κ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ, ἔλασσον τοῦ ϛ χωρίου.

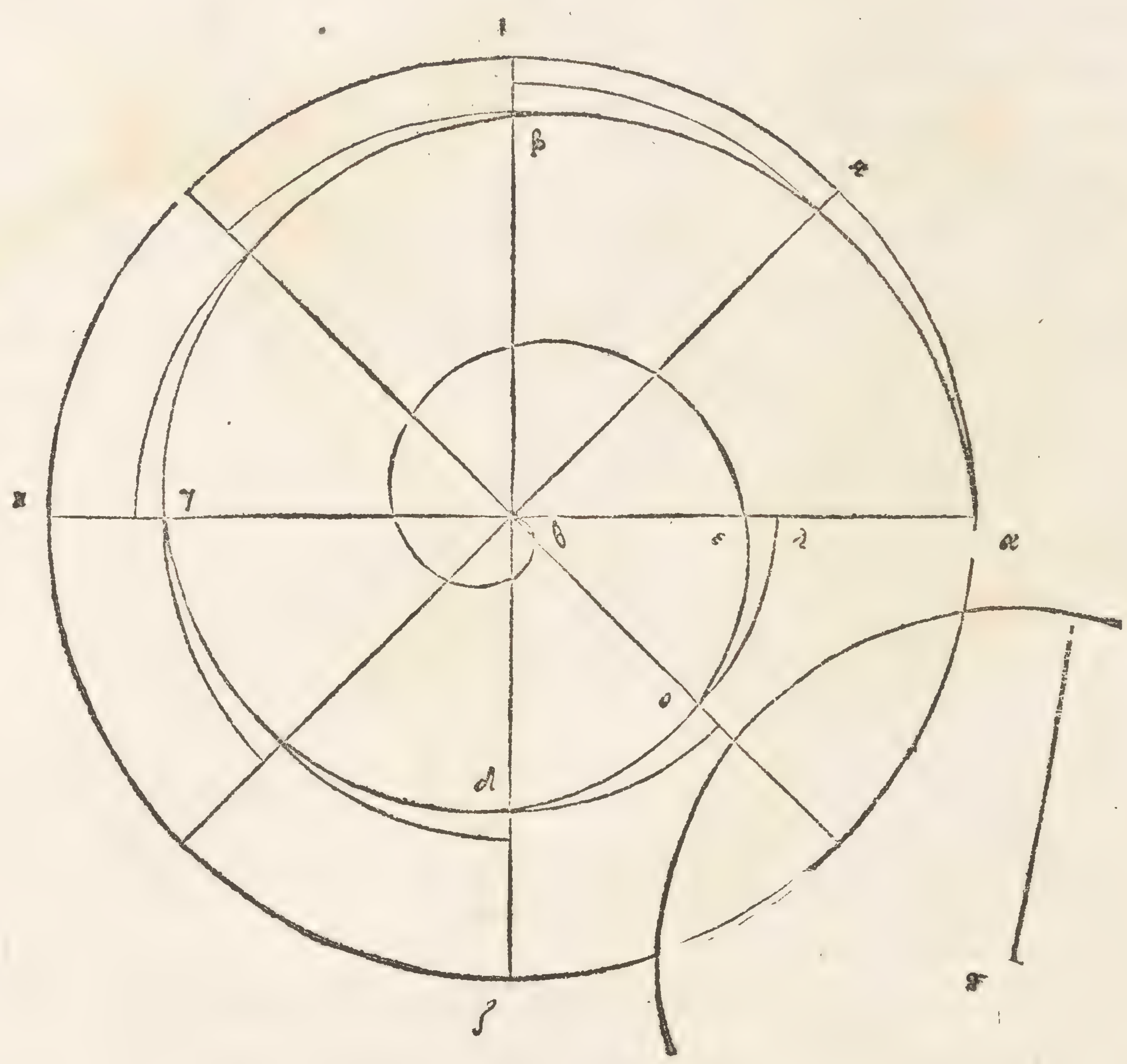


Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐστὶ δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς α β γ δ θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ ρ ξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ * ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ α ζ η ι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ, ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας, τοῦ ϛ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιληφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας.



Χωρίον

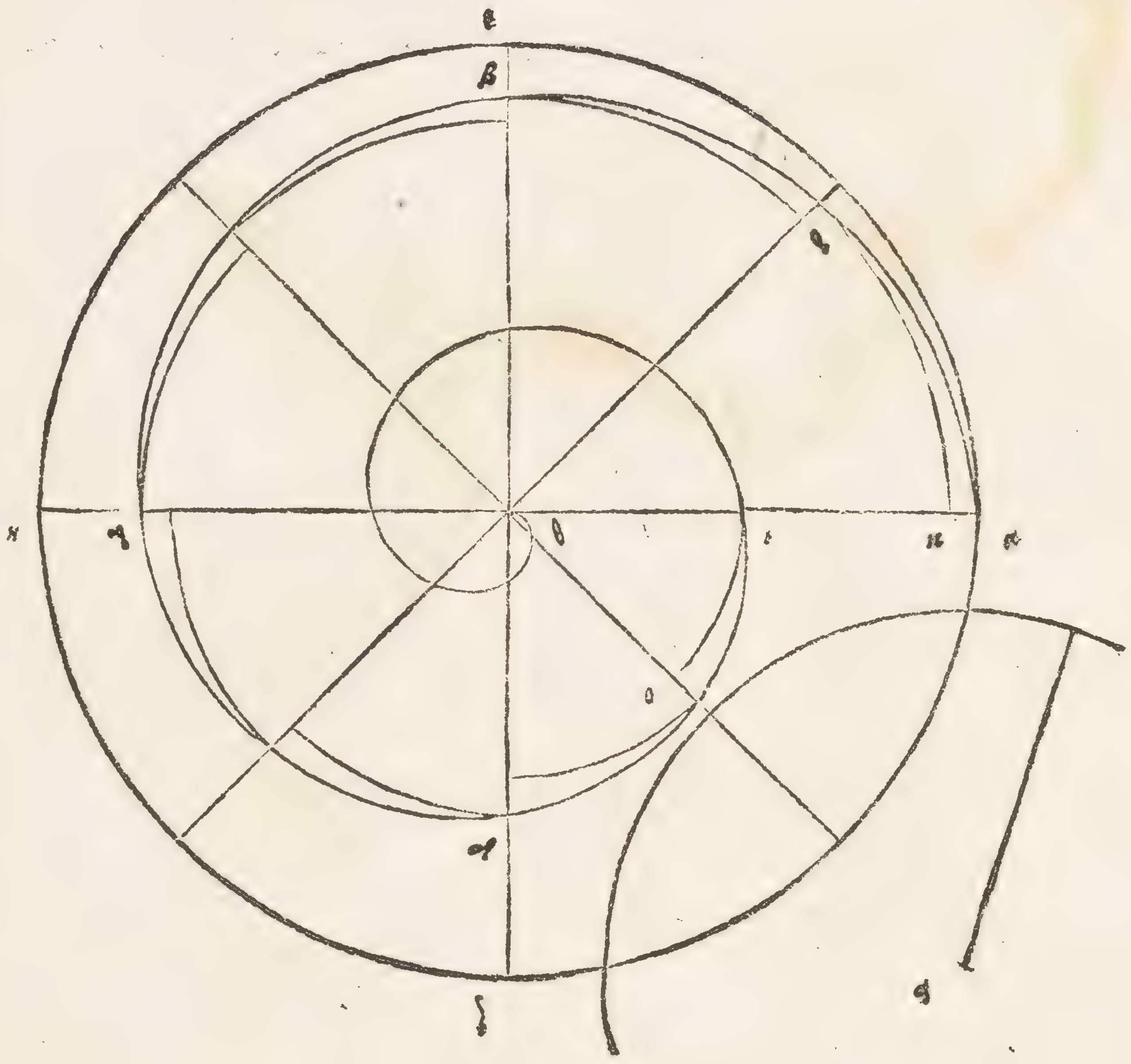
Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ι β. ὅς ἐστι ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θ ε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ α ε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ α ζ η ι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ α η, ι ζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας ποτὶ τὸν α ζ η ι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ι β. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυναμένα ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος πρὸς τὸν α η ζ ι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ι β. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α ζ η ι κύκλου



τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ο λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἐν τὰν ποτὶ ταῖς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσιν, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὰν τοῦ α ζ η ι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἑαυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ α ζ η κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσῶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ ποτὶ τὰ συναμφότερα. τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ α, α ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η ι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν

ὁ ς κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς αε εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας, μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ς κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θκρ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θεο. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τὸ θ, ἔστε τὰν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσοῦνται. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους αὐτῶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ ταῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομέες, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες, οἱ ἀπὸ ταῦν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ ταῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπό τε ταῦν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς εα τετραγώνου. ἔστι δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αζηι κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θα, θε. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου, τουτέστιν ὁ αζηι κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ς κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥστε ἴσος.

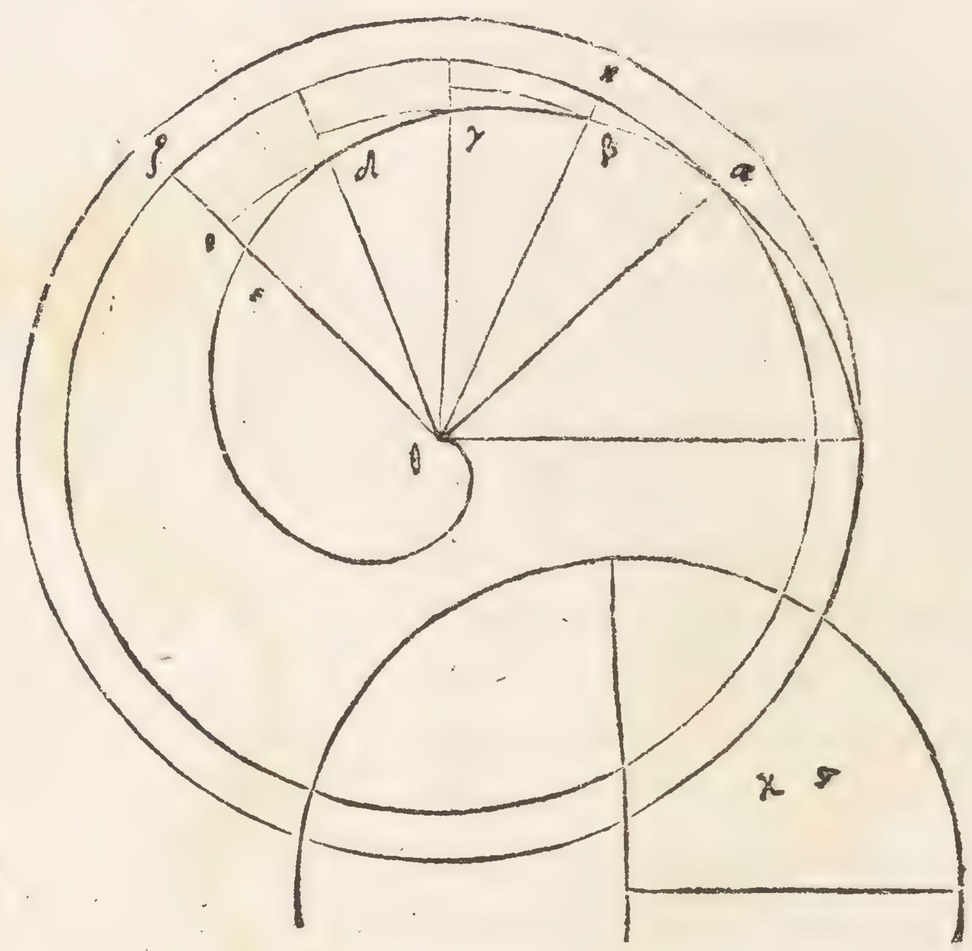


Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ποτὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὰ μὲν ἐλάσσονα τὰν περιφορὰν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει, ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

κς Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν ταῖν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμέναιν, ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ ταῖν ἀρχαῖν τᾶς ἕλικος ἀγμέναιν, τὰν δὲ περιφέρειαν ἅ ἐστι με-

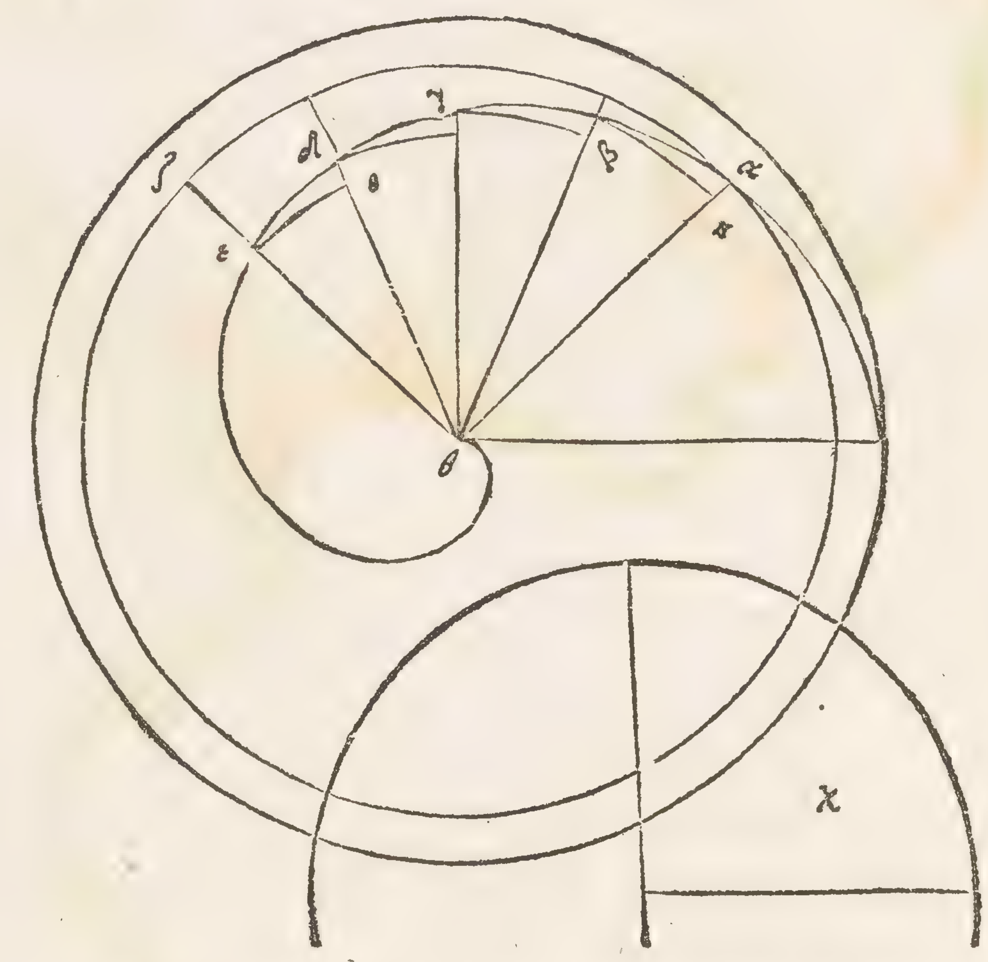
ταξὺ

ταξὺ ταῖν εἰρημέναιν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ ταὶ ἀρχαὶ τᾶς ἕλικος ἀγμέναιν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημένων εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ ταὶ ἀρχαὶ τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ ταῖν εὐθειᾶν ταῖν α θ, θ ε ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῖν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ς χ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ ταῖν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ πρὸς τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ ς χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος



τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ᾽ ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ ς τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν οὖν ἐστὶ περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ς χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ α η, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ χ ς τομέως. διήχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ ἔστε τὰν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τά τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐσται ὁ χ ς τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάττων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέζων μὲν ὁ θβκ, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ γεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θαζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θα, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι. καὶ ἀναγεγράφεται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομέες. ἀπὸ δὲ τᾶν μεγίσταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οὐκ ἀναγέγραπται. οἱ τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας, τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, θε. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ. ὥστε καὶ ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν χ τομέα. ὥστε μείζων ὁ χ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. ἴσα ἄρα.



κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον. καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἁ ποτικειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α. τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ς΄ μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου. τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ς΄ μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ δὲ



τὸ κλ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ

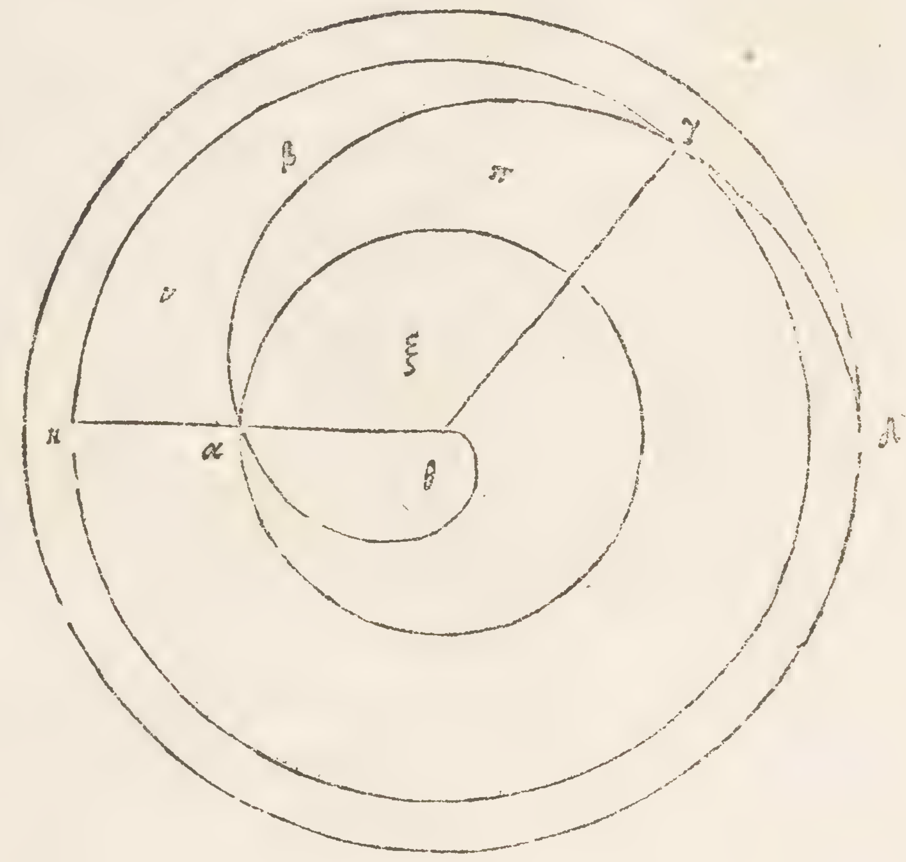
ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γάρ ἐστιν. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γθ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γθ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κλ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ βθ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥς τε καὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸ λκ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κλ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κλμνξ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν εθ, θδ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θδ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δθ, ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν θδ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ τετραγώνου. καὶ τὸ κλμνξ ἄρα, ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θε, θδ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὑπεροχὴ, τοῦ τε ὑπὸ εθ, θδ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς εδ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθδ, τοῦ ὑπὸ τῶν δθγ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δθ, γε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κλμ χωρίον, λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, βδ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γθ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γβ τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ, βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ, θβ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κλμν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. τὰ δὲ κλμν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν δθγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θγ, δβ. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γε, βδ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θγ ποτὶ τὰν θβ. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὸν αθ. αἱ δὲ εθ, δθ, γθ, βθ, αθ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέντι, μὴ τὰ πέρατα, κη
ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμοριᾶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥς τε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τοῖς θα, θγ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θα, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ηα, τὸ γὰρ χωρίον τὸ νπ ποτὶ τὸν ηγθ τομέα, δέ-

δεικται

δείκνυται τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν ηθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αη τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ηθ τετράγωνον, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν θαη μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθη, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θη, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θη τετράγωνον. ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θη ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα. ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θη, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸ π λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν ηθα. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν ηα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ νπ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θαη, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν ηθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ηθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν ηαθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, ηα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν θα, ηα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, ηα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, ηα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ηα τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφοτέραν, τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς ηα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅ τε θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς ηα.



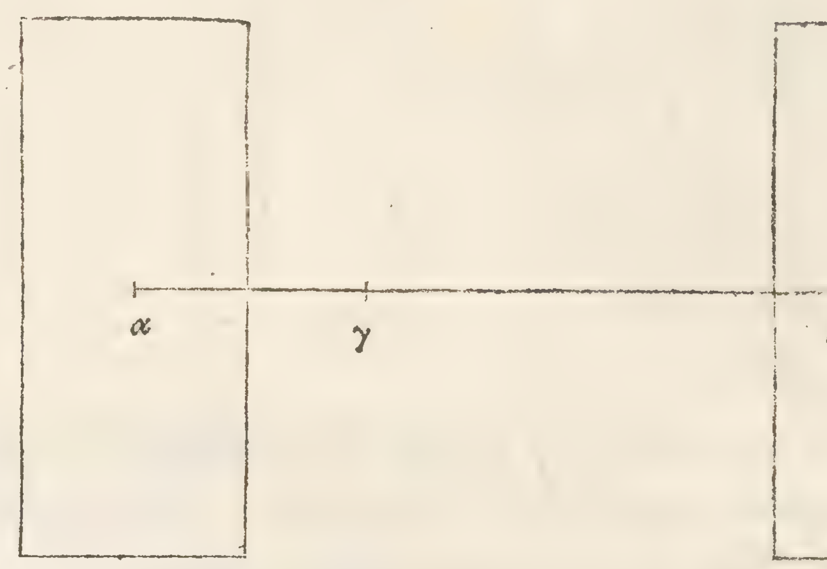
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῆ μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῆ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη, τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα. καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιῶντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει, παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐντί. εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα, ἴσα ἐντὶ τὰ ἀπὸ

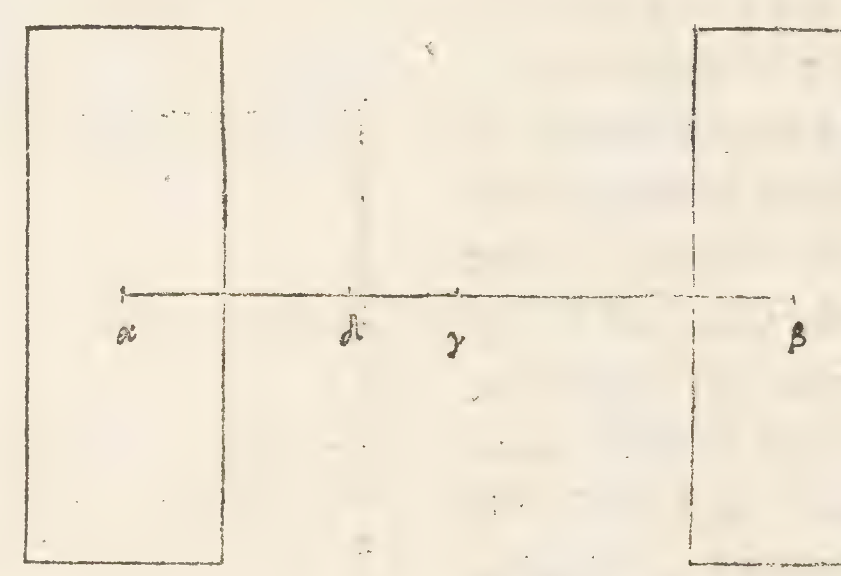
τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βαρέα, οὐκ ἰσορροποῦντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθείσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτιτεθείη.

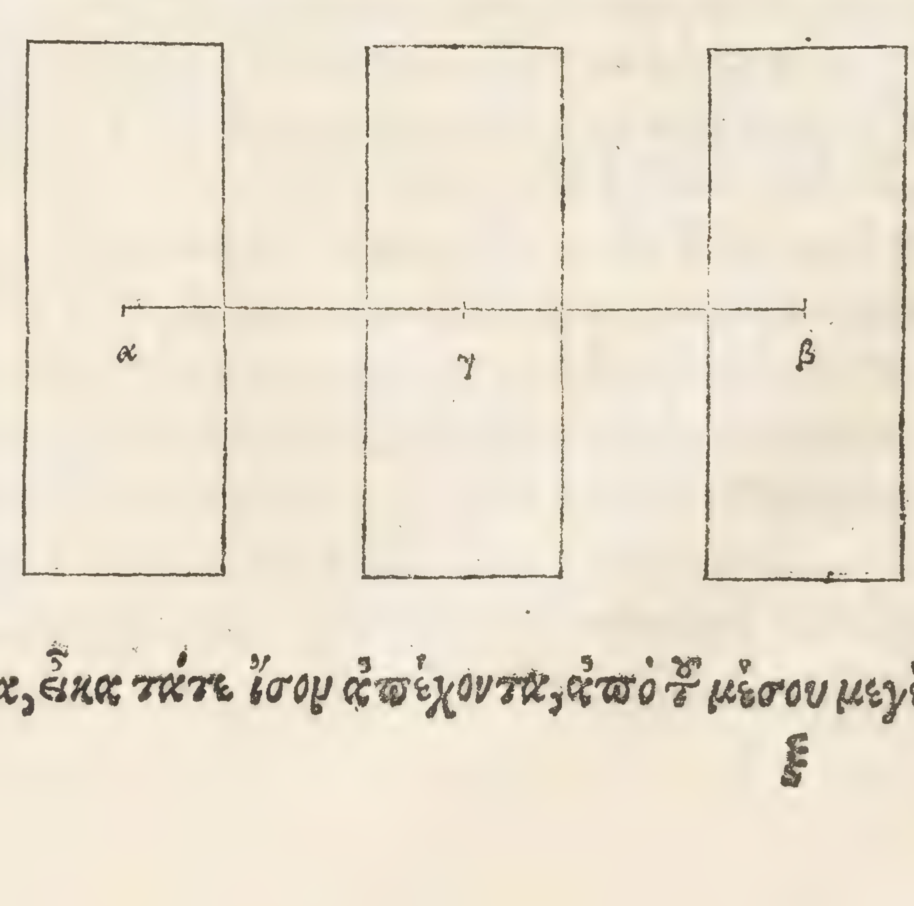
Τὰ ἄνισα βαρέα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ἔστω ἄνισα βαρέα τὰ α, β. καὶ ἔστω τὸ α, καὶ ἰσορροπέοντα ἀπὸ τῶν α γ, γ β μακέων. δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. μὴ γίνεται. ἔστω. ἀφαιρεθείσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β. ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β. οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γ α τᾶς γ β. ἰσορροπησοῦντι γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γ α τᾶς γ β, ῥέπει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταὐτά, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα, ἄνισα ἐντί, καὶ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. α



Εἴκα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔστω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ α β τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς α β, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσορροπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσορροποῦντι ἀπὸ τῶν α δ, δ β μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι. δῆλον οὖν τὸ ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος. β

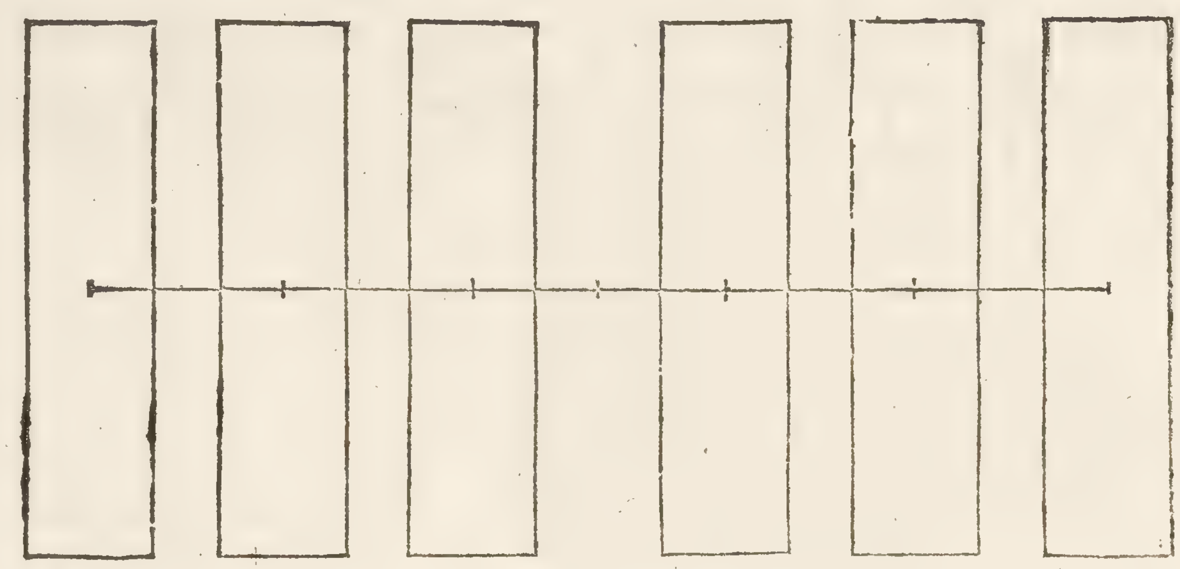


Εἴκα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔστω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σημεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα. ἔστω δὲ τά τε α, β, γ ἴσα. καὶ αἱ α γ, γ β ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ α γ, γ β. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σημεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. γ

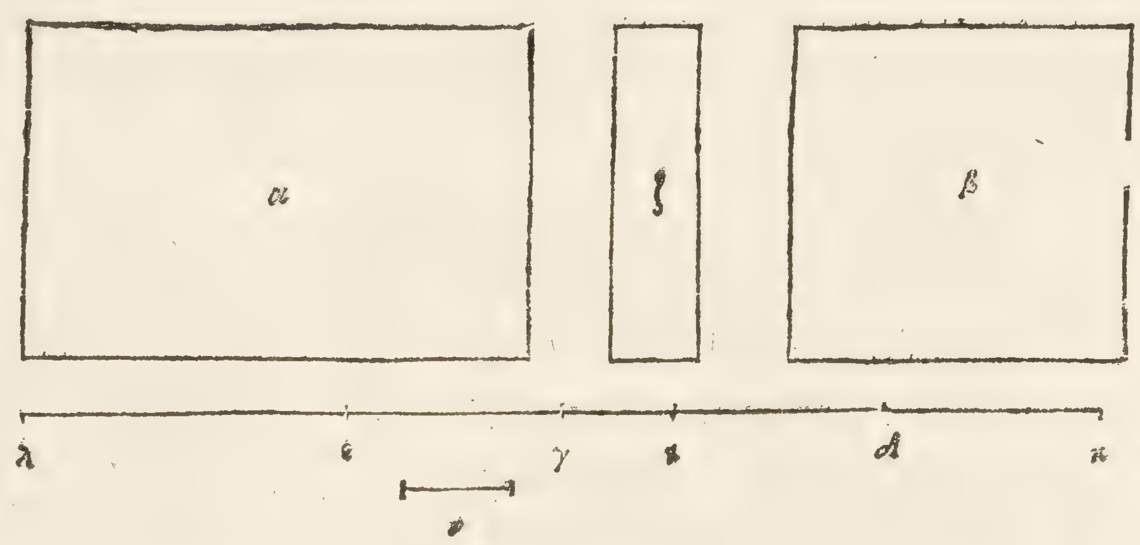


Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁπόσων καὶ τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα, ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγέθεων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. εἴκα καὶ ἄρτια ἐῶντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἐῶντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγέθεων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγέθεων, ὡς ὑπογέγραπται.

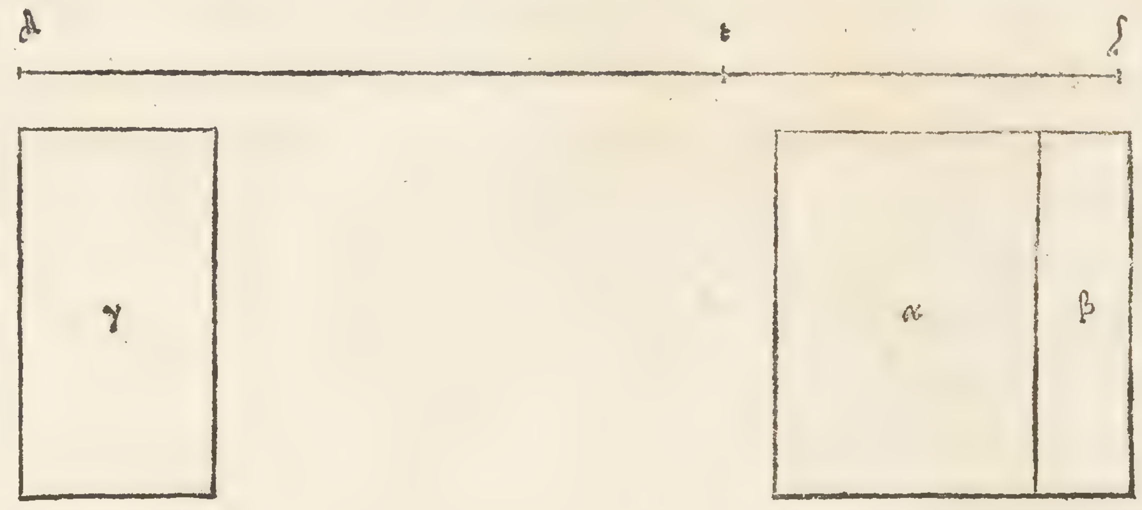


δ Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέωντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β. ὧν κέντρα τὰ α, β. καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ε δ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ γ μᾶκος πρὸς τὸ γ ε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δ γ ποτὶ τὸ γ ε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γ δ ἄρα τῷ γ ε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ, ὥστε τῶν ε γ, γ δ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ε γ ἴσα ἑκατέρα τῶν δ η, δ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἁ ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δ η τᾷ γ ε, ἴσα καὶ ἁ δ γ τᾷ ε η, ὥστε καὶ ἁ λ ε ἴσα τᾷ ε η. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λ η τᾶς δ γ, ἁ δὲ η κ τᾶς γ ε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκάτερον τῶν λ η, η κ μετρεῖ. ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δ γ πρὸς γ ε. ὡς δὲ ἁ δ γ πρὸς γ ε, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ λ η τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ α τοῦ ζ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ λ η πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ κ η πρὸς λ η, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἁ κ η πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ κ η τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λ η εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λ η τμήματα ἰσομεγέθη τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμήμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λ η ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α. καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶναι τὰν λ ε τᾷ η ε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἂν εἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κ η τμημάτων, ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἔσται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διεστάμενα συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἁ μὲν λ ε τᾷ γ δ, ἁ δὲ ε γ τᾷ δ κ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λ γ ἴσα τᾷ γ κ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.

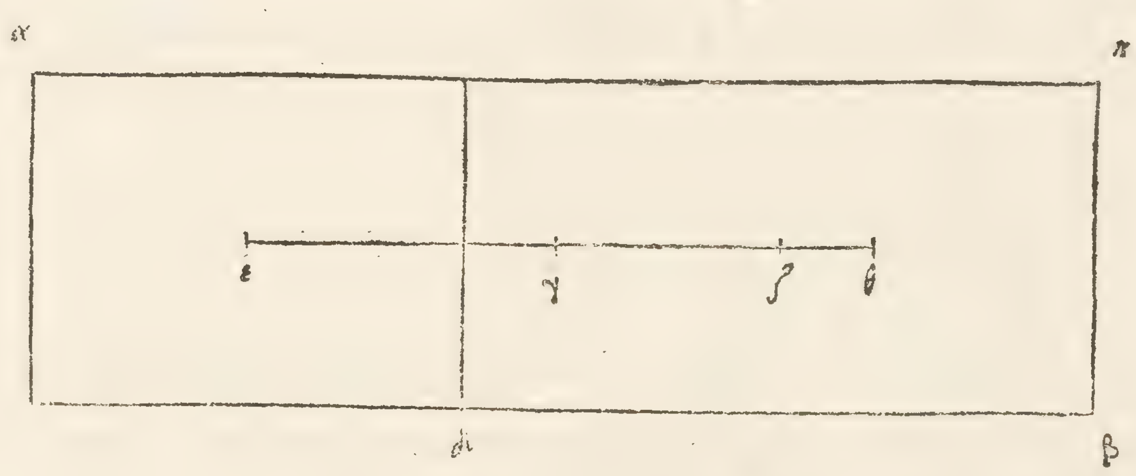


Καὶ

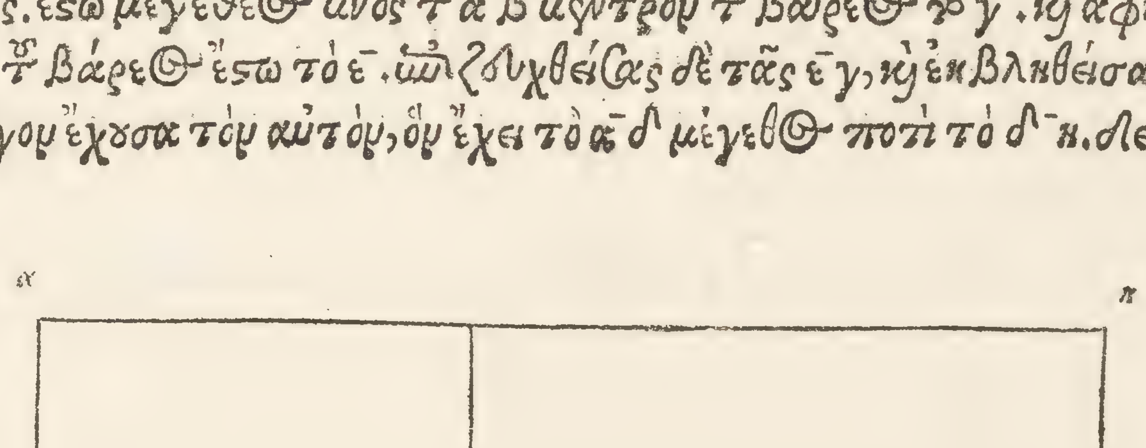
Καὶ τοίνυν εἴκα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ αβ, γ, μάκεα, τὰ δὲ δε, εζ. ἐχέτω δὲ τὸ αβ ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ εδ ποτὶ τὸ εζ μᾶκος. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. εἰ γὰρ μή, ἰσορροπήσει τὸ αβ τεθὲν ἐπὶ τῷ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζον ἐστὶ τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζον ἐστὶ τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν. ὥστε τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τὸ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρα ἐστὶ τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δε πρὸς εζ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δε, εζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ' εἰ τὸ γ μεῖζον ἐστὶν, ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τὸ α. ε



Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων, τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεος τινὸς τοῦ αβ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ τὸ αδ, οὗτινος κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς εγ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γζ ποτὶ τὰν γε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ αδ μέγεθος ποτὶ τὸ δη. δεικτέον ὅτι τοῦ δη μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ζ σημεῖον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αδ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε, τοῦ δὲ δη τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρου τῶν αδ, δη μεγέθεων, κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εθ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἔσται τὸ γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τὰ εἰρημένα. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τοῦ αδ, δη συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ αβ. ἐστὶ δέ. ὑπόκειται γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρους τοῦ δη μεγέθους. ϛ

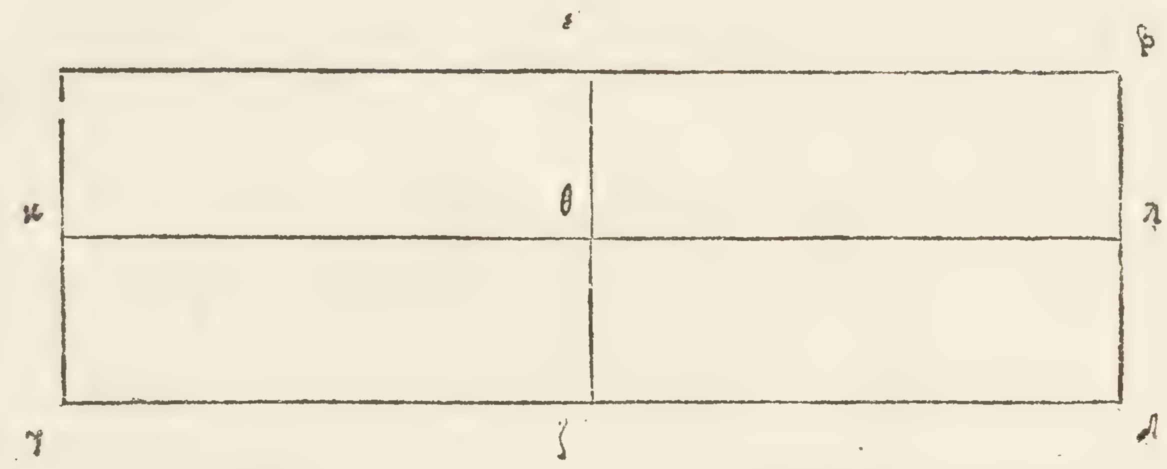


Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας, τὰς κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευράς. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν αβ, γδ ἁ εζ. φημὶ δὴ ὅτι τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αβ ἁ θι. τᾶς δὲ δὴ εβ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖται ποιὰ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ιθ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν αε, εβ εἰς τὰς τᾷ εκ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν εζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ζ

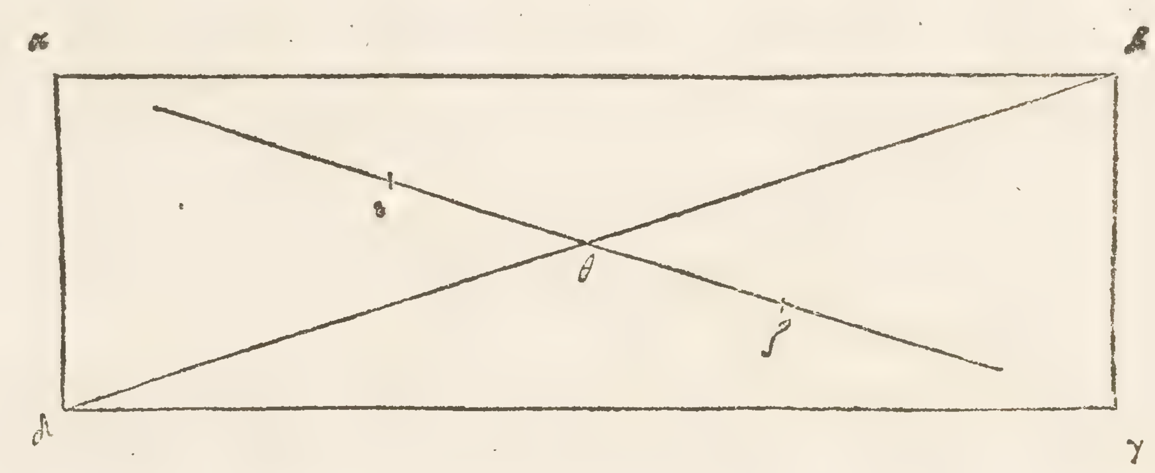


ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ κζ ἐφαρμοζόμενον ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτοῦ ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεα τινὰ παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς εζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου.

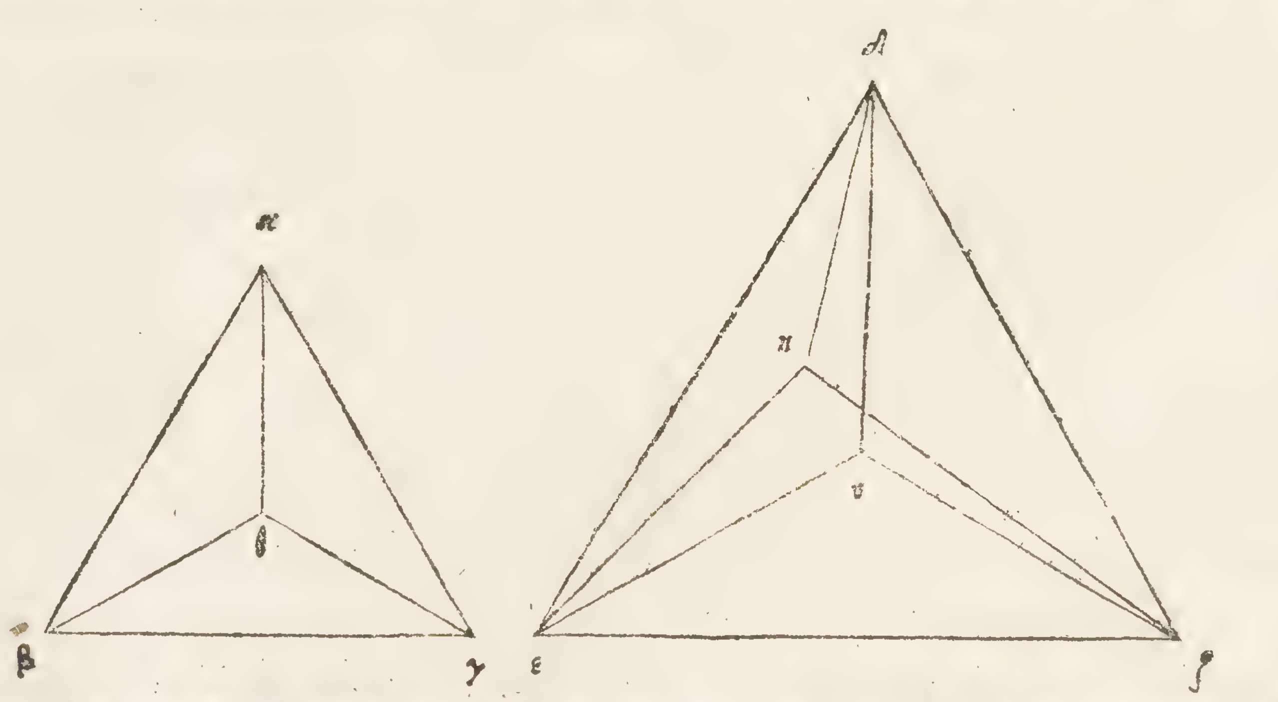
η Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ εζ τέμνουσα τὰς αβ, γδ. ἁ δὲ κλ τὰς αγ, βδ. ἐστὶ δὴ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εζ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κλ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου πίπτοντι. ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δβ. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλήλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ αβδ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμήσθω δίχα ἁ δβ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ εθ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπειλήφθω ἁ ζθ ἴσα τᾷ θε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ αβδ τριγώνου ἐπὶ τὸ βδγ τρίγωνον, καὶ τεθεμένας τᾶς αβ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δγ, τᾶς δὲ αδ ἐπὶ τὰν βγ. ἐφαρμόζει καὶ ἁ θε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζθ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αβδ τριγωνίου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δβγ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς εζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.



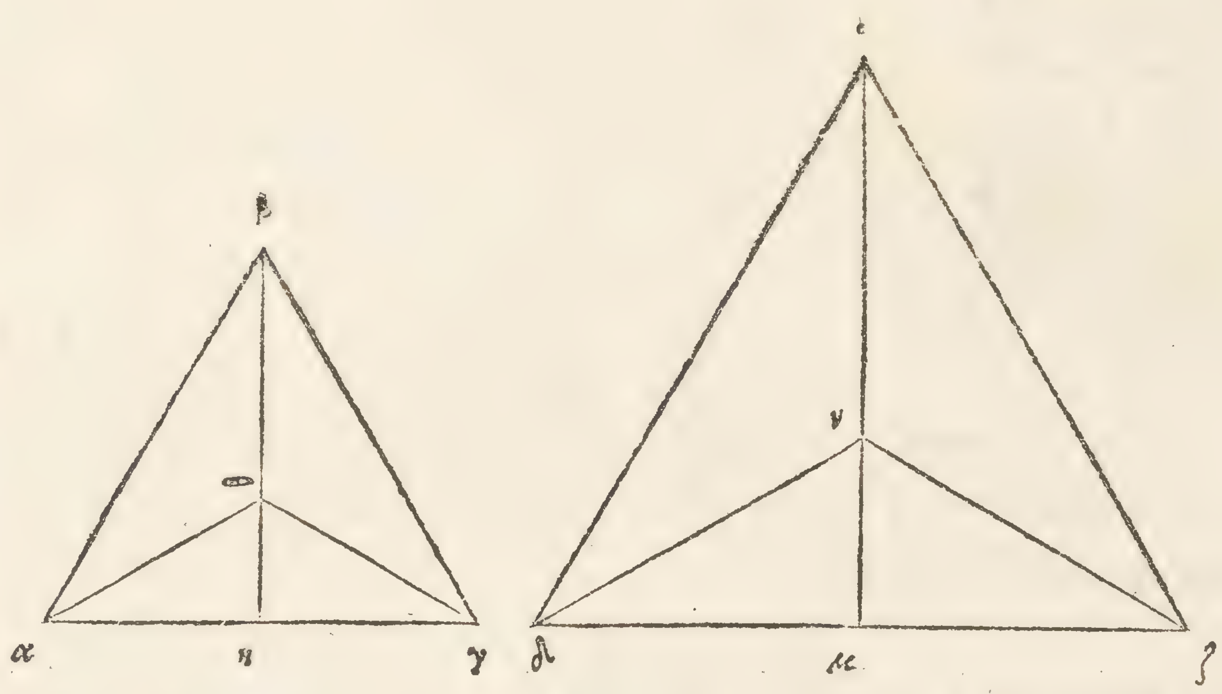
θ Ἂν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλήλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σαμεῖον τοῦ ἑνὸς ᾧ ἐστὶ τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε. καὶ ἁ βγ πρὸς εζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα. καὶ ἔστω



τὸ θ

τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ δεζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η κέντρον βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ, δν, εν, ζν, δη, εη, ζη. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐντί, τὰ θ, η σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα, ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκάστην ἑκάσταις. ἴση ἄρα ἁ ὑπὸ η δ ε γωνία, τᾷ ὑπὸ θ α β. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θ α β γωνία ἴσα ἐντὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θ ν σημεῖα, καὶ ἁ ὑπὸ ε δ η γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

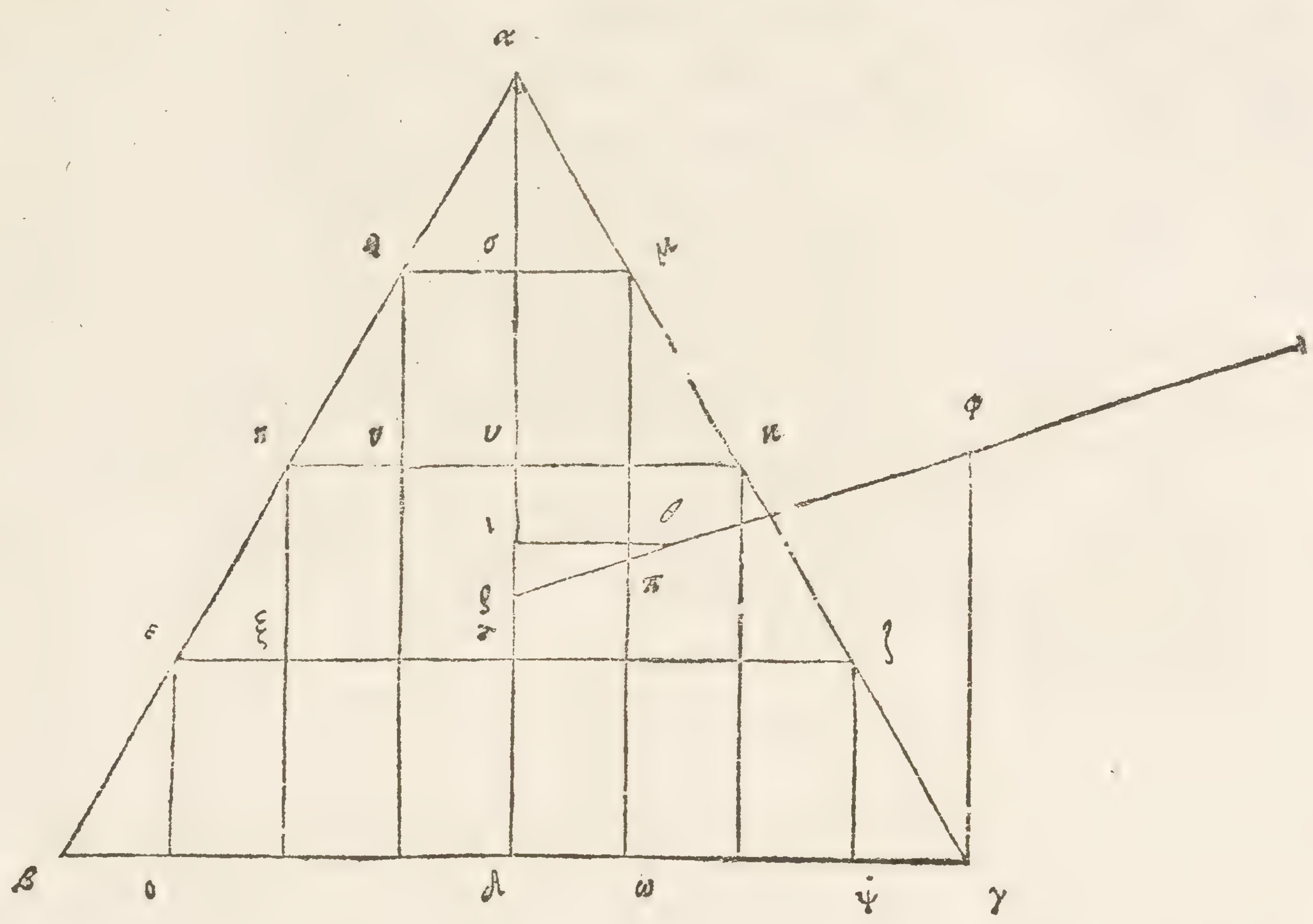
Εἴ κα δύο τρίγωνα ὅμοια ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται, τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ὁμοίας ἀγομένας γραμμᾶς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε, καὶ ἁ βγ πρὸς ζε. καὶ τμαθείσας τᾶς αγ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἁ βη, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς βη, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ εδζ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. τετμάσθω ἁ δζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἁ εμ καὶ γεγονέτω ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θγ, δν, νζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γα, ἡμίσεια ἁ αη. τᾶς δὲ δζ, ἡμίσεια ἁ δμ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἁ



βα πρὸς εδ, οὕτως ἁ αη πρὸς δμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ αηβ, τᾷ ὑπὸ δμε. καὶ ἐστὶν ὡς ἁ αη πρὸς δμ, οὕτως ἁ βη πρὸς εμ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ αβ πρὸς δε, οὕτως ἁ βθ πρὸς εν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶ ἁ ὑπὸ βαθ γωνία τᾷ ὑπὸ εδν, ὥστε καὶ λοιπὰ ὑπὸ θαγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νδζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ βγθ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εζν. ἁ δὲ ὑπὸ θγη, τᾷ ὑπὸ νζμ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ αβθ τᾷ ὑπὸ δεμ ἴσα, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θβγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νεζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θ ν σαμεῖα. καὶ ἐστὶ τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δεζ.

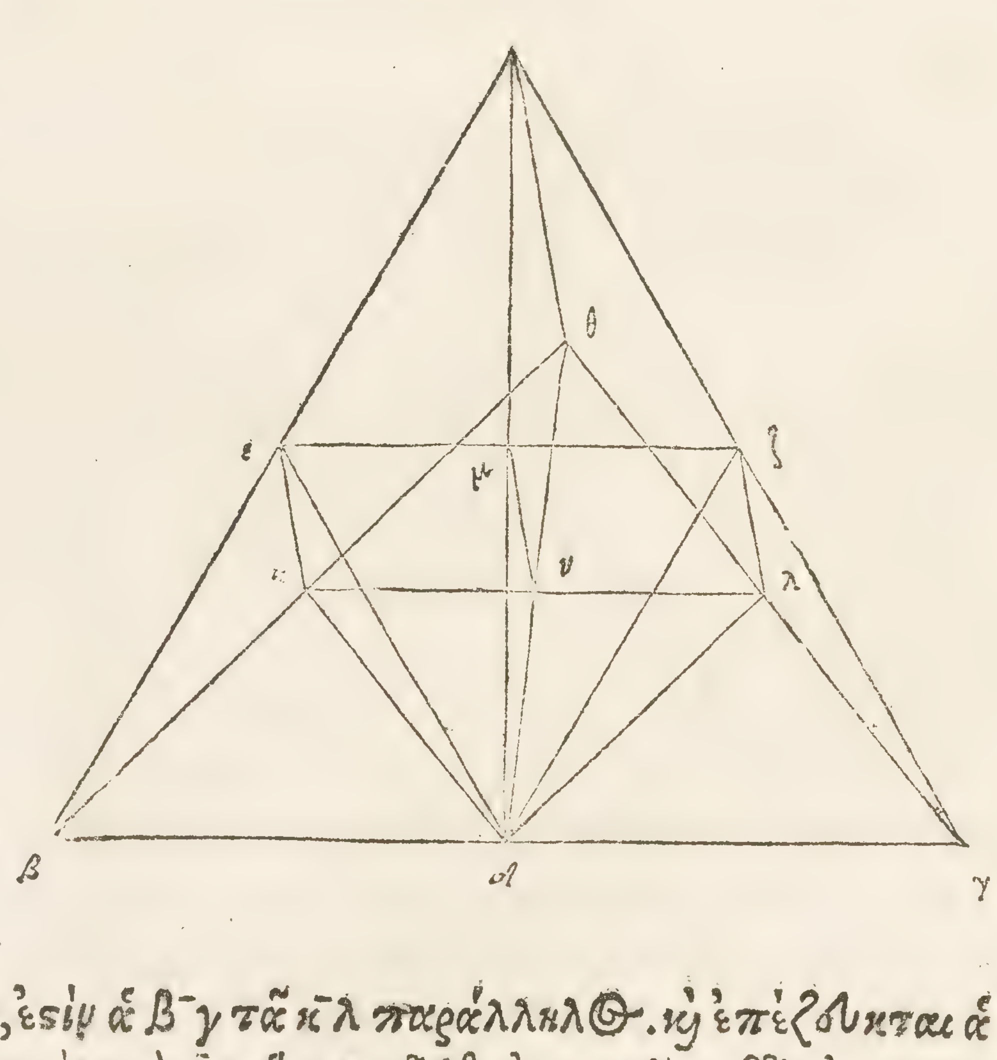
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐν αὐτῷ ἁ αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν βγ ἄχθω ἁ θι, ἁ εἰ δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς δγ ἔσται ἀποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν βδ, δγ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν αδ ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. ἐσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν βγ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς υσ. τοῦ δὲ κξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τυ. τοῦ δὲ ζο, ἐπὶ τᾶς τδ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς σδ εὐθείας. ἔσται δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπιζεύχθω ἁ ρθ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αδ ἁ γφ. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ αδγ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αμ, μκ, κζ, ζγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ αδβ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν αλ, λη, ηε, εβ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βα πρὸς αλ. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. ἀλλὰ ἁ γα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τᾶς γα πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φρ πρὸς ρπ, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὥστε

καὶ διελόντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θρ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σημεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταῦ θρ, τοιαύταν ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταῦ αδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐντί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

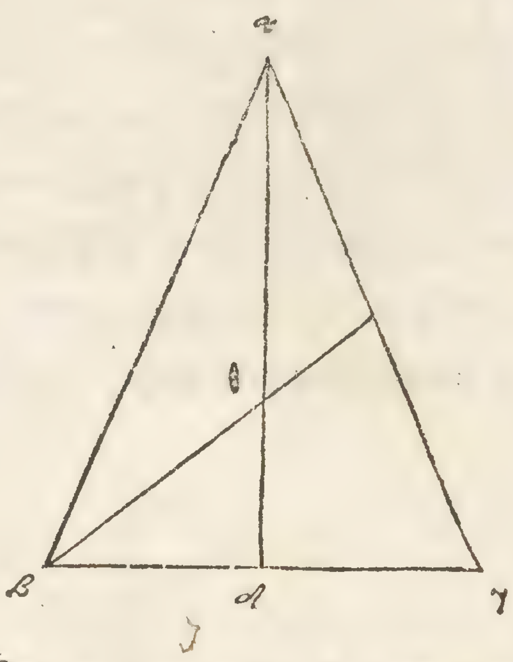
Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταῦ βγ, λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζ ε ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταῦ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὸν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ λ σημεῖον. ὁμοίως γὰρ ἀντικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων. ἐπειδήπερ πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας. φανερὸν γὰρ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα. καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταῦ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αεδζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς μν εὐθείας. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πο-



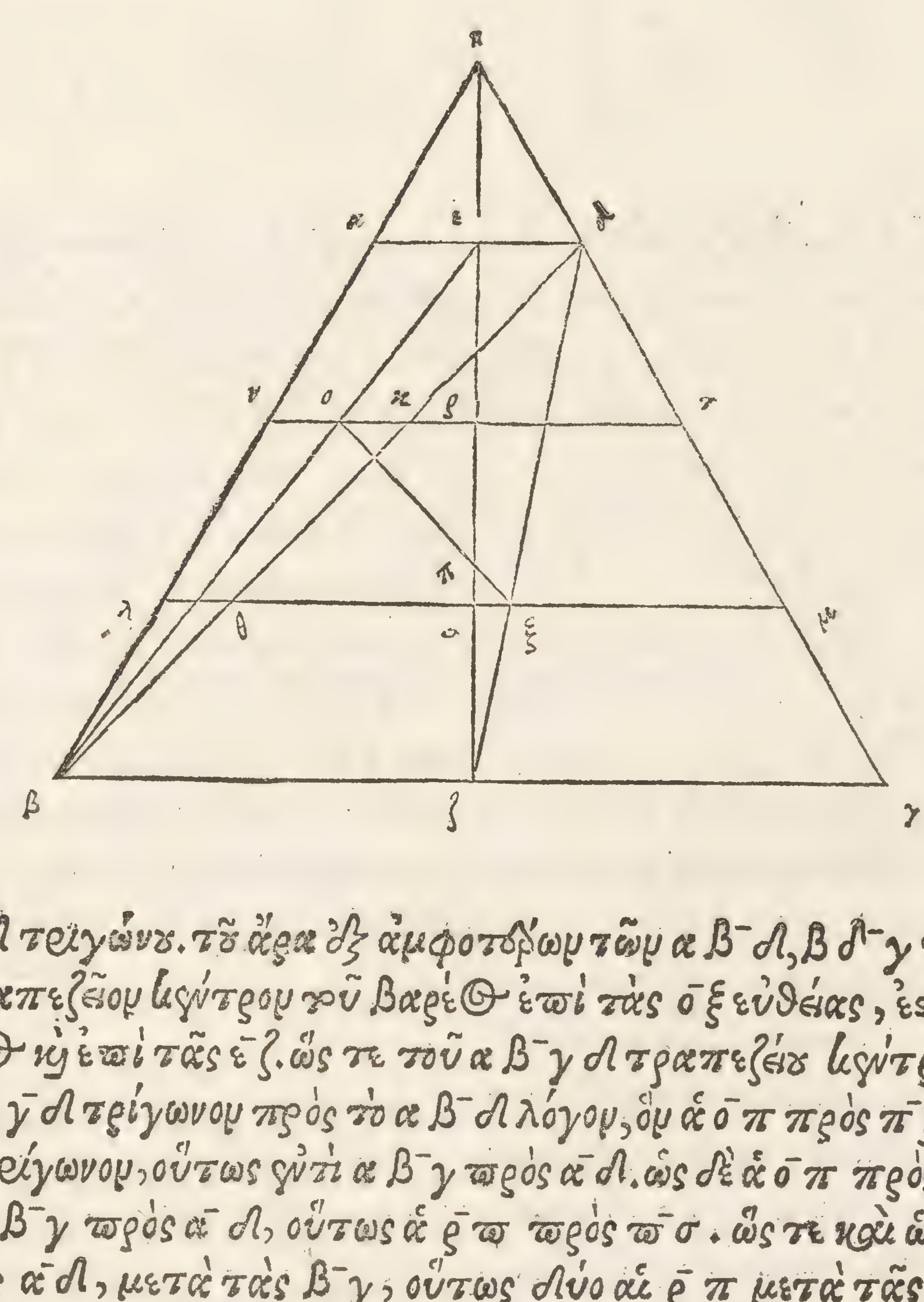
ρεύεται

ρεῦνται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, τοῦ α β γ τριγώνου, οὐκ ἔστιν ἐπὶ τᾶς α δ εὐθείας. ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν α δ ἐπὶ μέσαν τὰν β γ. ἁ δὲ β ε ἐπὶ μέσαν τὰν α γ. ἐσσεῖται δὴ τοῦ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ' ἑκατέρας τῶν α δ, β ε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν. ιβ

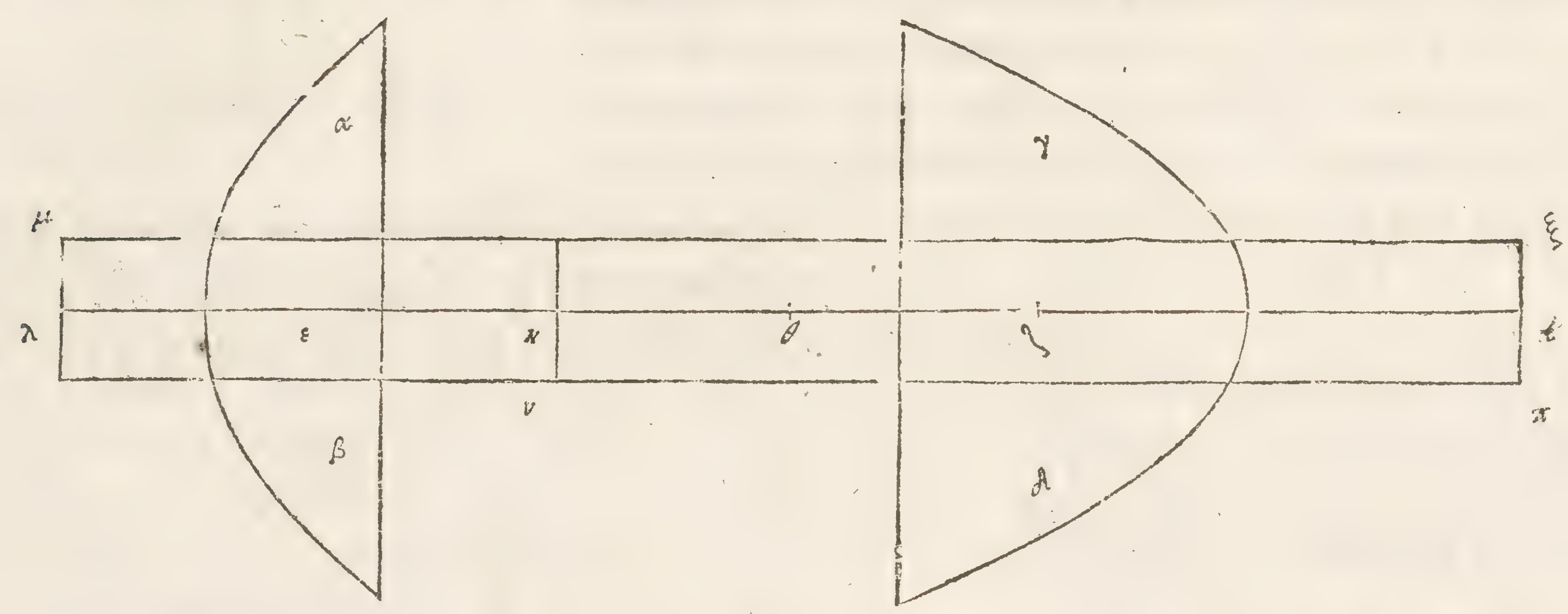


Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλήλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ἔστω τραπέζιον τὸ α β γ δ παραλλήλους ἔχον τὰς α δ, β γ. ἁ δὲ ε ζ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν α δ, β γ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς ε ζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γ δ η, ζ ε η, β α η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἔσται τὸ τοῦ η β γ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς η ζ. καὶ ὁμοίως τοῦ α η δ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς ε η. καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ α β γ δ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς ε ζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ β δ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν β γ ἄχθωσαν αἱ λ θ μ, ν κ τ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ ζ, β ε, ο ξ. ἔσται δὴ τοῦ μὲν δ β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θ μ. ἐπείπερ τρίτον μέρος ἁ θ β τᾶς β δ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἦκται ἁ μ θ. ἔστι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δ β γ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δ ζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β δ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β δ, β δ γ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ο ξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς ε ζ. ὥστε τοῦ α β γ δ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ β γ δ τρίγωνον πρὸς τὸ α β δ λόγον, ὃν ἁ ο π πρὸς π ξ. ἀλλ' ὡς τὸ β δ γ τρίγωνον πρὸς τὸ α β δ τρίγωνον, οὕτως ἐστὶ ἁ β γ πρὸς α δ. ὡς δὲ ἁ ο π πρὸς π ξ, οὕτως ἁ π ρ πρὸς π σ. καὶ ὡς ἄρα ἁ β γ πρὸς α δ, οὕτως ἁ ρ π πρὸς π σ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ β γ μετὰ τᾶς α δ, πρὸς δύο τὰς α δ, μετὰ τᾶς β γ, οὕτως δύο αἱ ρ π μετὰ τᾶς π σ, πρὸς δύο τὰς π σ, μετὰ τᾶς π ρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρ π μετὰ τᾶς π σ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σ ρ π, τουτέστιν ἁ π ε. δύο δὲ αἱ π σ μετὰ τᾶς π ρ, συναμφότερός ἐστιν ἁ ρ π σ, τουτέστιν ἁ π ζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα. ιγ



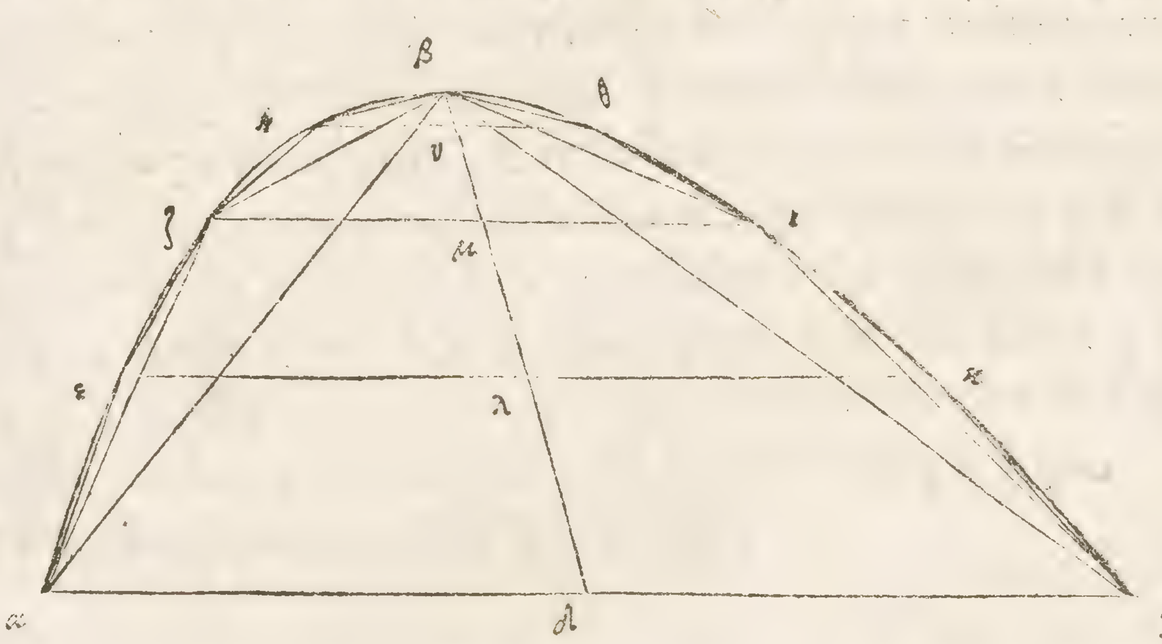
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

α Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ δὲ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέων οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ α β, γ δ, οἷα εἴρηται. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ α β ποτὶ τὸ γ δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζ θ πρὸς θ ε. δεικτέον ὅτι τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ δ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἔστω δὲ τᾶ μὲν ε θ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζ η, ζ κ. τᾶ δὲ ζ θ, τουτέστι τᾶ η ε ἴσα ἁ ε λ. ἔσται καὶ ἁ λ θ τᾶ κ θ ἴσα. καὶ



ἔτι ὡς ἁ λ η πρὸς η κ, οὕτως τὸ α β πρὸς γ δ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν λ η τὸ σαμεῖον τοῦ α β ἐφ' ἑκατέρα τᾶς λ η. ὥστε εἰ μὲν τὸ μ ν ἴσον τῷ α β. ἔσται δὴ τοῦ μ ν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ ν ξ. ἕξει δὲ τὸ μ ν πρὸς τὸ ν ξ λόγον, ὃν ἁ λ η πρὸς η κ. ἔχει δὲ καὶ τὸ α β πρὸς τὸ γ δ, τὸν τᾶς λ η πρὸς η κ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ α β πρὸς γ δ, οὕτως τὸ μ ν πρὸς τὸ ν ξ. καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ α β τῷ μ ν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γ δ τῷ ν ξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λ θ τᾶ λ κ, καὶ ὅλα ἁ λ κ τᾶς ἀπεναντίον πλευρᾶς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ π μ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μ π ἴσον τῷ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μ ν, ν ξ. καὶ τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τοῦ α β, γ δ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.

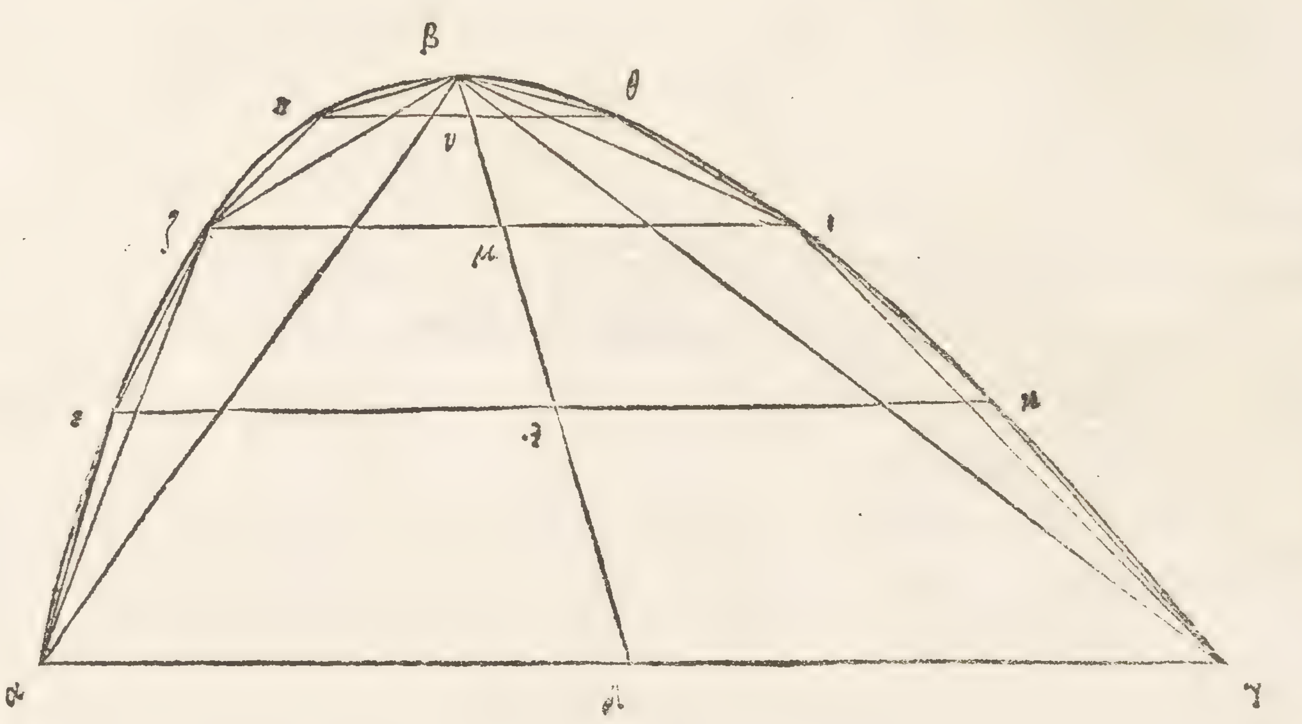
Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος. καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦτο δὲ δέδεικται ἐν ταῖς τάξεσιν.

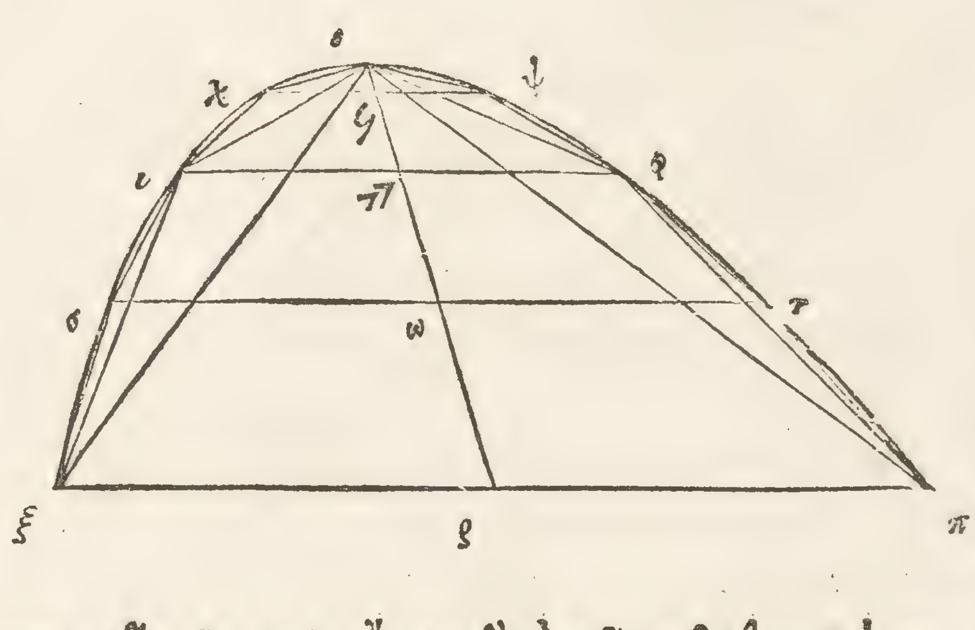


β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ α β γ, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγε-

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ αεζηβθικγ. διάμετρος δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἁ βδ.
δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς βδ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν αεκγ τρα-
πεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς λδ ἐστί, τοῦ δὲ εζικ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μλ. τοῦ
δὲ ζηθι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ ηβθ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος
ἐπὶ τᾶς βν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βδ ἐστίν.

Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκά- γ
τερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς
ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων, ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν
τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ αβγ, ξοπ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως καὶ τὰν
πᾶσαν πλευρὰν τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσων. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ βδ, ορ.
καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζι, ηθ. καὶ στ, υφ, χψ. ἐπεὶ οὖν ἁ τε βδ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσοὺς λόγους, καὶ ἁ ορ, ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι. καὶ τῶν τραπεζίων, τουτέστι αε, κγ. καὶ τοῦ ξσ, τπ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν λδ, ωρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ αγ, εκ ταῖς ξπ, στ. πάλιν δὴ καὶ τῶν εζικ, συφτ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λμ, ωϡ. καὶ ἐν τοῖς ζθ, υψ τραπεζίοις τὰ κέν-

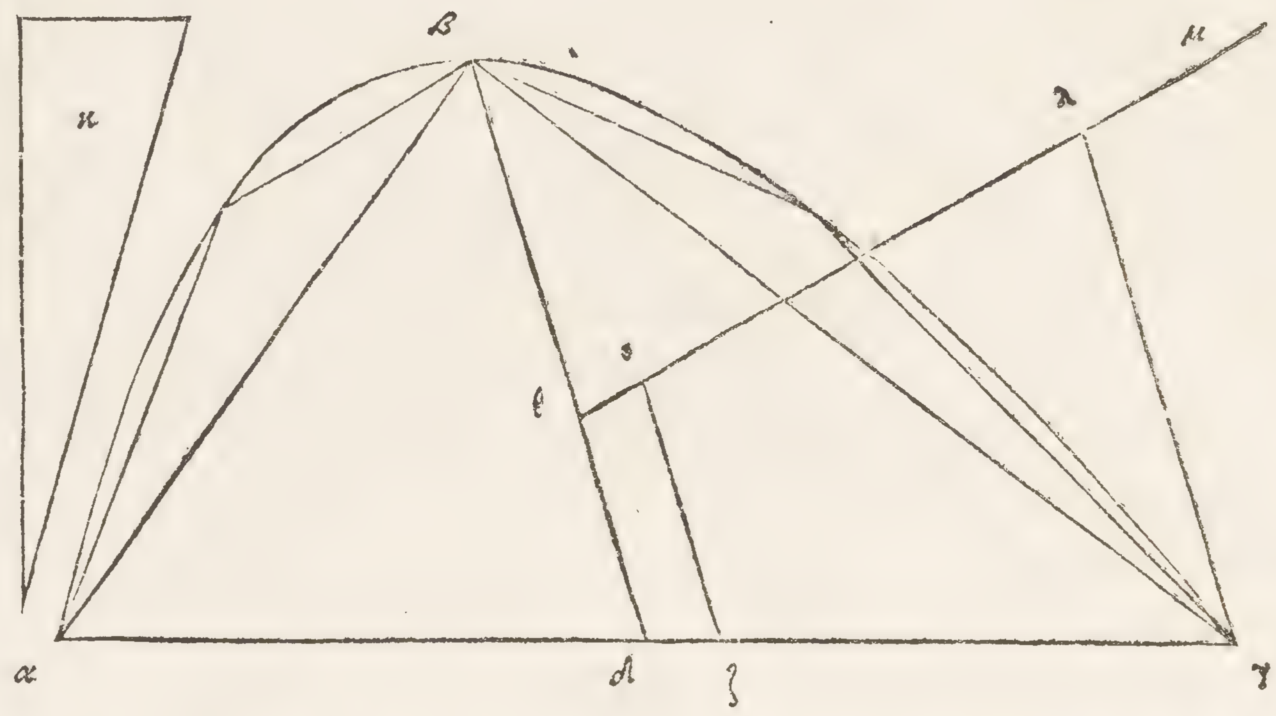




τρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μν, ϡϛ. ἔσαι δὲ καὶ τῶν ηβθ, χοψ τριγώνων
τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν βν, οϛ ὁμοίως κείμενα. ἔχωντι δὲ αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ
τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ αβγ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον
τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν βδ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξοπ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βά-
ρεος ἐπὶ τὰν ορ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

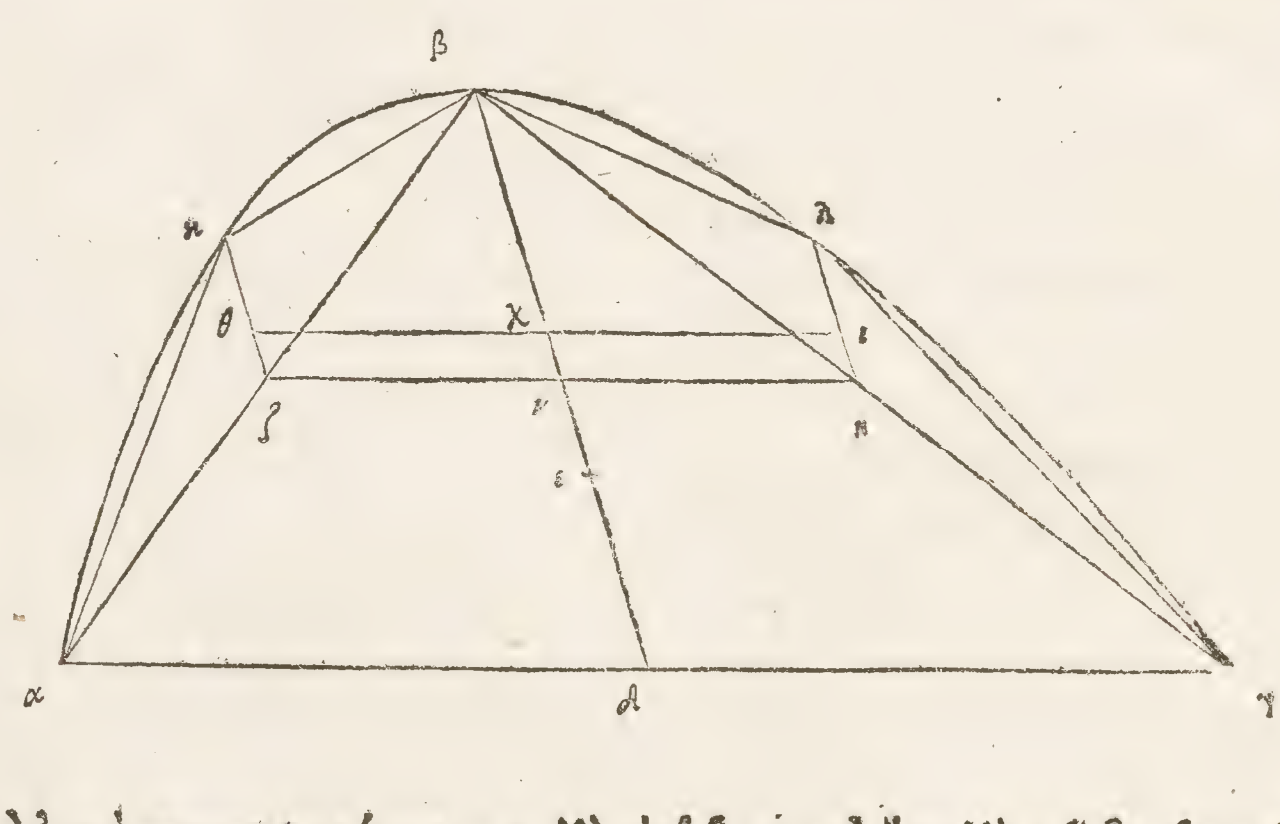
Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βα- δ
ρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ αβγ, οὗ διάμετρος
ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. εἰ γὰρ μή,
ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν βδ ἁ εζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν
αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γζ πρὸς δζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον
πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως. ὥστε τὰ περιλειπό-
μενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. τοῦ δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν
ἐπὶ τᾶς βδ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν βδ ἄχθω ἁ γλ. δῆ-
λον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα
τμάματα, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἐστὶ ὡς τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γζ
πρὸς ζδ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον
ἔχει, ἢ ἁ γζ πρὸς ζδ, τουτέστιν ἁ λε πρὸς εθ. ἐχέτω οὖν ἁ με πρὸς εθ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμ-

μένου πρὸς τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς θε, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν θε, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε εἴη κα τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ μ παρὰ τὰν βδ ἀγομένας, ἐπὶ ταὐτὰ ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς βδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ε Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τὸ τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἁ δβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ αβγ, καὶ τετμάσθω ἁ βδ κατὰ τὸ ε. ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν βε τᾶς εδ. ἐστὶν οὖν τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρα τᾶν αβ, βγ, κατὰ τὰ ζ, η. καὶ διὰ τῶν ζ, η παρὰ τὰν βδ ἄχθωσαν αἱ ζκ, λη. ἔσται ἄρα τοῦ μὲν ακβ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ζκ. τοῦ δὲ βγλ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηλ. ἔστω δὲ τὰ θ, ι. καὶ

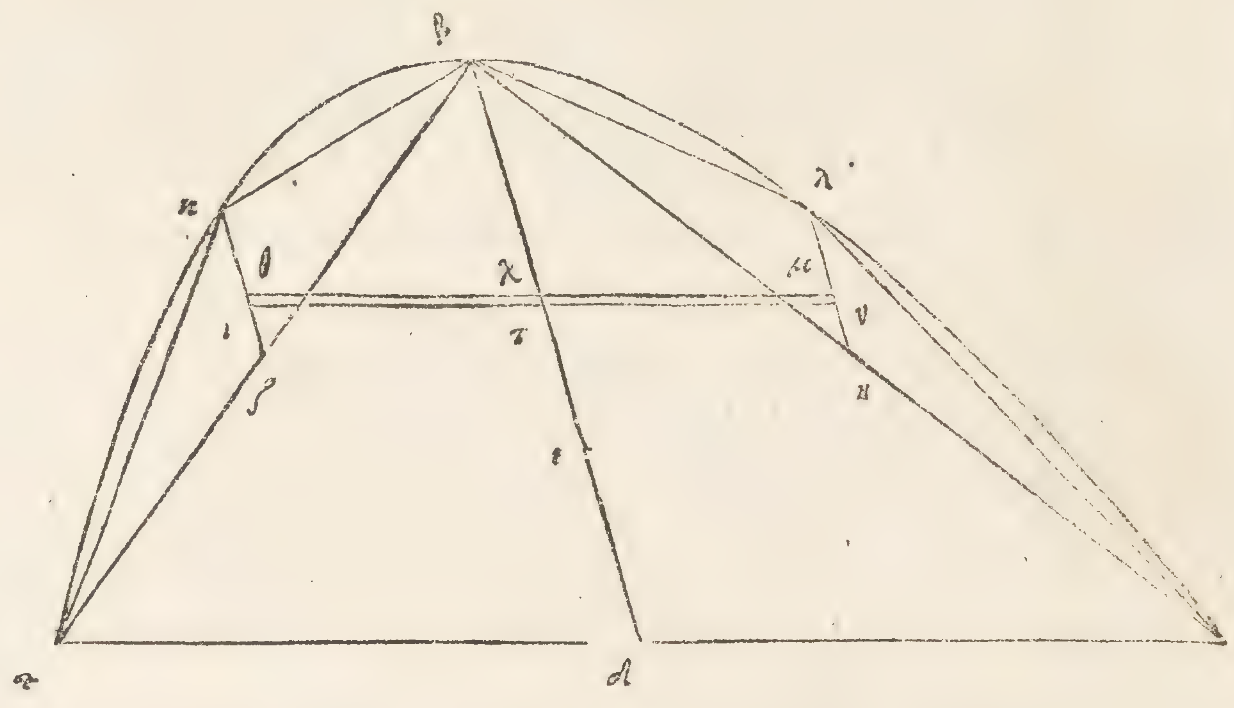


ἐπεζεύχθω ἁ θι, ζη. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζηι, καὶ ἴσα ἐστὶ τᾶ ζν ἁ νη, ἐστὶν ἄρα ἁ χθ ἴσα τᾶ χι. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς θι. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα, τουτέστι τὸ χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, λγ τὸ χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς χε, τουτέστι μεταξὺ τῶν χ, ε σαμείων, ὥστε εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ακβλγ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ βδ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν κζ, λη διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ακβ τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν ακβ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν βλγ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθω τὰ θμ, ιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἁ θχ

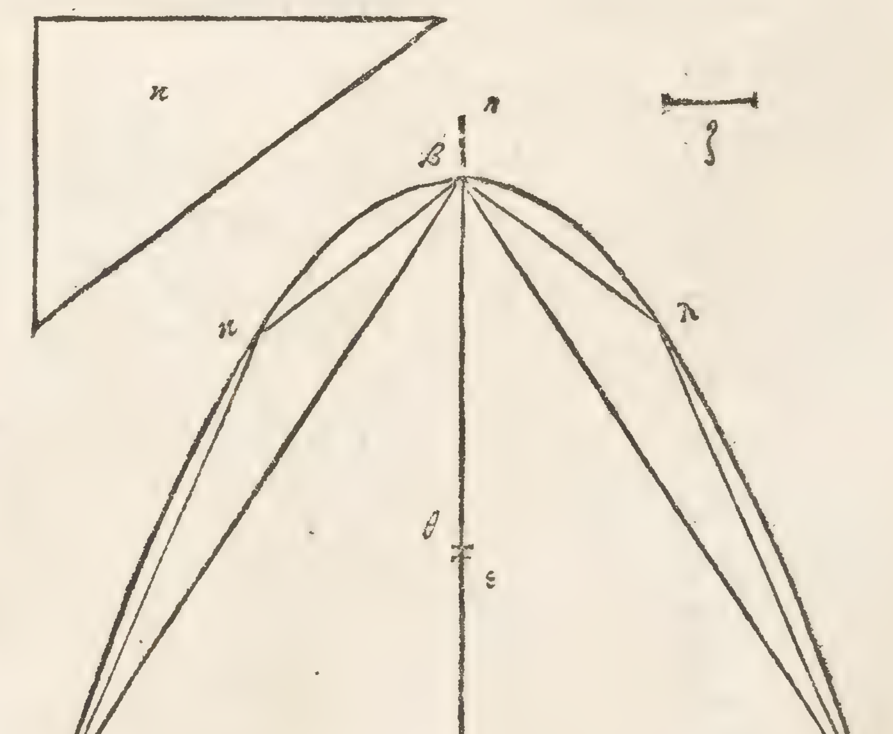
τᾶ χμ,

τᾶς χ μ, ἁ δὲ ι τ τᾶς τ ν. ἀλλὰ καὶ τριγώνῳ τῷ α κ β ἴσον ἐστὶ τὸ β λ γ. τμᾶμα δὲ τὸ α κ β τμάματι τῷ β λ γ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἔσται οὖν τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων, τὸ χ. δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ α β γ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι ἐπὶ τᾶς χ ε τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ α κ β, β λ γ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πέρας ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ α κ β λ γ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ε τ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ κ α β, λ β γ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερόν ἐστι τῆς β κορυφῆς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

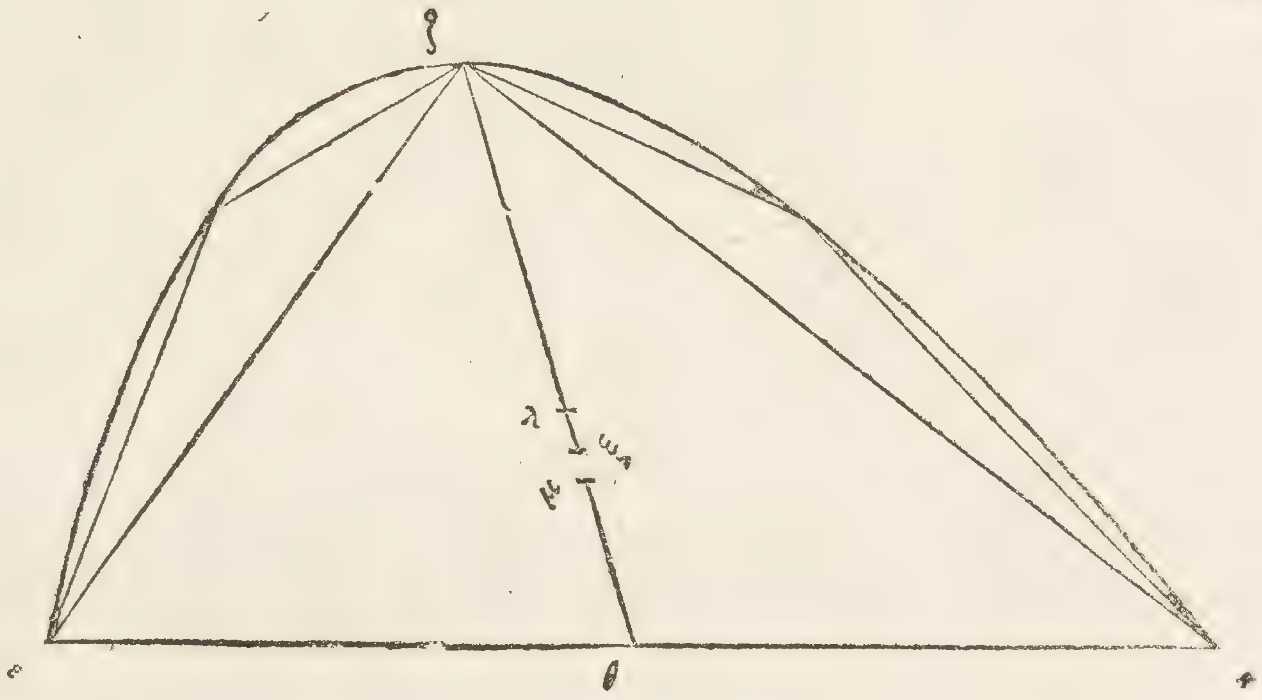
Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐστι τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ α β γ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ α β γ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ. καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ β θ πρὸς ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε. φημὶ δὴ τὰν θ ε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ β θ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θ ε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θ ε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ β θ πρὸς θ ε. ὥστε ἐὰν ποιῶμεν, ὡς τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θ ε, ἔσται μείζων τᾶς β θ. καὶ

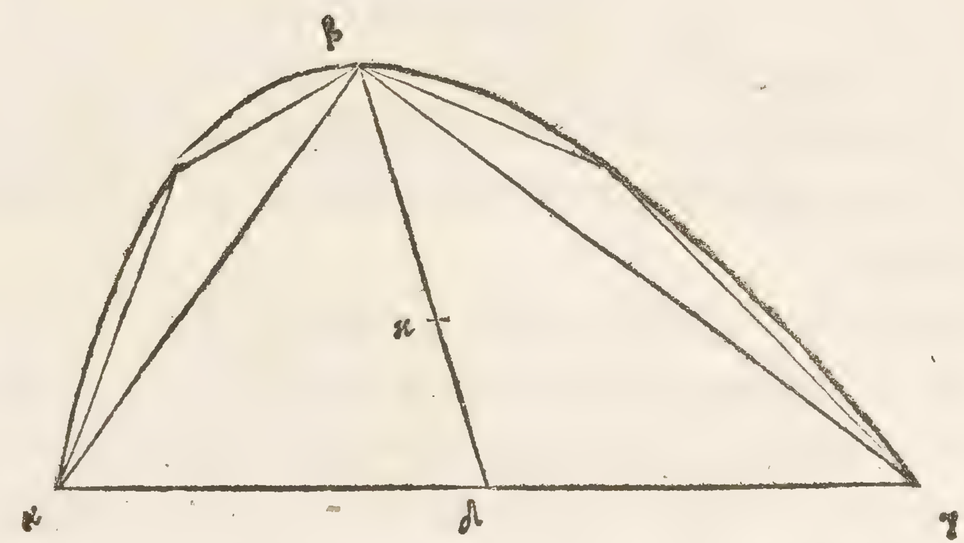


ἔστω ἁ θ η. ἐπεὶ δὴ τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ α κ β λ γ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς ε θ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν ε θ, ὃν τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσται μείζων τᾶς θ β. ἐχέτω οὖν ἁ η θ πρὸς θ ε,

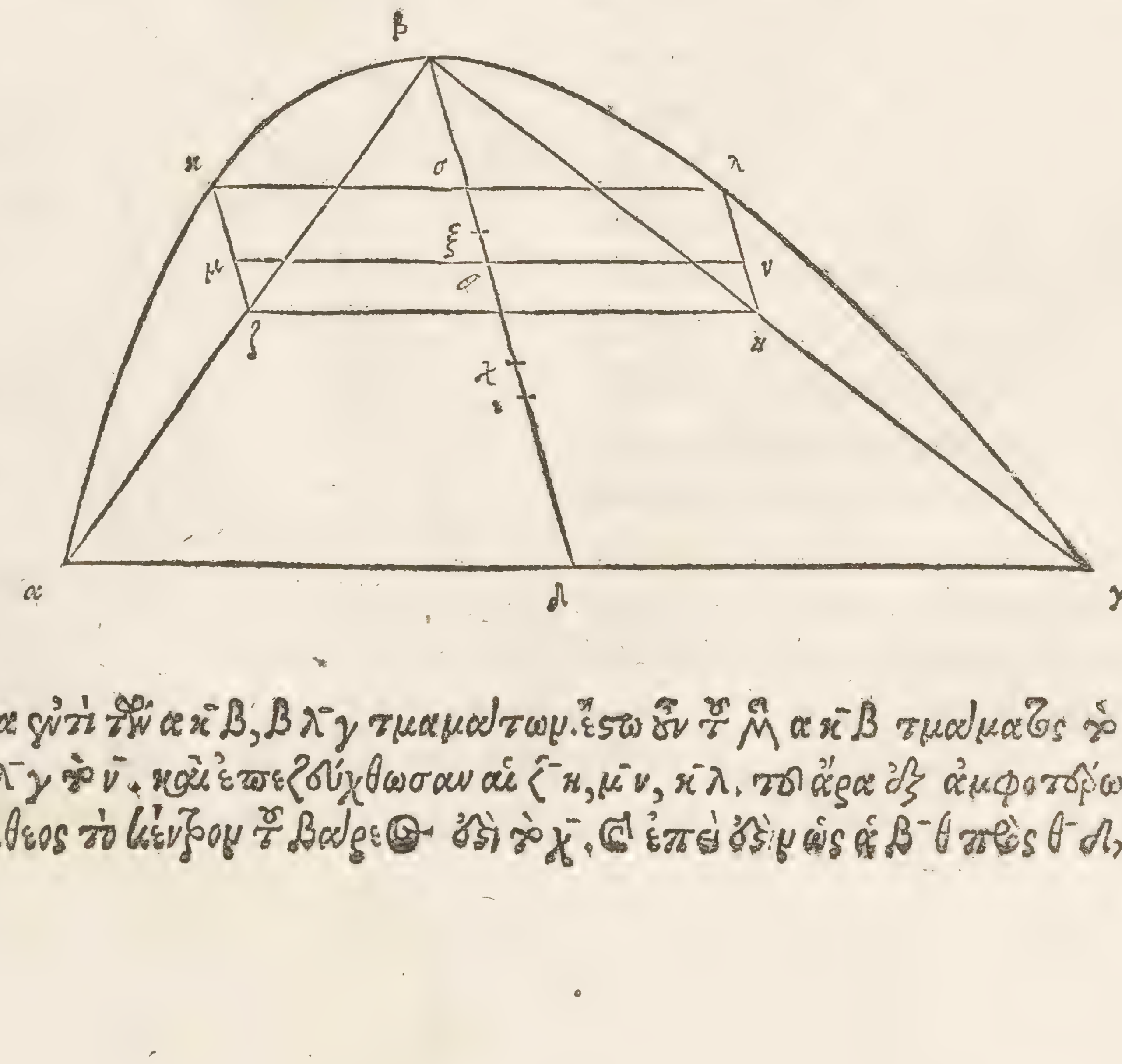
τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ ταὶν α γ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι τὴν τῶ τμήματι, δηλονότι ἁ θ ε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζ. ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζ Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται τὰ α β γ, ε ζ η. ὧν διάμετροι αἱ β δ, ζ θ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ε ζ η τὸ λ. δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κ β πρὸς κ δ, οὕτως ἁ ζ μ πρὸς θ μ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ε ζ η τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως. ὥστε τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λ μ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ε ζ η ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ β κ πρὸς κ δ, ὃν ἁ ζ λ πρὸς λ θ.





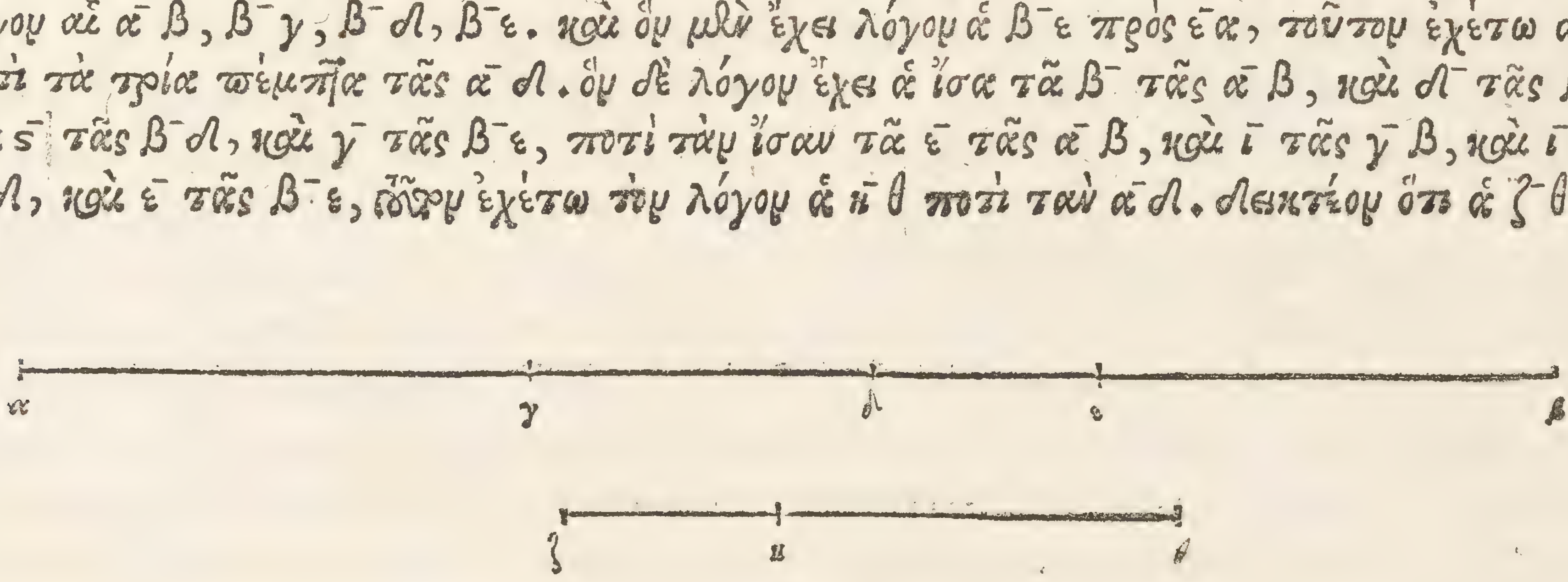
η Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ ταὶν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἡμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ ταὶν βάσιν. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ β δ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἡμιόλιά ἐστιν ἁ β θ τᾶς θ δ. ἐγγεγράφθω δὴ τὸ α β γ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ α β γ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ ταὶν β δ, αἱ κ ζ, η λ. διάμετροι ἄρα γίνονται τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων. ἔστω δὴ τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ. τοῦ δὲ β λ γ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, μ ν, κ λ. τοῦ ἄρα δὴ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ β θ πρὸς θ δ, οὕτως



ἁ κ μ

ἁ κμ πρὸς μζ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ βδ πρὸς τὰν κζ, οὕτως ἁ θδ πρὸς τὰν μζ. ἁ δὲ βδ τετραπλασίων τᾶς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται, οὗ σαμεῖον ὁ ☉. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ δθ τᾶς μζ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ βθ λοιπᾶς τᾶς κμ, τουτέστι τᾶς σχ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ βσ, χθ τριπλασίων τᾶς σχ. ἔστω τριπλασίων ἁ βσ τᾶς σξ. καὶ ἁ χθ ἄρα τᾶς ξχ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ βδ τᾶς βσ, καὶ τῶς τοῦτο δείκνυται. ἁ δὲ βσ τᾶς σξ τριπλασίων. ἁ ξβ ἄρα τᾶς βδ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ εδ τᾶς δβ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶ τὸ ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ξε τρίτον μέρος τᾶς βδ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ αβγ τριγώνου τὸ ε. ἔσται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ χθ πρὸς θε. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ χθ τᾶς θε. ἐδείχθη δὲ ἁ χθ τριπλασία καὶ τᾶς χξ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ξε τᾶς εθ. τουτέστιν ἁ δε τᾶς εθ. ἴσα γὰρ ἐστὶν αὐτᾷ. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ δθ τᾶς θε. καὶ ἐντὶ τᾶς δε τριπλασία ἁ βδ. ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τᾶς θδ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἐῶντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπτημόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς γ, καὶ τᾷ γ τᾶς δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ ι τᾶς β, καὶ τᾷ ι τᾶς γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπτημόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ αβ, βγ, βδ, βε. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ βε πρὸς εα, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζη ποτὶ τὰ τρία πεμπτημόρια τᾶς αδ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς βγ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ ε τᾶς αβ, καὶ ι τᾶς γβ, καὶ ι τᾶς βδ, καὶ ε τᾶς βε, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ηθ ποτὶ τὰν αδ. δεικτέον ὅτι ἁ ζθ δύο θ



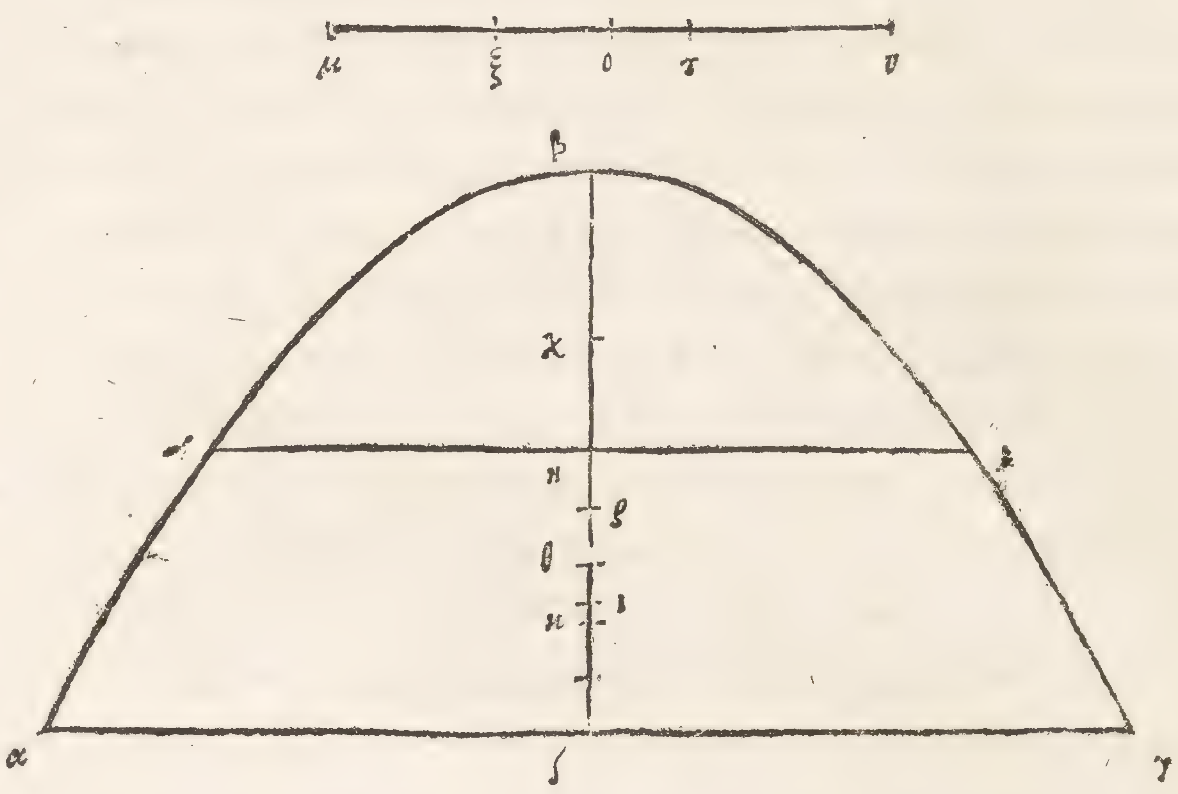
πεμπτημόριά ἐντὶ τᾶς αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ αβ, βγ, βδ, βε, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ αβ, βγ πρὸς τὰν βδ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν δε. καὶ συναμφότερος ἁ βδ, βγ ποτὶ τὰν εβ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ γ τᾶς γβ, καὶ ἁ δβ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β, τᾶς βδ καὶ τὰν βε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ δ τᾶς βγ, καὶ τᾷ δ τᾶς βδ, καὶ τᾷ β τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς δβ, καὶ τὰν εβ, τοῦτον ἕξει ἁ δα πρὸς ἐλάσσονα τᾶς δε. ἐχέτω οὖν πρὸς δθ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ οα πρὸς αδ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς γβ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρας τᾶς αβ, εβ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔχει δὲ καὶ ἁ αδ πρὸς ηθ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, καὶ τᾶς γ τᾶς εβ, καὶ ς τᾶς βδ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένων ἀναλογίᾳ, δι᾽ ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ οα πρὸς ηθ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, ἀλλ᾽ ἁ συγκειμένα

ἔκ τε τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἁ αο ε πρὸς ηθ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εβ, μετὰ τᾶς β τᾶς βδ, πρὸς τὰν ἴσαν τὰ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ὅτι δὲ καὶ ὡς ἁ αδ πρὸς δε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ γ τᾶς γβ, καὶ τᾶς βδ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾶ τε εβ, καὶ τᾶ ϐ τᾶς βδ. ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας οὔσας τὰς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἁ οδ πρὸς δε, οὕτως ἁ β τᾶς αβ, μετὰ τᾶς γ τᾶς βγ. καὶ ἁ βδ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, βδ. ὥστε καὶ ὡς ἁ εο πρὸς εδ ἐστὶν, οὕτως ἁ γβ μετὰ τᾶς γ τᾶς βδ, καὶ β τᾶς εβ, πρὸς τὰν β συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ δε πρὸς εβ, οὕτως ἅ τε αγ πρὸς γβ. ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ τᾶς γδ, πρὸς τὰν γ τᾶς δβ. καὶ ἁ β τᾶς δε, πρὸς τὰν β τᾶς εβ. ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς αγ, καὶ ἁ γ τᾶς γδ, καὶ β τᾶς δε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς γϐ, καὶ γ τᾶς δϐ, καὶ ϐ τᾶς εϐ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν οὔσης τεταραγμένας ἀναλογίας, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ εο πρὸς εβ, ὃν ἁ αγ μετὰ τᾶς γ τᾶς γδ, καὶ ϐ τᾶς δε. πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ. συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. ὅλα οὖν ἁ οϐ πρὸς τὰν εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἴσα τᾶ τε γ τᾶς αϐ μετὰ τᾶς ς τᾶς γϐ, καὶ τᾶ γ τᾶς ϐδ πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς αϐ, ϐε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. καὶ ἐπεὶ αἵ τε εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν εβ, ϐδ, δϐ, ϐγ, γδ, γα. ἔσται καὶ ὡς ἁ εδ πρὸς δα, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, πρὸς συναμφότερον τὰν δϐ, βγ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γβ, ϐα. καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς αε πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βγ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γβ δ. ὅ ἐστι συναμφότερος ἁ εϐα, μετὰ τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς δβγ, πρὸς συναμφότερον τὰν ϐδ, ϐα, μετὰ τᾶς β τᾶς βγ. ὥστε καὶ ἁ ϐ πρὸς τὰν ϐ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ εα πρὸς αδ, οὕτως ἁ β συναμφοτέρου τᾶς εϐα, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γβδ, πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς αβδ, μετὰ τᾶς δ τᾶς γϐ. ὥστε ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς αβε καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα, τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ τᾶς γϐ. ἀλλ' ὡς ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἐστὶν ἁ εϐ πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἁ εϐ πρὸς ζη, οὕτως ἁ ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς δϐγ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς δ τᾶς γϐ. ἐδείχθη δὲ ὡς οϐ πρὸς εϐ, οὕτως ἁ γ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς ς τᾶς γϐ, πρὸς τὰν ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ οϐ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ς τᾶς γϐ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ τᾶς γϐ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ς τᾶς γϐ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, τᾶς γϐ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ βα πρὸς ὅλαν τὰν ζθ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημορία ἐντὶ ἁ ζθ τᾶς αβ, ὅπερ ἔδει.

ι Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τόμου. τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε τε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου. ὥστε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφότερα τᾶ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τὸ μείζονι ποτὶ τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρας, τᾶ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾶ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αγ, δε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ αβγ τμάματος, ἁ βζ. φανερὸν δ' ὅτι καὶ τοῦ αδεγ διάμετρος ἐστὶν ἁ ηζ. καὶ αἱ μὲν αγ, δε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς ηζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ θκ. ἁ δὲ θι πρὸς τὰν ικ, τὸν αὐ-

τὸν

τὸν ἔχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε β̄ τᾶς δ η, καὶ τᾷ α ζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ β̄ τᾶς α ζ, καὶ τᾷ δ η. δεικτέον ὅτι τοῦ α δ ε γ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾷ μὲν ζ β ἴσα ἁ μ ν, τᾷ δὲ η β ἴσα ἁ ν ο. καὶ εἰλήφθω τᾶν μὲν μ ν ο μετὰ ἀνάλογον ἁ ν ξ. τετάρτη δ' ἀνὰ λόγον ἁ τ ν. καὶ ὡς τ μ πρὸς τ υ, οὕτως ἁ ζ θ πρός τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον. οὐδὲν γὰρ διαφέρει εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ, η, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν η, β, τὴν ι ρ. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τμάματος ἁ ζ β. ἁ β ζ δὲ, ἤτοι ἀρχὴ ἐστὶ τᾶς τομᾶς, ἢ παρὰ τὴν διάμετρον ἧκται. αἱ δὲ α ζ, δ η εἰς αὐτὴν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ τᾷ ἀπὸ τοῦ β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ὡς ἡ α ζ πρὸς δ η δυνάμει, οὕτως ἁ ζ β πρὸς β η μάκει, τουτέστιν ἁ μ ν πρὸς ν ο. ὡς δὲ ἁ μ ν πρὸς ν ο μάκει, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν ξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ α ζ πρὸς δ η δυνάμει, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν ξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτω τὸ β α γ τμᾶμα πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν τ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ α δ γ ε τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἁ μ τ πρὸς ν τ, τουτέστι τὰ γ ε τᾶς η ζ πρὸς ν τ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς δ η καὶ τᾶς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β̄ τᾶς δ η μετὰ τᾶς α ζ πρὸς ζ α. ὥστε καὶ ἁ β̄ τᾶς ν ξ μετὰ τᾶς ν μ, πρὸς ν μ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν τ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δ η κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς α ζ, μετὰ τᾶς δ η, οὕτως ἁ δ η πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς α ζ, καὶ τᾶς δ η. ὥστε καὶ ἁ τ ν πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς ο ν καὶ τᾶς τ ν. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλᾶς τᾶς δ η, καὶ τᾶς α ζ. καὶ ὁ ἀπὸ α ζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δ η κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β̄ τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, τέταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β̄ τᾶς ν ξ, καὶ τῆς ν μ, καὶ ἑτέρου μεγέθους τῆς μ ν. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἡ ν τ. καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη, ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν ο, καὶ τῆς ν τ. δι' ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν ξ, καὶ τῆς μ ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν ο, καὶ τῆς ν τ. ἀλλ' ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεὸν, οὕτως ἡ θ ι πρὸς ι κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ ι πρὸς ι κ, οὕτως ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ η πρὸς ι κ, οὕτως ἡ πενταπλῆ συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ν ξ, ν ο, πρὸς τὴν β̄ τῆς ο ν, καὶ τὴν ν τ. καὶ ὡς ἡ ζ η πρὸς ζ κ οὖσαν αὐτῆς δύο πέμπτα, οὕτως ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ δεκαπλῆ



συναμ-

συναμφοτέρου τᾶς ν ξ ο, πρὸς τὰν β συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς ν ξ ο. ἔσται οὖν ὡς ζ η πρὸς ζ ι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξ ν ο πρὸς τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς μ ν, καὶ δ τᾶς ν ξ, καὶ ς τᾶς ο ν, καὶ γ τᾶς ν τ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μ ν ξ, ο ν τ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ν τ πρὸς τ μ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρ ι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζ η, τουτέστι τᾶς μ ο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἔκ τε τᾶς β τᾶς ν μ, καὶ δ τῆς ν ξ, καὶ ς τᾶς ν ο, καὶ γ τᾶς ν τ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξ ν ο, οὕτως ἑτέρα τις εἰλημμένη ἡ ι ζ πρὸς τὰν ζ η, τουτέστιν πρὸς τὴν μ ο, ἔσται διὰ τὰ πρότερον ἡ ρ ζ δύο πέμπτα τῆς μ ν. τουτέστι τῆς ζ β. ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ α β γ τμήματος τὸ ρ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ δ β ε τμάματος κέντρον βάρεος τὸ χ σαμεῖον. τοῦ α δ ε γ τόμου ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ἐπ' εὐθείας τᾶς χ ρ, τὸν αὐτὸν πρὸς αὐτὰν λόγον ἐχούσης, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ι σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τᾶς μὲν ζ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β ρ, τᾶς δὲ η β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β χ. καὶ λοιπῆς ἄρα τᾶς η ζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χ ρ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς μὲν ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμῆμα, οὕτως ἡ μ τ πρὸς ν τ. ὡς δὲ ἡ μ τ πρὸς τὰν ν τ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς η ζ, ἥ τις ἐστὶν ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ δ β ε κέντρον βάρεος τὸ χ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ δ ε γ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ι σημεῖον.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

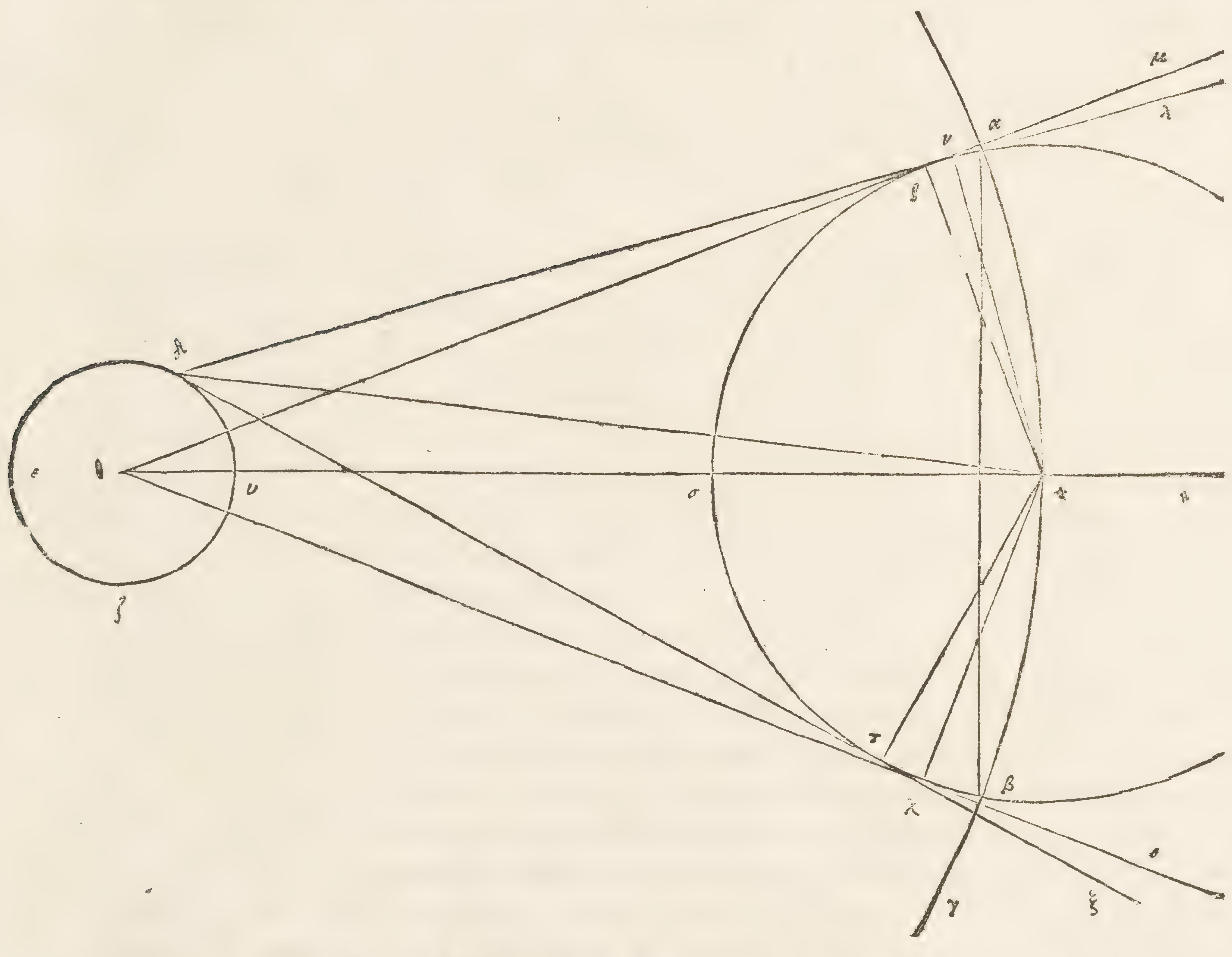
Οἴονταί τινες βασιλεῦ Γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. * ἐν τινὲς δὲ αὐτὸν ἄπειρον γινώμενον οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὐ† δοξάζοντες, δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὰ μὲν ἄλλα ἁλίκαν ὁ πᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγέων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως, μὴ γνωσῖν τε μὴ δ' ἐν ἀκαρεῖ ἔμμεναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοῦ το δεικνύειν δι' ἀποδείξεων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατονομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλειόνων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστὶ κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἡ δὲ τοῦ κέντρου εὐθεῖα τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακρούσας Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν. ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δ' εὔδηλον, ὡς ἀδύνατόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον γε τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὡς περὶ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστὶν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθενται περιφέρεσθαι ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν τὰς ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκείμενον ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεται τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν. καὶ

† οὕτως

οὔ τινας,

οὐκ ἐνάς, δειχθεῖσι τῶν ἐν ἀρχαῖς τῶν κατονομαζιδῶν ἐχόντων, ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τόν καὶ τὸ τοῦ ψάμμου, τοῦ μεγέθους ἔχον τὸ ἴσον τῇ εἰρημένῃ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζων, καὶ περὶ τῶν πειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καί τοι παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτάν, ὡς λ΄ μοιριάδων σταδίων. ἐγὼ δ᾽ ὑπερβαλλόμενος καθεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλασίων τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένων, ταν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ΄λ σταδίων, καὶ μείζων. μετὰ δὲ τοῦτο ταν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα ἐκεῖμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων. μετὰ δὲ ταῦτα ταν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων εὐδοξοῦ μὲν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀποφαινομένου. φειδία δὲ τοῦ ἀκούπατρος, ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν. ἀριστάρχου δὲ πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτὼ καὶ δεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμενον ἀναμφίλογον ἦ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι ταν διάμετρον τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίας εἶμεν, καὶ μὴ μειζόνων. ποτὶ δὲ τούτοις ταν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι. ἀριστάρχου μὲν εἰρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τοῦ ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν ταν γωνίαν ὡς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβεῖ λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε ταν ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι᾽ ὧν λαβεῖν ἀξιοπίστας εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι. περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων. ἀπόχρη δέ μοι εἰς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ἡ ἅλιος ἐναρμόζῃ ταν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας ἃς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ ταν κορυφὰν, ἔχουσαν ποτὶ τῇ ὄψει. τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πεδου ὀρθὸν ἐν τόπῳ κειμένου, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλειν ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθὲν εὐθὺ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ ταν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου. ἔπειτ᾽ ἰόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστραφῇ ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη εὐθὺ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος, τοῦ τ᾽ ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικροῦ ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος, εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν ταν ὄψιν ἀφ᾽ ἑνὸς σαμείου βλέπειν εὐθεῖαν ἀχθεῖσαν ἀπ᾽ ἄκρου τοῦ κανόνος. ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου, ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ ταν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων κα εἰς τὰς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. διὰ τὸ περιβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ᾽ αἱ ὄψιες οὐκ ἀφανῆ σημεῖον βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλαττον ὄψις. καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος εὐθὺ τὸ ἄκρον τοῦ κανῶνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τοῦ μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ ταν ἀχθεῖσαν ἐλάττων ἧς τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ ταν κορυφὰν ἐχούσας ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον ὄψιος, τοῦτον δὲ τρόπον εὑρίσκεται. δύο κυλίνδρια ἀναλαμβάνεται λεπτὰ ἰσοταχέα ἀλλήλαν, τὸ μὲν λευκόν, * τὸ δὲ οὔ. καὶ προστίθενται πρὸς τὰς ὄψιας, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ᾽ αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὅς ἐστι ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότατα ἐόντι τᾶς ὄψιας, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκὸν εἰκόνα παραπολὺ λεπτοτέραν ἐόντα ταν, εἰ δέκα μὴ παραπολυμερέα τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ᾽ ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλίνδρων, ἔπειτα δι᾽ ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκότει τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλείονι τόπῳ τὸ δὴ ταλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν τοῦ ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστὶν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος, οὐδὲ γωνία, οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἀπὸ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ᾽ ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη. ἐπιψαυουσῶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ ταν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθὰς γωνίας ἐγένετο ἁ μὲν σίγω διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάσσων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάσσων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ γωνία ἁ ἴσαν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάσσων μέν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς, εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος μείζων δὲ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὲ τούτων διὰ ὧν διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τᾶς ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβληθὲν ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν αβγ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δεζ. τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ση κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ, τοῦ δ᾽ ἁλίου τὸ κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ση κύκλου. ἀπὸ μὲν τοῦ δ αἱ δλ, δξ. ἐπιψαυόντων δὲ, κατὰ τὸ ν καὶ τὸ τ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, αἱ θμ, θο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ καὶ τὸ ρ. τὸν δὲ αβγ κύκλον τεμνόντων αἱ θμ, θο κατὰ τὸ α καὶ τὸ β. ἔστι δὴ μείζων ἁ θκ τᾶς δκ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν, ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τῶν θμ, θο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τῶν δλ, δξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάσσων δὲ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος, * ἴσον γωνίαι ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ ταῖν θμ, θο ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ αβ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας εἰς χνϛ. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ ταὶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ᾽ ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ βα ποτὶ τὰν θκ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἁ βα τᾶς θκ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ βα ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ση κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ φα, ἴσα ἐστὶ τᾷ κρ. ἴσαν γὰρ ἐοῦσαν ταὶν θκ τᾷ θα, ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ

τὰν

ταὶ αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ α β γ κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θ κ. καὶ ἁ ε θ υ γωνία ἐλάττων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ α β η κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν ὁ δ ε ζ κύκλος τοῦ σ κ κύκλου. ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ θ υ, κ σ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τοῦ θ κ. ὥστε ἁ θ κ ποτὶ τὰν ~ ς ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θ κ ~ ἐλάττων ἐστὶ τᾶς θ ρ, ἁ δὲ σ υ ἐλάττων τᾶς δ τ, ἐλάττω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θ ρ ποτὶ τᾶ δ τ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπεὶ τῶν θ κ ρ, δ κ τ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κ ρ, κ τ πλευραὶ ἴσαι ἐντί. αἱ δὲ θ ρ, δ τ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ ο ρ α γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ τ, δ κ, ποτὶ ταὶ γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θ ρ, θ κ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θ κ ποτὶ τὰν δ κ. ἐλάττω δὲ, ἢ ἁ θ ρ ποτὶ τὰν δ τ. εἰ γὰρ κα δύο τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία ταῖν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ, τᾶ ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτείνουσα, ποτὶ τὰν ἐλάττονα. ἐλάττονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ ταῖν περὶ ταὶ ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ ταὶ ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θ ν, θ μ, ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ ποτὶ ταὶ δ τ. ἅ τις ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θ μ, θ ο, ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος, ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν θ μ, θ ο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια, τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, καὶ γ. τούτων ἓν μέρος ἄρα ἁ β α μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας, ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ α β γ κύκλου περιφερείας, αἷς ω ι β, τὰν δὲ α β ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, οἷον ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις, μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς ἐλινᾶς, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς ἐλινᾶς, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων. δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὃ καὶ εἴς ὁ ε θ πλευρέον, καὶ πολυγώνου. ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου εἴη, καὶ ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, δῆλον ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ. περὶ μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι. περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴ κα ᾖ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μείζων μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάττονα εἶμεν ἢ τετρωκοστὸν μόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο, ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον. ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι, ἁπτόμεναι ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κ ε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάττονα θεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάττονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τὸ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ περιειρημένων. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τῶν μυρίων μὲν ἀποχρεόντως ἐγιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες εἰς τοὺς ποτὶ τὰς μυριάδας. ἔστω οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ εἰς τὰν μυρίαν μυριάδων πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων καὶ ἀριθμῶν τῶν δευτέρων μονάδων, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδων, καὶ μυριάδων ἔσται μυρίων μυριάδων. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ αἱ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἔσται μυρίαι μυριάδες. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἔχοντες ἔσται μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. ἀποχρέωντι μὲν οὖν καὶ ἀπὸ τοσούτων οἱ ἀριθμοὶ γινωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτης περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μυρίαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου, ἔσται μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μόνας καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔσται μυριάκις μυριοστᾶς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐῶντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐξησκημένοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκάς, τοὶ ὀκτὼ εἶεν αὐτῶν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλούμενοι, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες. τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος, ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δὲ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἐξοῦντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δὲ ἐστὶ καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντες τινὲς ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὅταν ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχωντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνὰ λόγον ἀπὸ μονάδος, οἱ α̅, β̅, γ̅, δ̅, ε̅, ζ̅, η̅, θ̅, ι̅, κ̅, λ̅. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α̅, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ̅ τῷ θ̅. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ̅. εἰλήφθω δὴ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ λ̅, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ̅ τοσούτους, ὅσους ὁ δ̅ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ χ̅ τῷ λ̅. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἴσον ἴσους ἀπέχει ὅτε δ̅ ἀπὸ τοῦ α̅, καὶ ὁ λ̅ ἀπὸ τοῦ θ̅, τὰν αὐτὰν ἔχει λόγον ὁ δ̅ ποτὶ τὸν α̅, ὃν ὁ λ̅ ποτὶ τὸν θ̅. πολλαπλασίων δὲ ἐστὶν ὁ δ̅ τοῦ α̅, τῷ δ̅. πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ λ̅ τοῦ θ̅ τῷ δ̅. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ̅ τῷ χ̅. δῆλον οὖν ὅτι γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἵδε μὲν γὰρ οἱ α̅, β̅, γ̅, δ̅, ε̅, ζ̅, η̅, θ̅, τοσοῦτοι ἐντὶ ὅσους ὁ θ̅ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. οἱ δὲ ι̅ κ̅ λ̅ ἑνὶ ἐλάσσονες, ἢ ὅσους ὁ δ̅ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ̅, τοσοῦτοι ἐντί.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν, ἢ τετρωκοσομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστὶν, ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοσομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμόν, εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μείζον εἶμεν μυρίων. δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν

ἔχουσα

ἔχουσα τὰν διάμετρον, ὁ μεῖζον κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρα-
κισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμός, μονάδες τε ἀριθμὸς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυ-
ριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τῶν ρ̅ δακ-
τύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὸν διάμετρον
ἐφ᾽ ταῖς ρ̅ μυριάδεσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ᾽ ἀλλάλας τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας.
εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτη τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διά-
μετρον δακτύλων ρ̅, δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλα-
πλασιασθεισᾶν τᾶν δεκαμονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσιν. ὧδι δὲ τοῦ δευτέρων
ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τε τοῦ δέκα πλευρῶν ὀρθῶν
ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ
γενόμενος ἐκ τούτων ἐσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται
γὰρ ὅτι ἐν ἐλάσσονας ἀπὸ τᾶς μονάδος ὅσος ἐστὶν ἐλάττων συναμφοτέρων ὧν ἀπέχοντι ἀπὸ μονά-
δος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονά-
δι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτῶν χίλιαι
μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθες ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τε
τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πά-
λιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας
τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ταῖς ρ̅ μυριάδεσι. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα
τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσ-
σων ἐσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν ταῖν χιλιᾶν μυριάδων τοῦ δευ-
τέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσιν. ἐπειδὴ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκ-
καιδέκατος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ
αὐτῇ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ
μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμέ-
νων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τριῶν καλουμένων, καὶ ὁ
ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ με-
γέθους ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μυριά-
δες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαί-
ρας τᾶς ἐχούσης τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέ-
θεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν
τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς
σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ̅ μυριάδεσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου
σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων
ἐσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθεισᾶν τὰν δέκα μυριάδων
τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τοῦ τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ
εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογί-
ας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ
ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ
μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσα-
ρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν. φα-
νερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ
σταδίων ρ̅, ἔλασσον ἐστὶν ἢ χίλιαι μονάδες. τοῦ δὲ τετάρτων ἀριθμῶν, πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχου-
σα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον στα-
δίων ρ̅, ταῖς ρ̅ μυριάδεσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν
ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος
τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλίων μονάδων τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυ-
ριάδεσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τοῦ τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος
ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γε-
νόμενος ἐσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ
τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί,
οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τοῦ δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τοῦ τρίτων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ, τοῦ

τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἐλάσσων ἐσσεῖται ἢ ῑ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄, μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίας θεῖσαν. τᾶν δὲ μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄ μυριάδες, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον χιλίαν μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων εἰμὲν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἐκ τῶν καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτός ἐστι ῑ μυριάδων τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ῑ μυριάδες τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ῑ μυριάδων, τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν τᾶν ρ̄ μυριάδες. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ πεντακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὸν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτα, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, εἰμὲν ἐλάσσων ἐστὶ ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἄλλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίαν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων

σφαίρας

σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλαν τᾶν διαμέτρων φανερὸν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τῶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων α μονάδες δύο καὶ πεντακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος. ἀνάλογον δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δέ ἐστι τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πεντακισχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσον ἐστὶν ἢ α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελάνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσι πιστὰ, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην καὶ τινας οὐκ ἀνάρμοστον εἴη ἔτι ἐπιθεωρῆται ταῦτα.

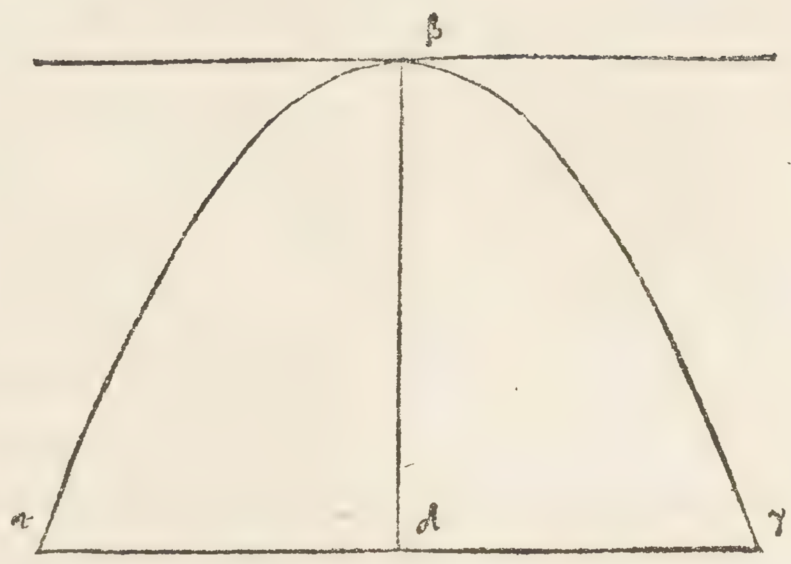
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

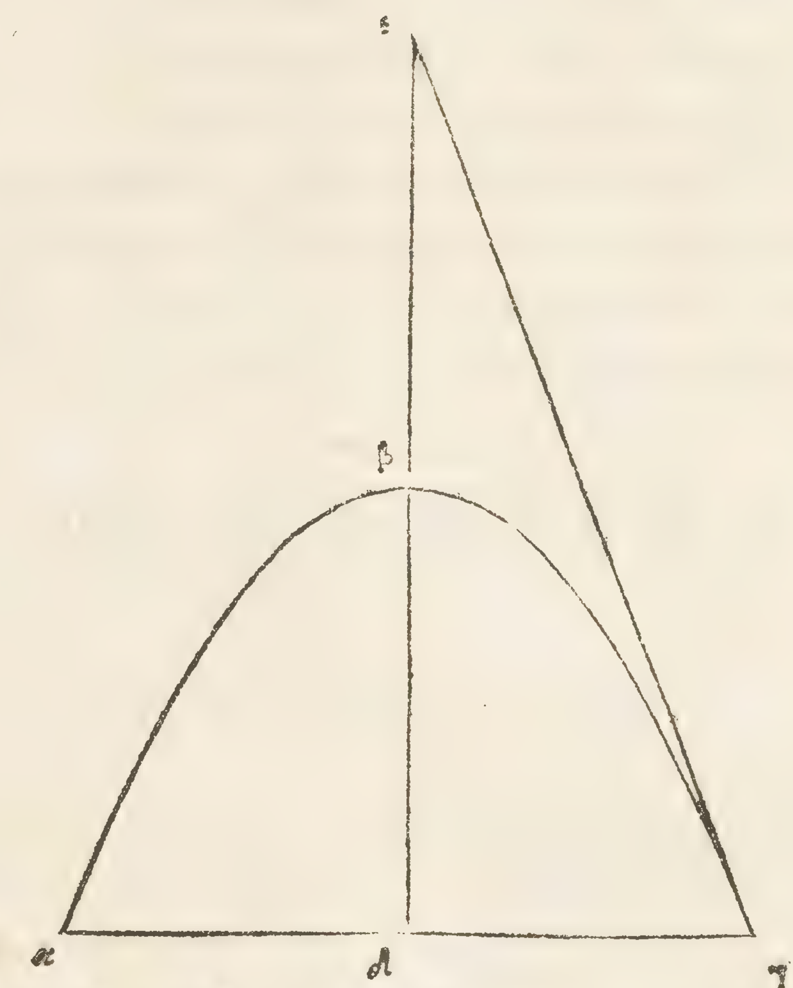
Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐλλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τινὰ δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεγενημένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινος. ἐπεχειρήσαμεν δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον. νῦν δὲ ὑφ' ὑμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθὲν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθὲν, τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησαν τινὲς γράφειν, ὡς δυνατοῦ ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθη, τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμῆμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ὑμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι, λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ, τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι. καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγγραφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι. ἄρτι δὲ τοῦ ταν ὁμοίαν πίστιν τούτου ἀναγμένον τῶν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μὲν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

Εἰκα

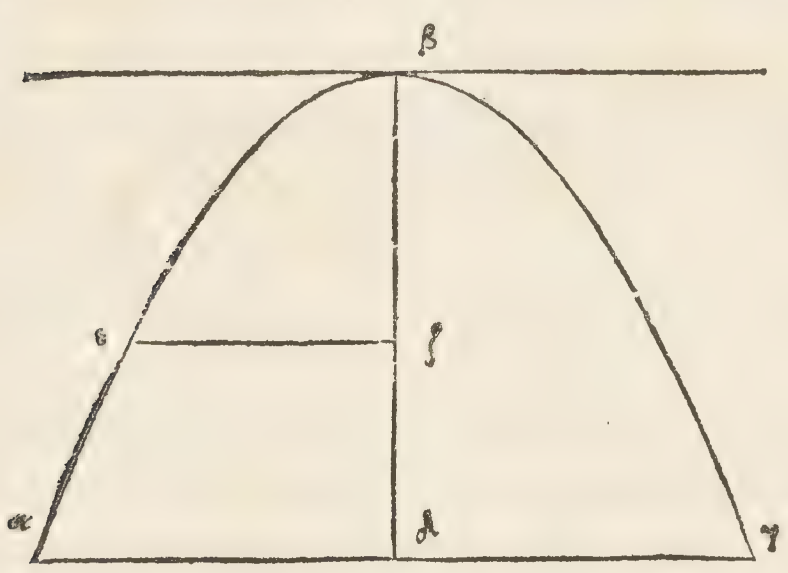
α Εἶκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ βγ, ᾖ δὲ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος. ἁ δὲ αδγ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, ἐσσοῦνται αἱ αδ, δγ ἴσαι.



β Εἶκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αβ, ᾖ δὲ ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ αδγ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ γ, ἐσσοῦνται αἱ δβ, βε ἴσαι.



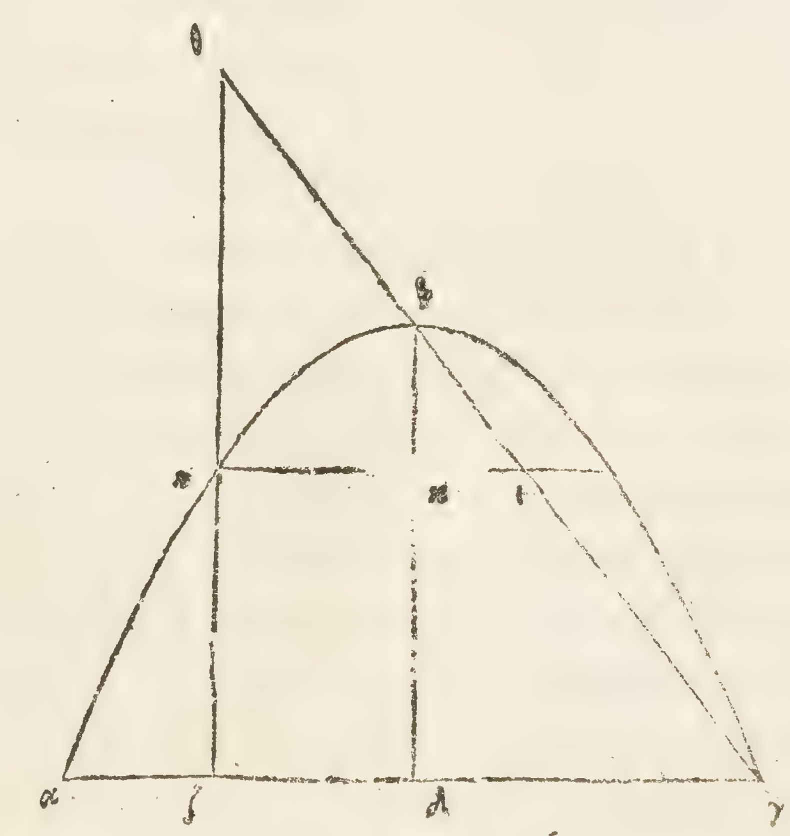
γ Εἶκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αβ, ᾖ δὲ βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ ἁ διάμετρος, καὶ ἀχθῶσι τινὲς αἱ αδ, εζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ



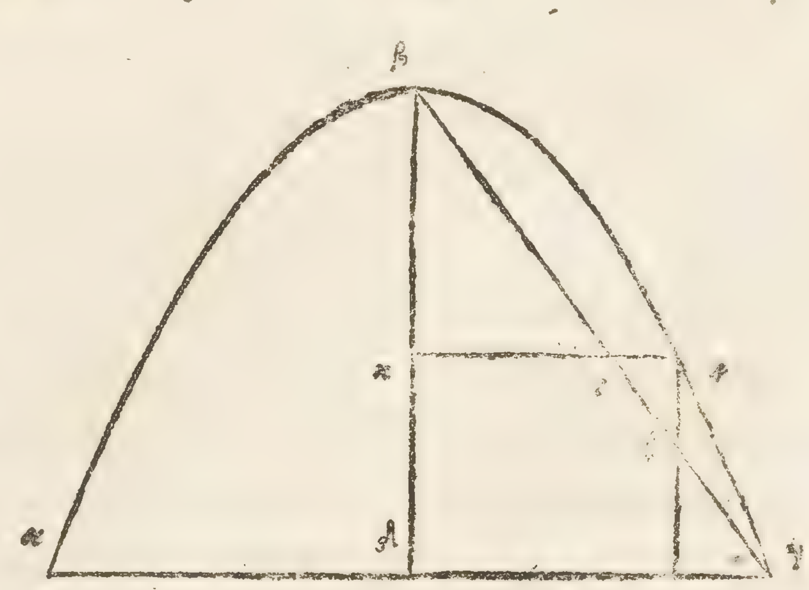
κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ βδ μάκει ποτὶ τὰν βζ, οὕτως δυνάμει ἁ αδ ποτὶ τὰν εζ, ἀποδέδεικται δὴ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ αβγ. ἁ δὲ βδ ἀπὸ μέσας τᾶς αγ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὴ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ βγ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή καταχθείη τις ἄλλη ἁ ζθ παρὰ τὰν βδ τέμνουσαν, * τὰν διὰ τῶν αγ εὐθειᾶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζθ ποτὶ τὰν θη, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν δζ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ παρὰ τὰν αγ ἁ κη. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ βδ ποτὶ τὰν βκ μάκει, οὕτως ἁ δγ ποτὶ τὰν κη δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ βγ ποτὶ τὰν βι μάκει, οὕτως ἁ βγ ποτὶ τὰν βθ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βθ, ὃν ἁ γθ ποτὶ τὰν θι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γδ ποτὶ τὰν δζ, οὕτως ἁ θζ ποτὶ τὰν θη. τᾷ δὲ δγ ἴσα ἐστὶν ἁ δα. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δα ποτὶ τὰν δζ, ὃν ἁ ζθ ποτὶ τὰν θη.

* τέμνουσα ἑκατέραν τὰν αγβ εὐθεῖαν

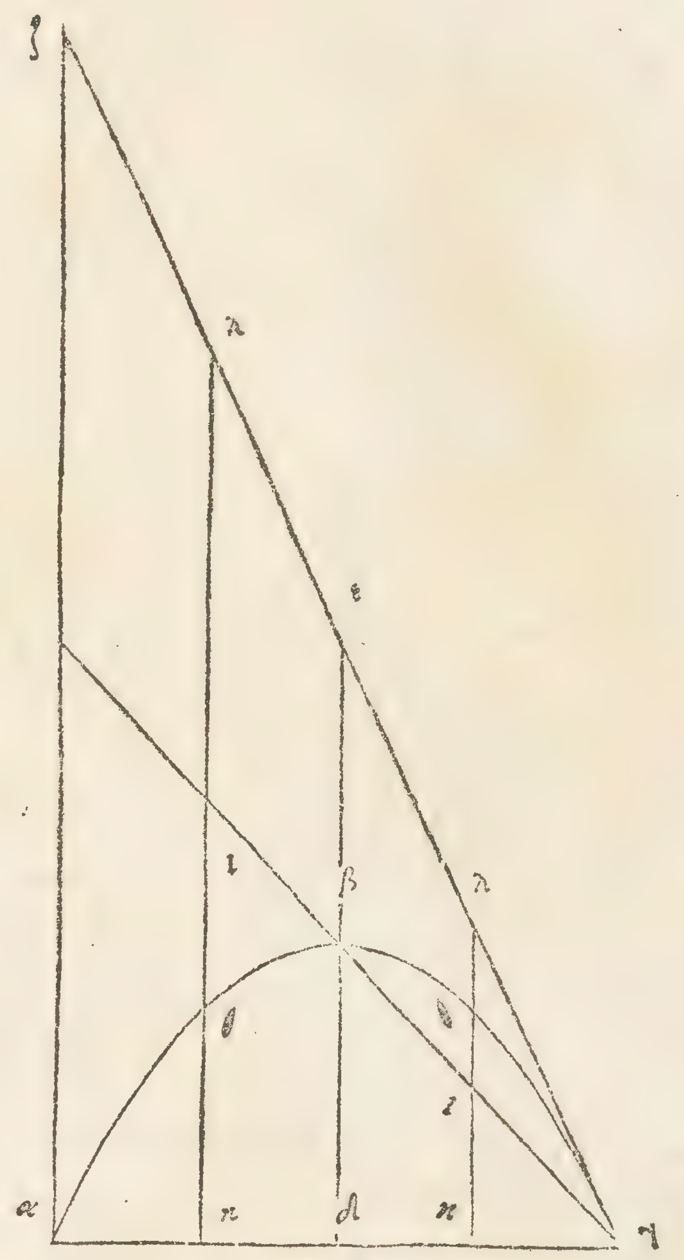


ε Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ αβγ. καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζα, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς



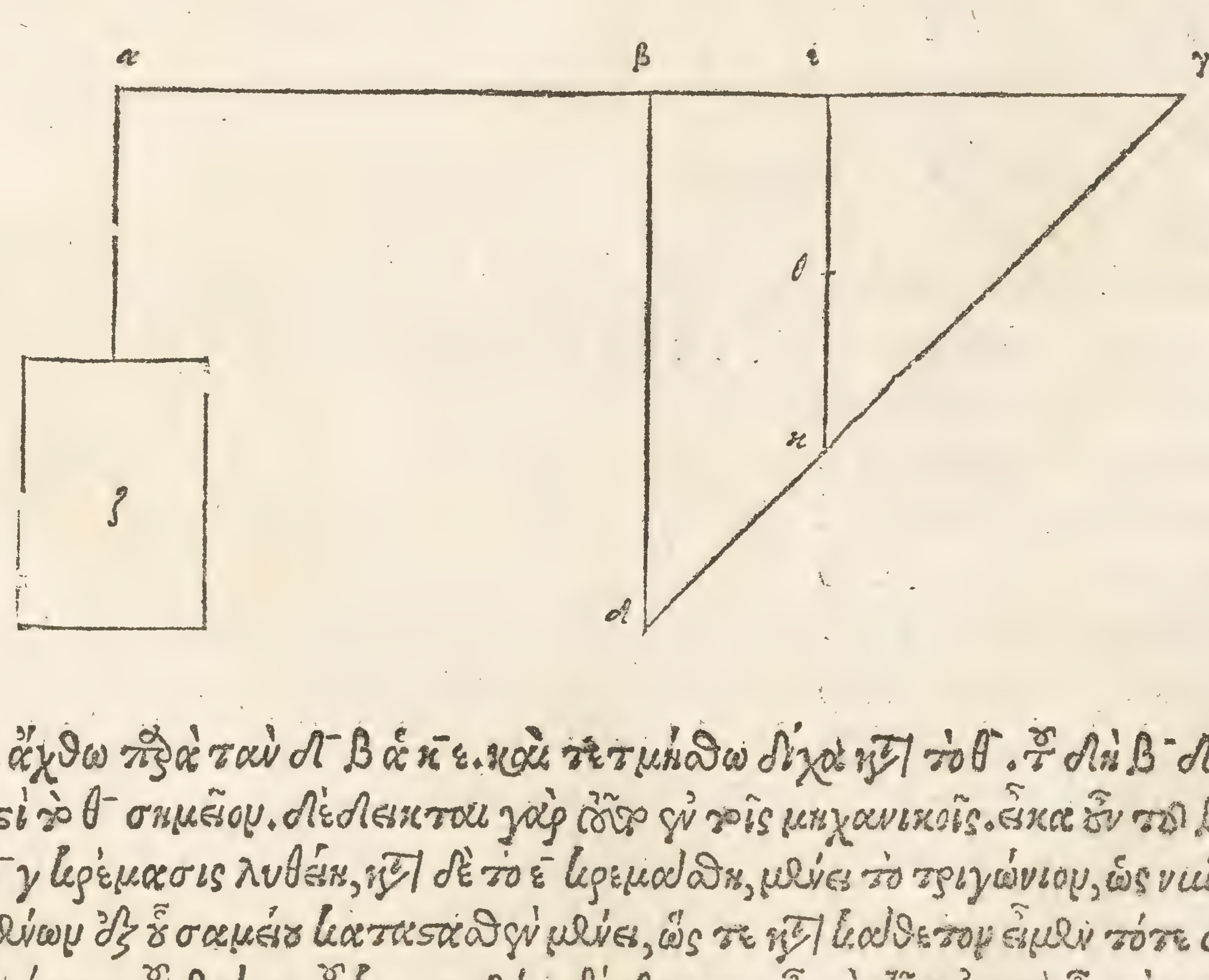
κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γζ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζαγ τριγώνῳ παρὰ τὰν αζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ αγ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς αγ ποτὶ τὸ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δε παρὰ τὰν αζ. καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δε τὰν αγ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αβγ, καὶ ἀγμένη ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ αδ, δγ ἴσαι. ἐσσεῖται τᾷ αγ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἁ δε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γε, ἅ ἐστι ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δγ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα, ἴσα ἐστὶν ἁ εβ τᾷ βδ. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ αδ ποτὶ τὰν δγ, ὃν ἁ δβ ποτὶ τὰν βε. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν αγ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κλ παρὰ τὰν αζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ακ ποτὶ τὸν κγ, ὃν ἁ κθ ποτὶ τὰν θλ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἁ βε τᾷ βδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἁ ιλ τᾷ κι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κι, ὃν ἁ αγ ποτὶ τὰν δα. ἔχει δὲ καὶ ἁ κι ποτὶ τὰν θκ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν ακ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κθ ποτὶ τὰν θλ, ὃν ἁ ακ ποτὶ τὰν κγ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.



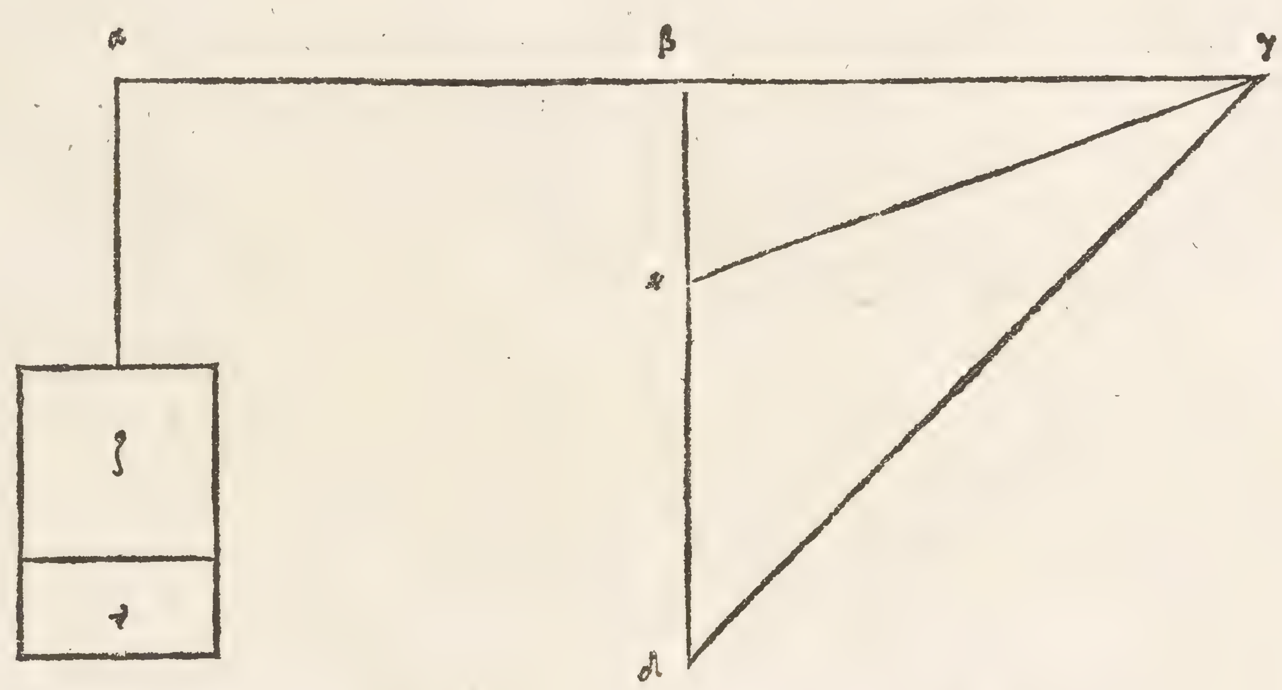
ϛ

Νοείσθω δὲ τό, ὅτι ἐστὶ τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον ὑπὲρ ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς αβ γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν ὑπὲρ τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ὑπὲρ θάτερα ἄνω. τὸ δὲ βδγ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὴν ἔχον τὰν ποτὶ τὰ β γωνίαν, καὶ τὰν βγ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσης οὔσης τᾶς αβ τῇ βγ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν βγ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ βδγ τριγώνῳ, οὕτως ἐόντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ βδγ τριγώνου μέρος τρίτον εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορρόπων ὁ ζυγός ἐκ, καὶ ἁ αγ γραμμὰ αὐτόν. ὁρίζονται δὲ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ αγ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμήσθω δὴ ἁ βγ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γε τᾶς εβ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δβ ἁ κε. καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὴ βδγ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σημεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἴκα οὖν τοῦ βδγ τριγώνου, ὁ μὲν κατὰ τὰ βγ κρέμασις λυθείη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μένει τὸ τριγώνιον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἐξ οὗ σαμείου κατασταθῇ ἐν μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ βγδ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ βδγ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπεπόνθει τοῖς μα-

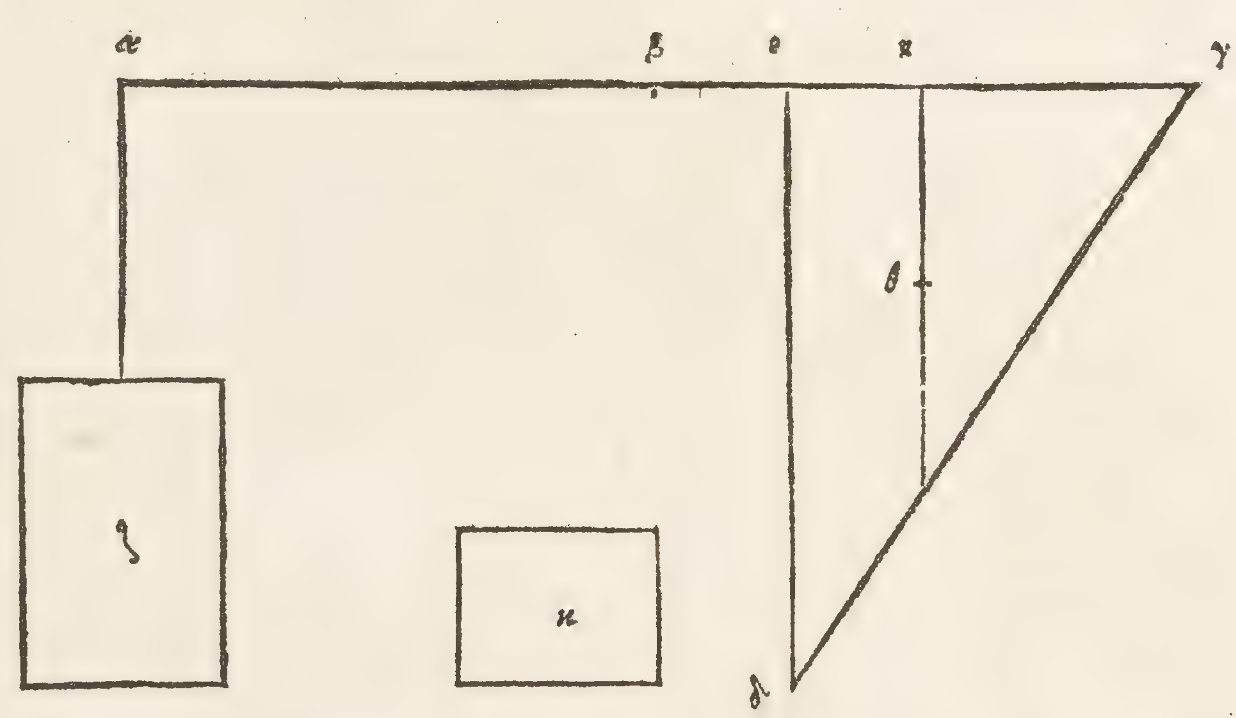


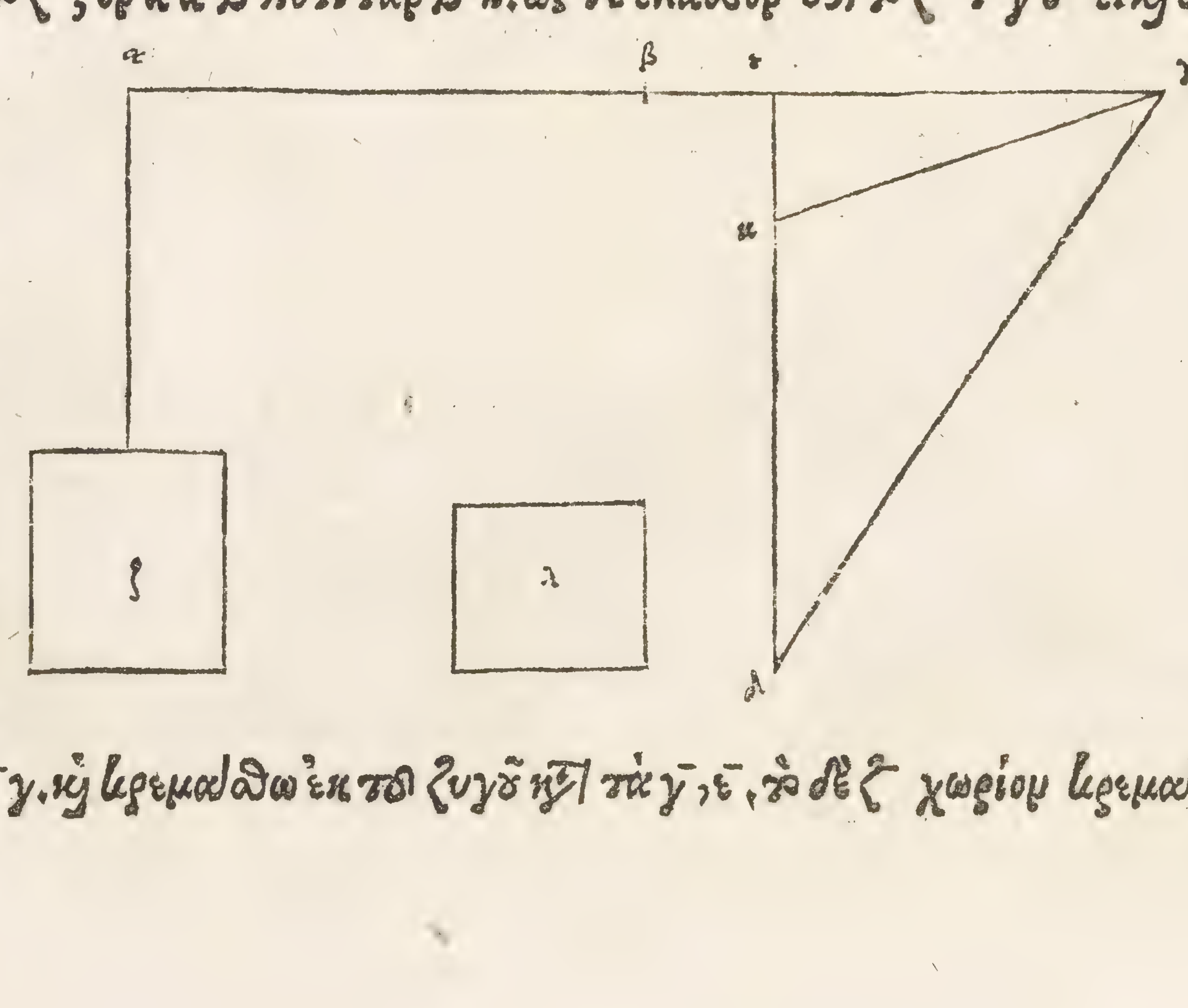
κεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ βδγ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ αβ τᾶς βε. καὶ τὸ βδγ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τριπλάσιον ᾖ τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ αγ γραμμά, μέσον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ β. καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ β τὸ γδη τρίγωνον. τὸ δὲ γδη ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον τὰν δη, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δγη τρίγωνον ἐκ τῶν βγ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ γδη τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γδη τριγώνου. κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ βγη τριγώνου. ἰσορροπήσει δὲ τὸ βδγ τρίγωνον τῷ ζλ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν βγη τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ βγδ τῷ ζλ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ βγδ τὸ ζλ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γδη τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.



η Ἔστω ζυγὸς ὁ αβ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ β τὸ γδε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰν ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γδε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γδε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δεγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἁ θη ἄχθω παρὰ τὰν δε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γδε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ γδε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βη. ὥστε ἔλασσον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ γδε. καὶ ἐπεὶ τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ βα ποτὶ τὰν βη, ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ βα ποτὶ τὰν βε. δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γδε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ κ.

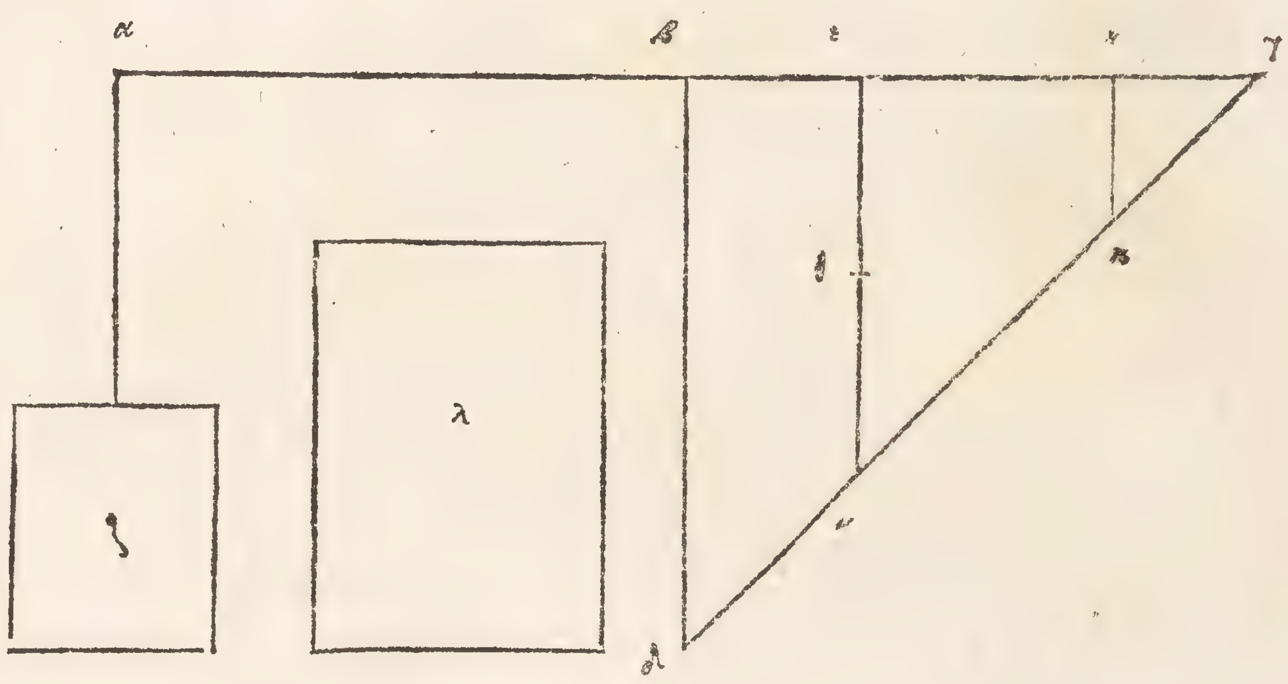




θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γδκ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν δκ, ὕψος δὲ τὰν εγ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γ, ε, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ

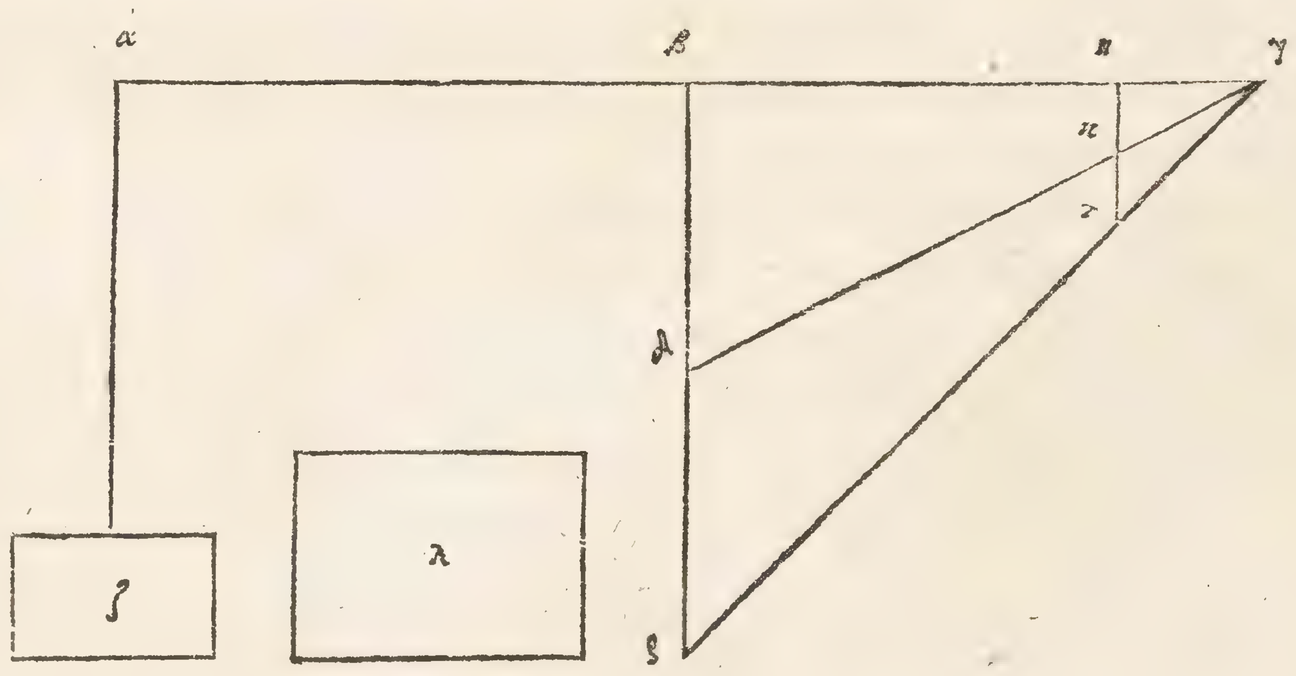
ἐπὶ τὸ α, ἰσορροπείτω τῷ δεκ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ κ τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ δ γ κ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α β γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ β δ κ η τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β κ σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον. τὰν δὲ κ δ πλευρὰν, ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ β α ποτὶ τὰν β κ, τοῦτον ἐχέτω τὸ β δ κ η τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ β δ κ η ι
τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ β κ σημεῖα. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ β δ κ η τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμάσθω γὰρ ἁ α γ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε



ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τῆς δ β, καὶ ἁ κ η ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κ η, καὶ τῆς β δ, τοῦτον ἔχειν τὰν ε κ ποτὶ τὰν β ε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν β δ ἀχθεῖσα ἁ ε ν τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ θ, τοῦ δὲ β δ κ η τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἂν οὖν τὸ β δ κ η τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν β κ σημείων λυθείη, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ β δ κ η τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ κατὰ τὸ α κρεμαμένῳ, ἔσσεται ὡς ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, τὸ β δ κ η τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ β δ κ η τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ α β ποτὶ τὰν β ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν β κ. ὥστε ἔλασσον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ λ.

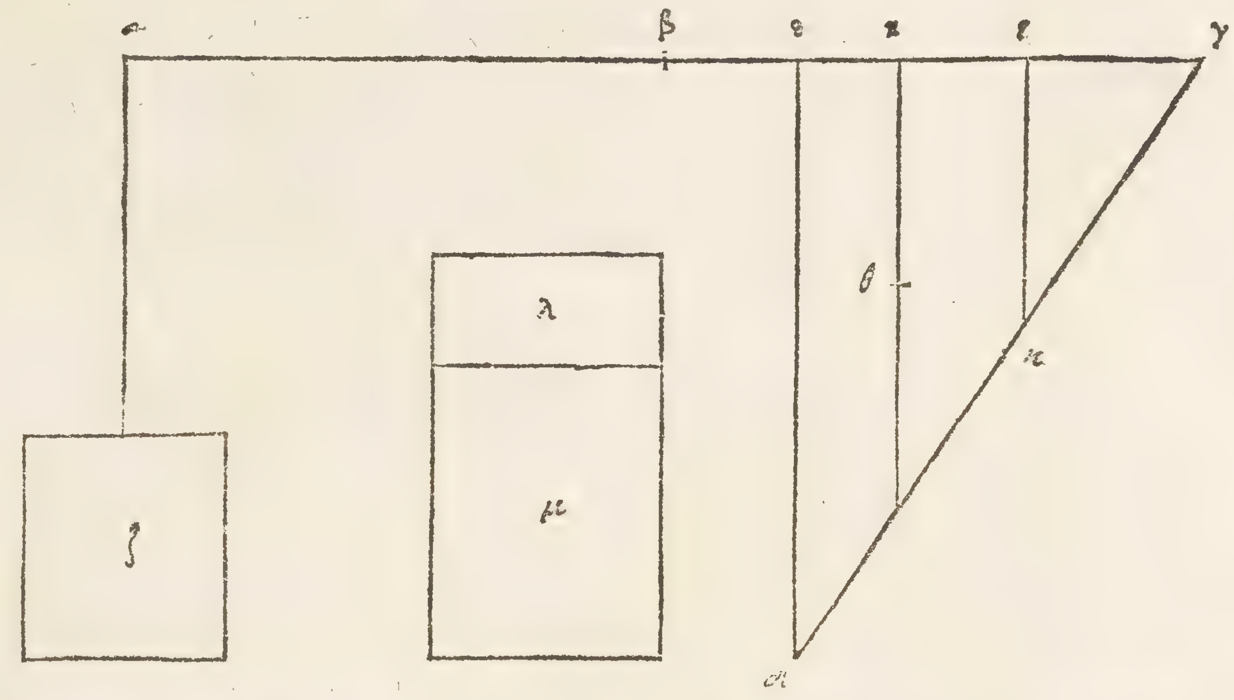
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κ δ τ ρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ια
κ δ, τ ρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας. τὰς δὲ δ ρ κ τ καθέτους ἐπὶ τὰν β γ. καὶ ἁ δ ρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β κ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ τ ρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δ κ τ ρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ



τὸ β, κ, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ ζ τῷ δ κ ρ τ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ.

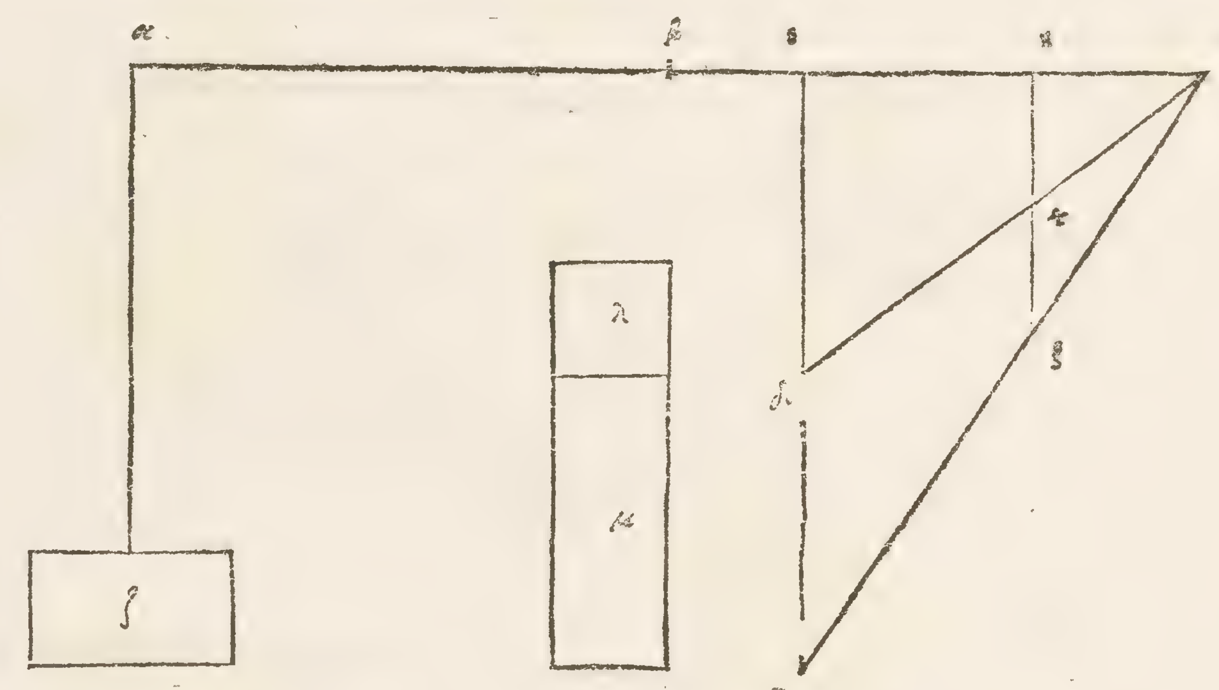
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δ κ ε η τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν πο ιβ
τὶ τοῖς ε, η σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κ δ, ε η γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β η, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον, ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δ κ ε η τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἔλαβον γὰρ τοῦ δ κ ε η τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. ληφθήσεται δὲ ὁμοί-

ὡς τῷ πρότερον. καὶ ἄγω ταν θι παρὰ τὰν δε. ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, κ λυθῆ. μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσοῤῥοπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσοῤῥοπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν,



ὅτι τὸ δηεκ ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζον ἐστὶ, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

ιγ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, κ. τὸ δὲ ζ χωρίον κεκρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσοῤῥοπήτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν

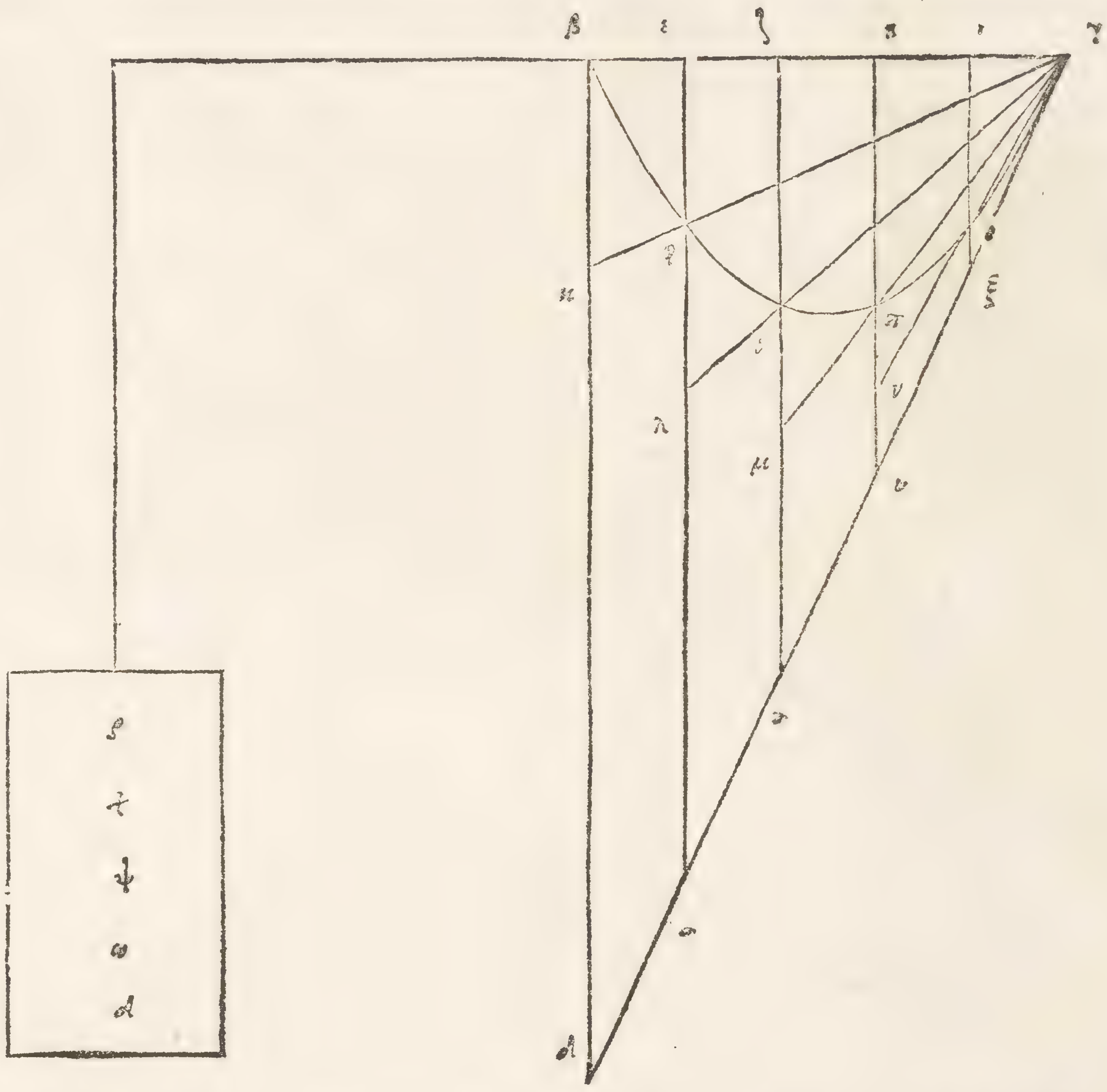


βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκ, τρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βκ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

ιδ Ἔστω τμῆμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ πρὸς ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ ταν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον, διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τὰ τμήματα. ὁπόσα οὖν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπεζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιω, καὶ τοῦ ιογ τριγώνου, μεῖζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἡ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ βγ. ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρους ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρχψωδ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσοῤῥοπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ θη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ ξιγ τριγώνῳ. ἰσοῤῥοπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστι τμῆμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ ταν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἦκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ ταν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ ταν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ ταν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ ταν βζ τὸν αὐτὸν ἔ-

χειν

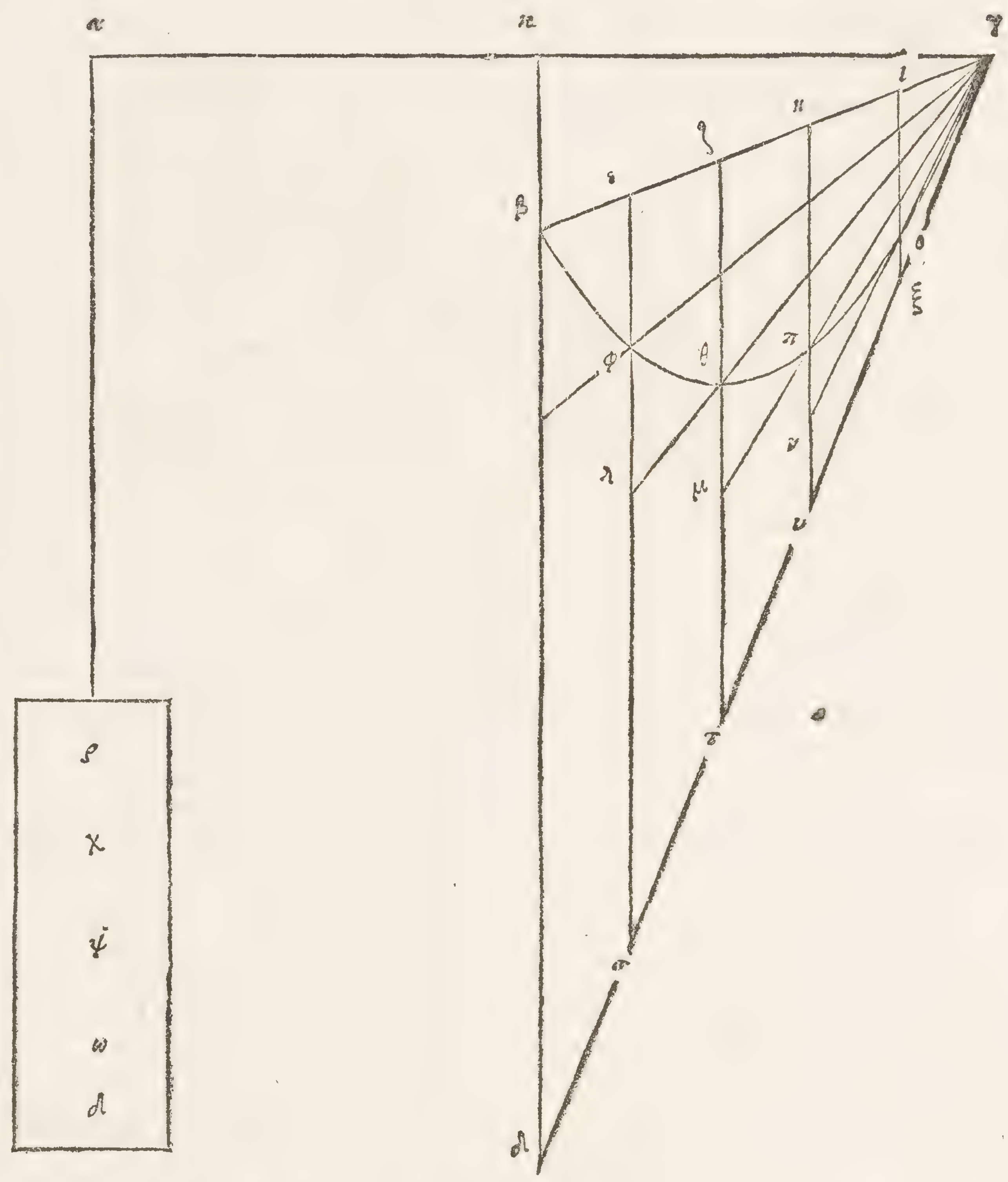
χειν λόγον, ὃν τὸ σζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. ποτὶ δὲ τὰν βη, ὃν τὸ τη ποτὶ τὸ μη. ποτὶ δὲ τὰν βι, ὃν τὸ υι ποτὶ τὸ νι. ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ δε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς βε σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας. ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἔστιν ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ τὸ ζσ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ στ νευούσας ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ



τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἔστιν, ὡς μὲν ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζφ. ὡς δὲ ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. εἴη ἂν καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζφ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μη τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θη μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν νοι τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ πι μεῖζον. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξιγ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γιο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κε τραπέζιον μεῖζον ἐστι τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λζ τοῦ χ, τὸ δὲ μη τοῦ ψ, τὸ δὲ νι τοῦ ω, τὸ δὲ ξιγ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ρχψωδ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρχψωδ τρίτον μέρος τοῦ αγδ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ βγδ τρίγωνον ἔλασσον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τῶν κε, λζ, μη, νι τραπεζίων. καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζφ τραπέζιον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θη τοῦ ψ, τὸ δὲ ιπ τοῦ ω, τὸ δὲ ιογ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ δωψχ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ βδγ τρίγωνον μεῖζον ἐστὶν, ἢ τριπλάσιον τῶν φζ, θη, ιπ τραπεζίων, καὶ τοῦ ιγο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

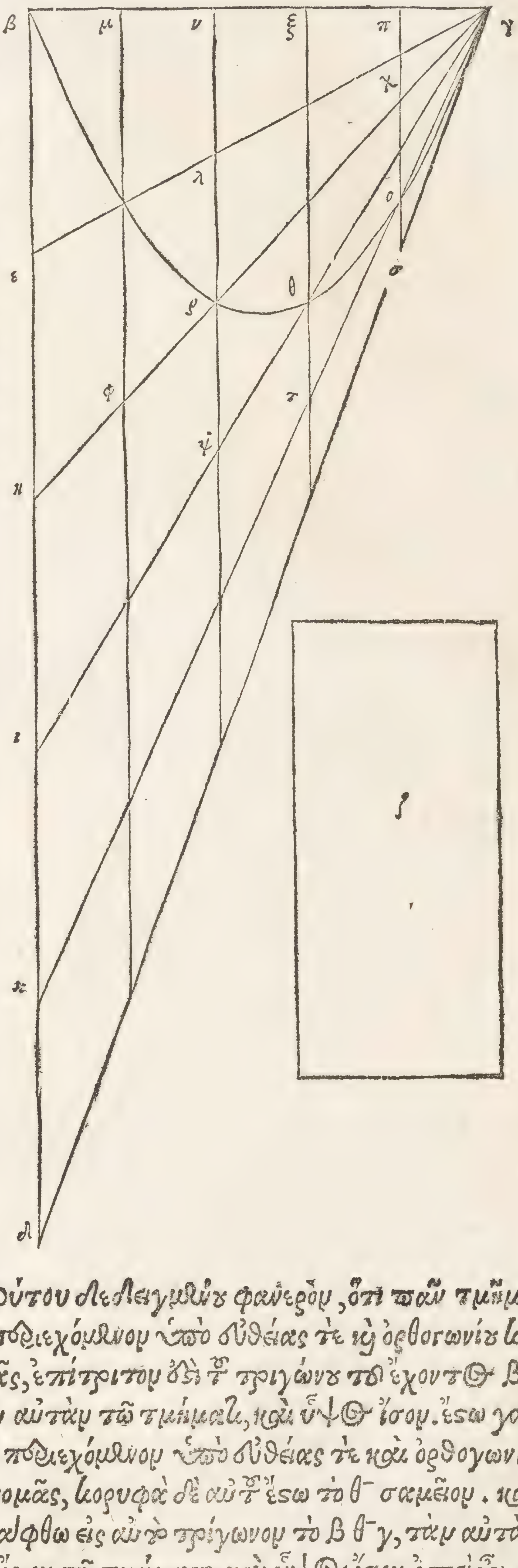
Ἔστω πάλιν τὸ βθγ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ βγ ιε
μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὲ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τοῦ τμήματι, ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν βγ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πρὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ βδ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ βγ εἰς τμήματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, ιγ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ες, ζτ, ηυ, ιξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ' ὃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φημὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ βδγ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν βφ, λζ, θη, πι, καὶ τοῦ γιξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ γοι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἡ δβ ἐπὶ θάτερα ἀγαγὼν κάθετον τὰν γκ, τᾷ γκ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ακ. νοείσθω δὲ πάλιν ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γκδ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γκ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν

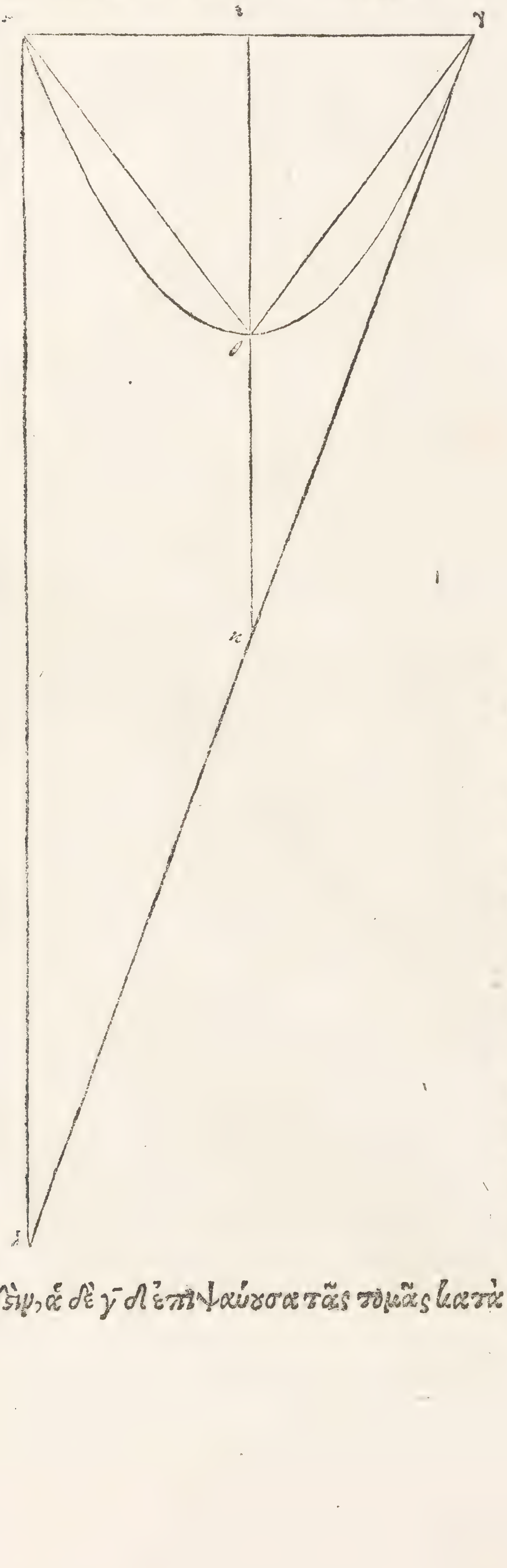
κατὰ τὸ α τὰ ρχψωδ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δε τραπεζίῳ ἰσορροπείτω, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ γιξ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δβγ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ρχψωδ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ βφ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν θε τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζφ ἔλαττον. καὶ τὸ μὲν μη τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου. τὸ δὲ ηθ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν νι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ πι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξιγ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου. τὸ δὲ γιο ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστιν.



ις Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ βδγ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ βθγ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ βγδ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ βε μέρος τᾶς βδ. διῃρήσθω οὖν ἁ βδ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσιων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰν γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ γδ ἐπιψαύουσά ἐστιν αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομάν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μφ, νρ, ξθ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν βδ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ βγε τρίγωνον, ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ βγε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι. δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ με, φλ, θρ, θο, καὶ τὸ γοσ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ με τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ μλ ἴσον τῷ φλ, καὶ τὸ λξ ἴσον τῷ θρ. καὶ τὸ χξ ἴσον τῷ οθ. καὶ τὸ γχπ τρίγωνον τῷ γοσ τριγώνῳ. τὸ δὴ ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν μλ, ξρ, πθ, καὶ τοῦ πογ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ βδγ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ βδγ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μλ, ρξ, θπ τραπεζίων, καὶ τοῦ πογ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ βθγ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ βδγ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου.

γώνου. ἔστω οὖν τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ βθγ τμήματος, τὸ βεγ τρίγωνον, καὶ τὸ βθγ τμῆμα ἀμφότερα ἐλάσσονα γίνεται τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν εμ, φν, ψξ, πτ, καὶ τοῦ γπσ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ βδγ τοῦ μὲν ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ βγε τρίγωνον, καὶ τὸ βθγ τμῆμα τῶν τετραπλεύρων τῶν εμ, φν, ξψ, πτ, καὶ τοῦ γπσ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γβε τρίγωνον, τῶν περιλειπομένων χωρίων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ βεγ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς εμ, φλ, θρ, θο. καὶ τῷ γοσ τριγώνῳ, ἅ ἐστιν μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ βθγ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμῆμα τῷ ζ χωρίῳ.



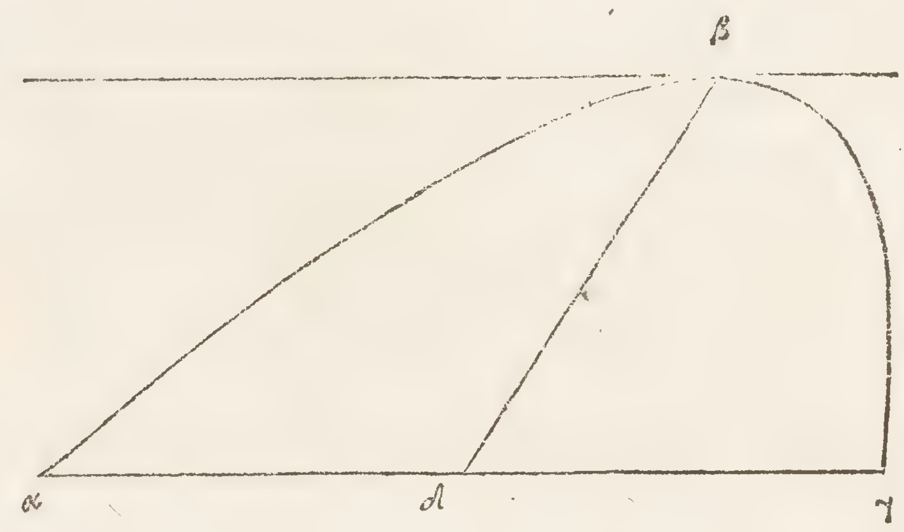


Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα ιζ
περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ βθγ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν βγ. καὶ ἁ βγ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ εθ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν κθ παρὰ ταὶν διάμετρον ἐστίν, ἁ δὲ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ εγ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς το-

μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ β δ γ τρίγωνον τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ β θ γ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον, τοῦ μὲν β θ γ τμήματος τριπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτον ἐστὶ τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ β θ γ τριγώνου.

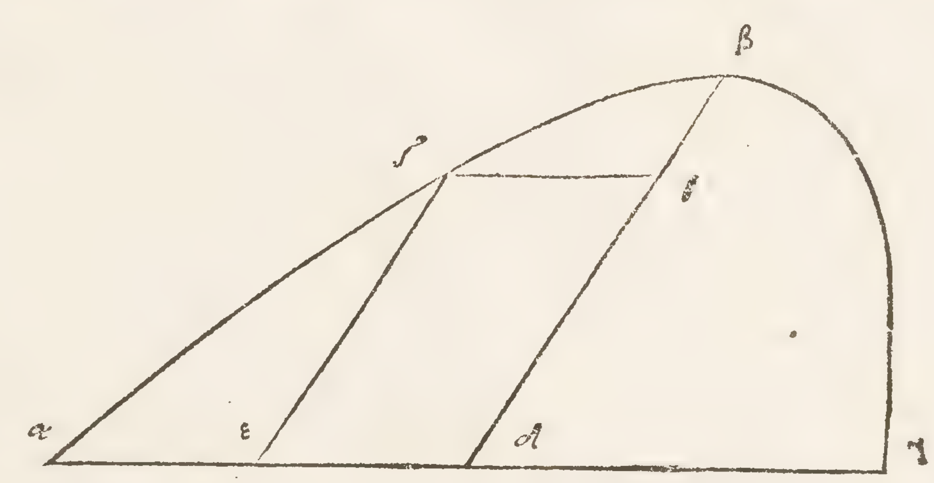
Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη Εἴκα ἐν τμήματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθῆ εὐθεῖα παρὰ ταὺ διάμετρον, κορυφὰ ἐσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ α β γ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ ἄχθω ἁ δ β παρὰ ταὺ διάμετρον.



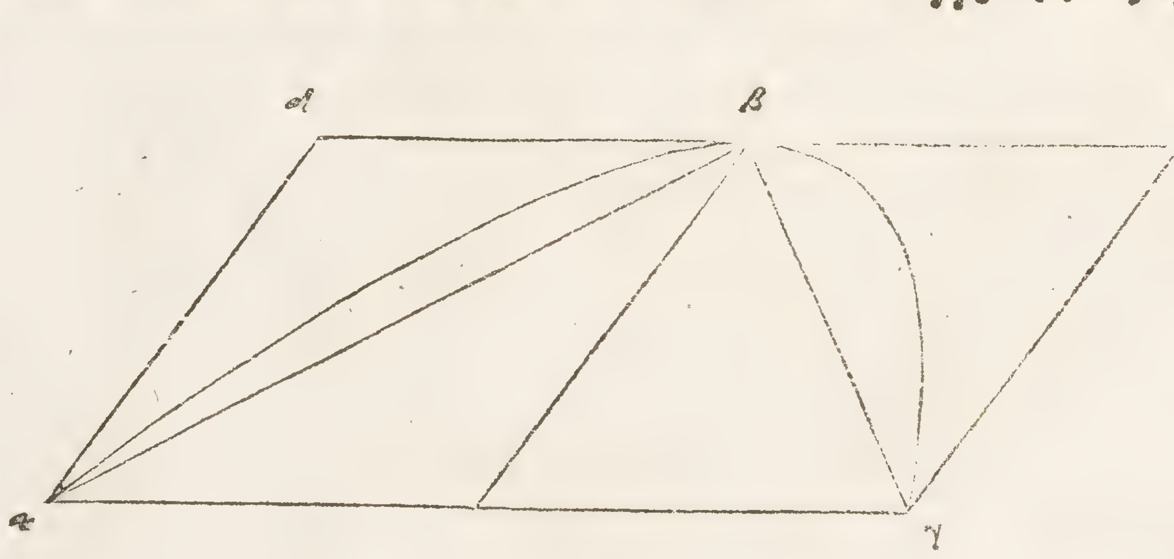
ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου τομᾷ ἁ β δ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ α δ, δ γ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε α γ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστὶ τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον.

ιθ Εἴκα τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν β δ, ἀπὸ μέσας τᾶς α γ, ἁ δὲ ε ζ ἀπὸ μέσας τᾶς α δ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζ θ παρὰ α γ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται. καὶ αἱ α δ, ζ θ παρὰ τὰν κατὰ τὸ



β ἐπιψαύουσαν. ἐσαι μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μάκει, ὃν ἁ α δ ποτὶ τὰν ζ θ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ β δ τᾶς β θ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτος ἐστὶν ἁ β δ τᾶς ε ζ μάκει.

κ Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῆ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἔσαι τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ α β γ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγ-

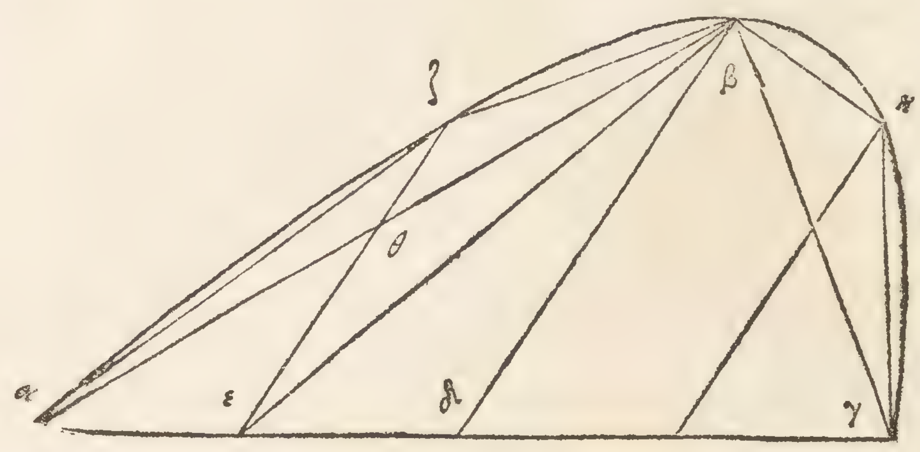


καῖον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶναι τοῦ τμήματος. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ α γ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς, ἄχθω ἁ δ ε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν α γ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ α δ, γ ε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισυ ἐστὶ τὸ α β γ τρίγωνον τοῦ α δ ε γ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος. δεδειγμένου, δῆλον ὅτι ὡς ἐς τὸ τμῆμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα,

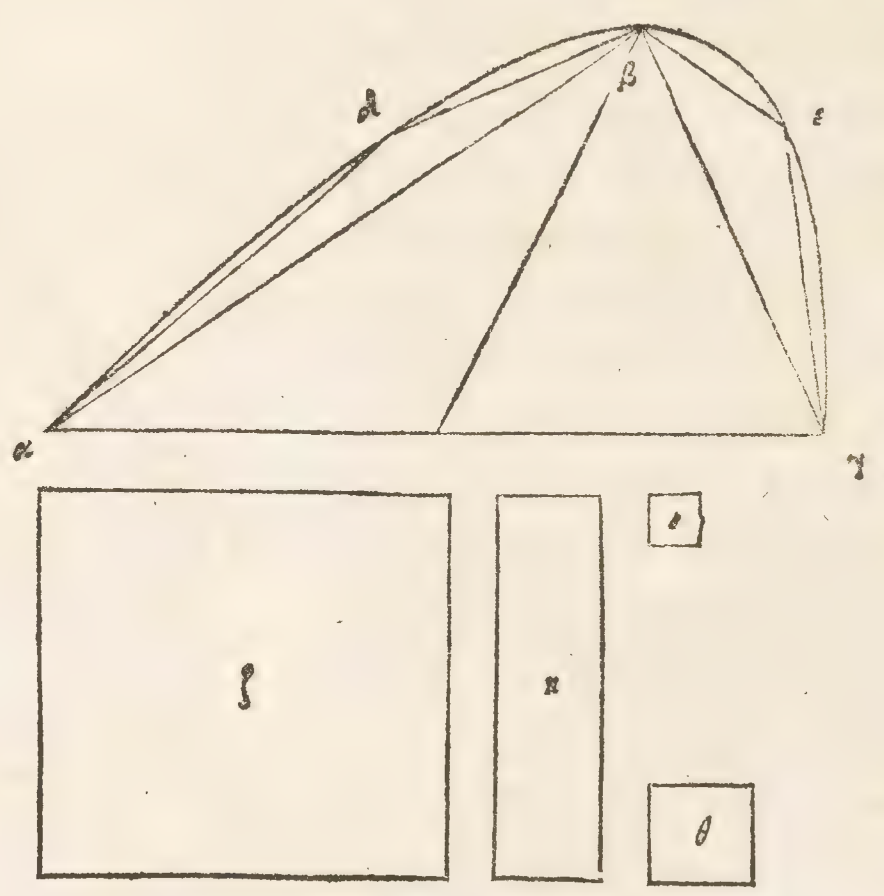
τοῦ

τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος ἢ τοῦ ἡμίσεος, διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιήσομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἔσται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμῆμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ αβγ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμήσθω ἁ αγ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ βδ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμήσθω δίχα ἁ αδ τῷ ε. κὰι ἄχθω ἁ εζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμήσθω δὲ ἁ αβ κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφή ἐστι τμάματος τοῦ αζβ. τρίγωνον ἄρα τὸ αζβ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ αζβ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αβζ τριγώνου. ἔστιν οὖν ἁ βδ τᾶς μὲν εζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ εθ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ εθ τᾶς θζ. ὥστε καὶ τὸ αεβ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζβα. τὸ μὲν γὰρ αεθ διπλάσιόν ἐστι τοῦ αθζ. τὸ δὲ θβε τοῦ ζθβ. ὥστε τὸ αβγ τοῦ αζβ ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ βηγ τμῆμα ἐγγραφέντος.

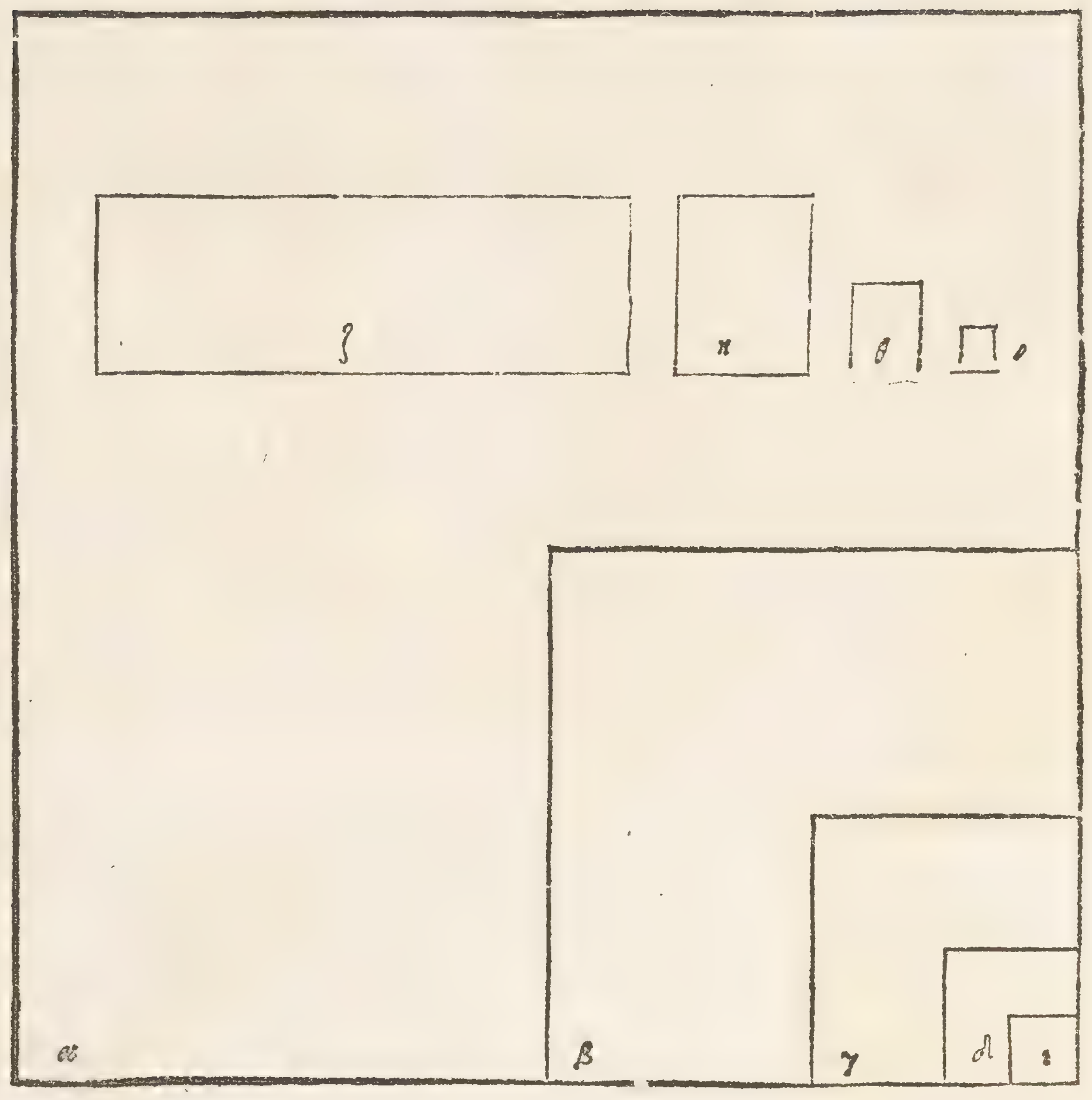


Εἴκα ᾖ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέοντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἔσται τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ αδβεγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμῆμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμημάτων τὰ δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν αβδ, βεγ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτά ἐστι καὶ τὰ αδβ, βεγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσων ὄντων τῷ θ. καὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμῆμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τοῦ τμήματος.

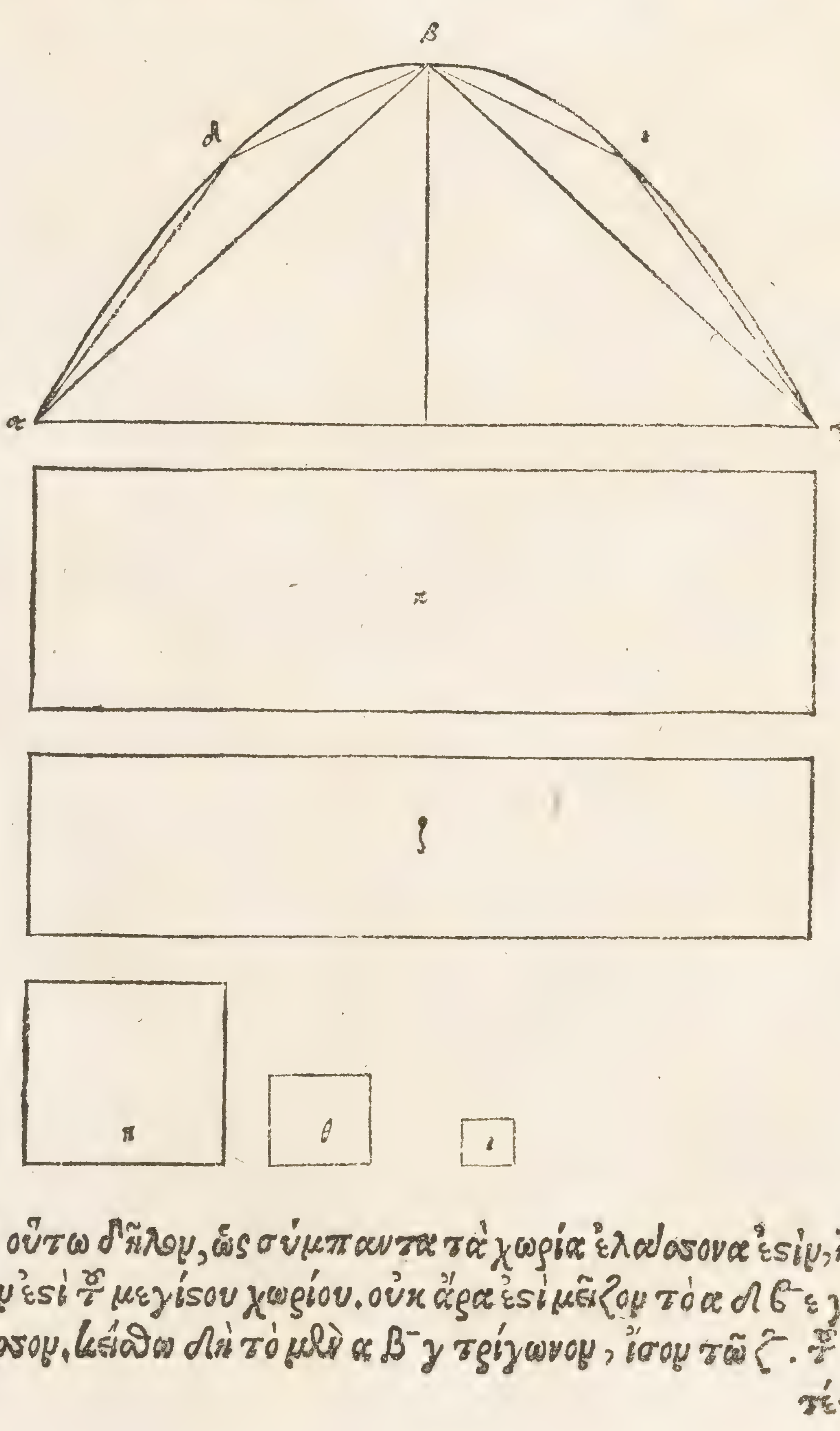


Εἴκα μεγέθεα συντιθέωνται ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλάσιονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστί, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ. καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ, καὶ

δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι, τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν α β γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, ταὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμήματι. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ ε β τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, ταὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα ταὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων. ἔπειτα δὲ, ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐστὶν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ τέταρ-



τέταρτον τὸ η. καὶ ὁμοίως τοῦ η τὸ θ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω. ὥστε καταγίνηται τὸ ἔσχατον ἔλαττον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ι. ἔστι δὲ τὰ ζηθι χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ι, ἐπίτριτα τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ κ τοῦ ζ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ τοῖς ζηθι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ι. ἐπεὶ οὖν τὸ κ χωρίον τῶν μὲν ζηθι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ ι, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐστι τὰ ζηθι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ, ὅτι ἐὰν ἦ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ αδβεγ τμῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ κ χωρίου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ κ. τὸ δὲ κ χωρίον ἐπίτριτον ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου. καὶ τὸ αδβεγ τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ παραβολῆς τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ
ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN AR-
CHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET
cylindro, atq; alios quoſdam, Commentaria, nunc primum & Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæſ. Maieſt. gratia & priuilegio, ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO *BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ* AC OGRODZENETZ HÆREDI, CASTELLANO BYERENSI, *Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouienſi, &c. Domino & patrono ſuo obſeruandiſſimo, Thomas Venatorius ſeſe commendat.*

OMnes, qui ad ſummos honeſtarum artium gradus uſq; aſcendere ſtudent, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirũ contempta ordinis ratione, omnia paſsim confundi ſit neceſſe. Non minus autem in literarum ſtudijs, quàm in alijs rebus uniuerſis, ipſa parens rerum, ordinẽ eſſe uoluit, Natura. Vt enim à ſummo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, fruſtra & oleum, quod autem, & operam inſumit: ſic qui ueræ philoſophiæ campos ſpacioſiſsimos ingreſſi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes ſiſtunt, nec ipſam ſegetem ac meſſem integrè legerint, aut ſaltem apis in morem deguſtauerint, doctos inter uerè quomodo recenſeri poſſint, non equidẽ uideo. Sed ad hæc gradatim, ſuſpenſisq; interim pedibus concedendum eſſe, iampridem à maioribus noſtris accepimus. Neque temere ſibi quiſquam docendi prouinciã uſurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non raró enim arrogantia comitatur doctorem, ſæpe etiam ſui complacẽtia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipſum ſtatim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere conſueuerunt. Diſcipulus etſi abiectus uideatur mundo, ipſum tamẽ quia humilitas animi commẽdat Deo, ſecurè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, ſiue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à noſtris ſtudijs minime cupiam excludi, ſed potius conſtantiſsimè ſeruandam eſſe nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipſa à Græcis ob id uocatur εὐταξία. Et recte profectò hæc ita eſſe à doctis cenſentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio ſibi minus conſtare contigerit, ſequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: deniq; contempto ordine, experimur in urbibus & familijs ſeditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo compræhendam multa, in animabus noſtris regnabunt peccata. Cum tanta ſit in rerum omnium natura, illa ordinis obſeruatio, in rectis ſtudijs abſoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autẽ, ſi ſecus quàm à fundamentis ad ſumma contenderemus. Neq; enim ſacrum illum omniũ diſciplinarum circulũ abſoluerit unquã, qui minutas aliqui faſtidiẽs, ſummas tantum aſſequi conatur artes. Ad ſumma cõtemplanda, niſi per

gradus quoſdam, non admittitur animus. Senſiſſe hoc idem Plato uidetur, cum ueſtibulo Scholæ ſuæ inſcriberet, Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua utiꝗ ſentētia ſignificare uoluit, inutiles eſſe ad percipiendas liberales diſciplinas, qui nulla Muſices præſertim, & Geometriæ principia poſuiſſent. nempe quòd hæ diſciplinæ, imagines rerū, quæ humanis ſaltem ſtudijs capi poſſunt, oculis mundi ſubijcere & poſſint & ualeant. Ipſa certè γεωμετρία mentem noſtram, ſuo ordine quàm longiſſimè tandem à rebus caducis abducit, ut iam non in terra infernè, ſed cœlo potius ſupernè, inhęrere cupiat, ac rebus ipſis delectari, quæ ut ſummè bona ſunt, ita nullam unquam permutationem admittūt. Quid quod magna pars Sacræ ſcripturæ obſcura nobis erit, niſi Geometrica proportione expendat ea pius lector. Templi Hieroſolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia traditur? quæ omnia, niſi Geometrica proportione ſeruata, imparati & inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto ſtudio præcipit diuinus ſermo, de conſtruendis columnis? adeò ut omnia Geometrica ratione conſtarent, ſtylobaſtagmata, baſes quoꝗ, & ſpiræ: ſcapus deinde, ac plinthus ipſa qualis eſſe deberent, cum ipſis cymacijs, faſcijs, ſcotijs, ſtrijs, canaliculis, epiſtilijs, quæ omnia quàm longa & lata, quàm alta & profunda eſſent, per Geometricas rationes ſpiritus diuinus ſapientiſſimè commonſtrauit: quæ res animum hominis non tantum in admirationem, ſed etiam in cognitionem Opificis rerum, inducere equidem euidentiſſimè queant. Claruit in hiſce diſciplinis apud Syracuſas olim Archimedes, qui neſcias an doctior, an patriæ ſalutis fuerit amantior. Is quia ſcripſerat quædam, quæ acutiora cum eſſent, quàm ut rudes ſtatim capere poſſent, Eutocius Aſcalonita, homo ſua tempeſtate ut doctus, ita ingenio fœcūdus et fuit, & habitus eſt ab omnibus, ut iam nō immerito de eo dixerit quidam, εὐτόκιος ὥσπερ ὄνομα αὐτοῦ. Verè enim eſt fœcūdus in omnibus illis explanādis, in quibus obſcurior alioqui uideri poterat Archimedes. Eius ſcripta uiri, nunquam antehac in lucē edita, ſub tui nominis potiſſimū tutela publicare placuit: cū quòd dignus tu quidem es, cuius uirtuti hæc quoꝗ laus accedat, ut nominis tui fama, per ſe profectò clariſſima, acceſſione tanti ſcriptoris longè reddatur clarior: tū quòd mei erga te, atꝗ adeò erga familiā tuā uniuerſam, ſynceri palàm argumētū extaret amoris. Habes rationē huius facti mei. Soleo enim nō infrequēter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiā tuam, in periculis propulſandis animi fortitudinē, fidem in promiſſis, induſtriā & ingenij acrimoniā in conſilijs, in conficiundis autē negocijs celeritatē. Quæ cum uerè excellētes ſint in uno homine, uirtutes, niſi à doctiſsimo quopiā, pro dignitate explicari nō poſſunt: eas in præſentia attigiſſe ſaltē, mihi uiſum eſt ſatis. Itaque uiue diu fœlix, æuo ſuperante Sibyllas, anniſꝗ annoſum Neſtora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij. Anno Salutis noſtræ MDXLIIII.

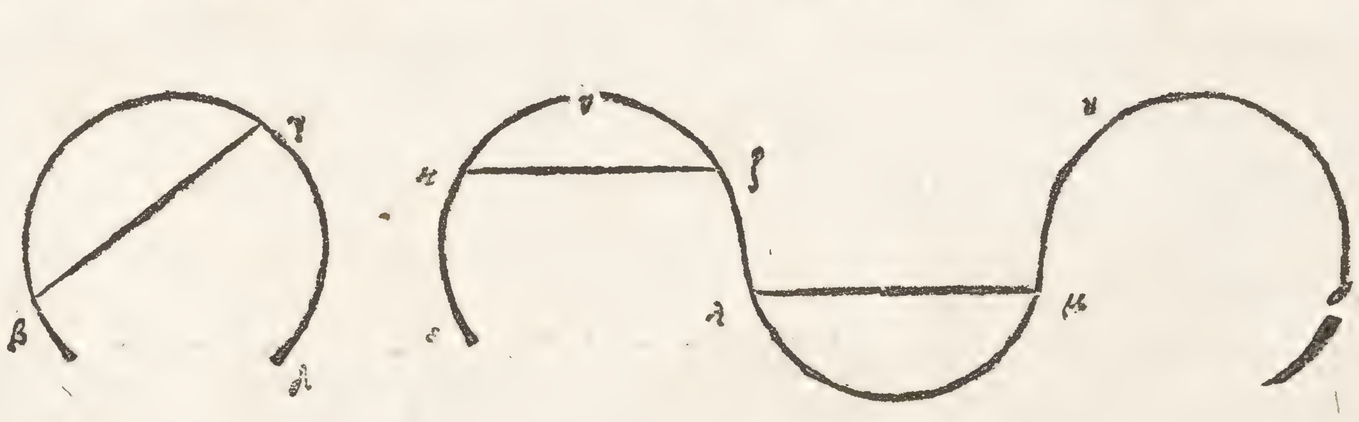
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟ ΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένον, καὶ κατανοήσας μὴ δὴ ὑπάρχειν τῶν θεωρημάτων τούτων παροραθῆναι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ εὐεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω καθεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλος ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τριῶν δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ πταισάμενος διὰ νεότητα φθέγξομαι, τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς πρός τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκα σοὶ κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ' ἂν σοὶ τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξει τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντη διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχεις περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι.

† δυσθεώρητα

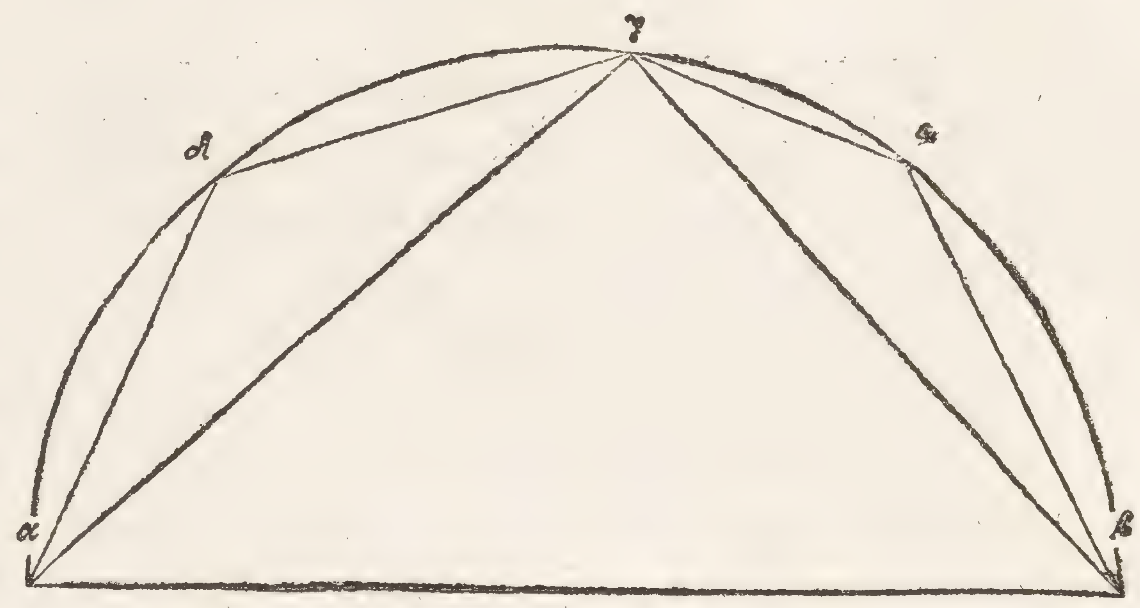
ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα, τὸ σύνηθες πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶ πρῶτον εἶναί τινας ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ τινῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δ' ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τῇ α β γ δ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων ἣν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν ἐφαρμόζειν. διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. ταὐτὰ δὲ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

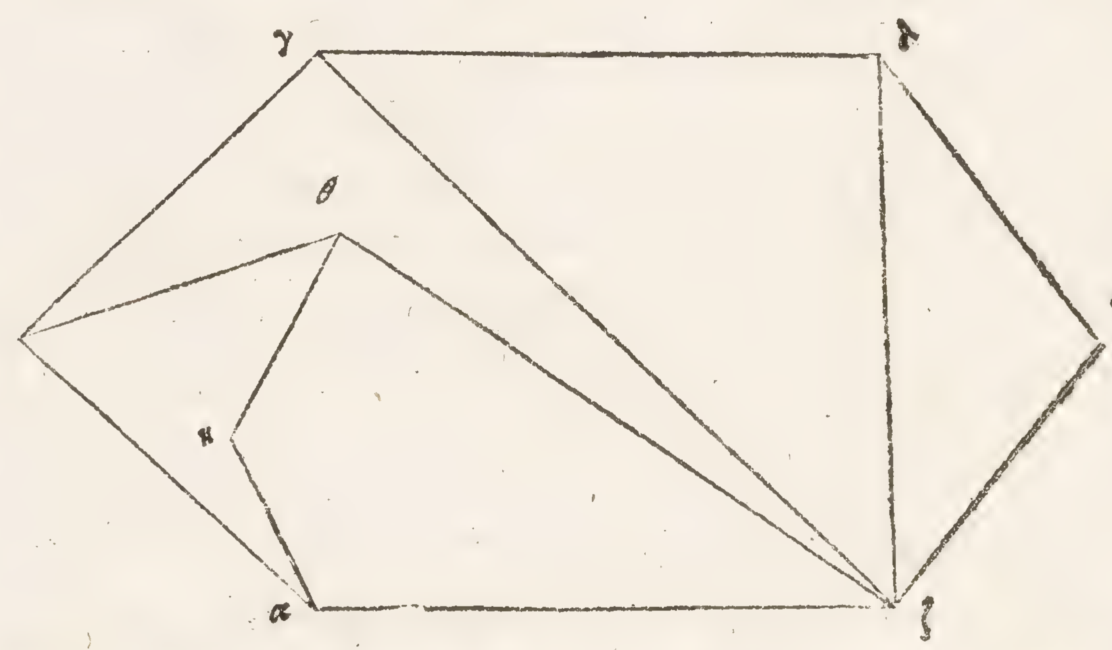


Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματά τινα λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ' αὑτὰ τῆς αἰσθήσεως ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β. τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ᾐτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ-

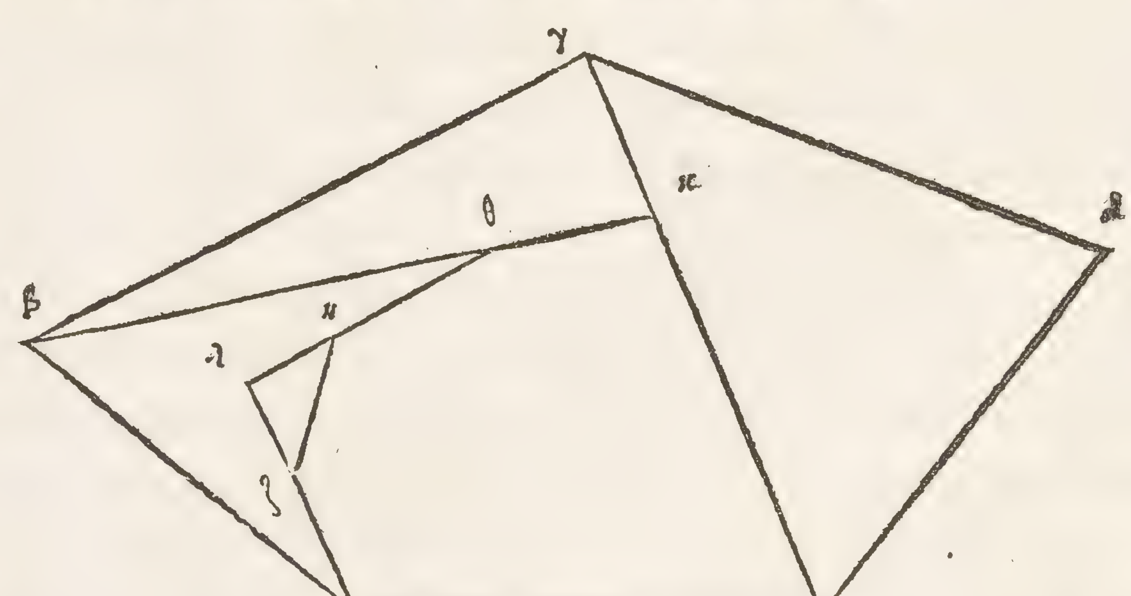
χόντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντων μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξομεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα εὐθείας, εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τούτου συνεχῶς ποιοῦντος τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ ἐπὶ παντὸς αὐτῆς σημείου ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὖσαν γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὴ τοῦτο φησὶν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ. ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχῃ, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ α, ζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαὶ, καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνεσταμέναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεσταμέναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ. μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



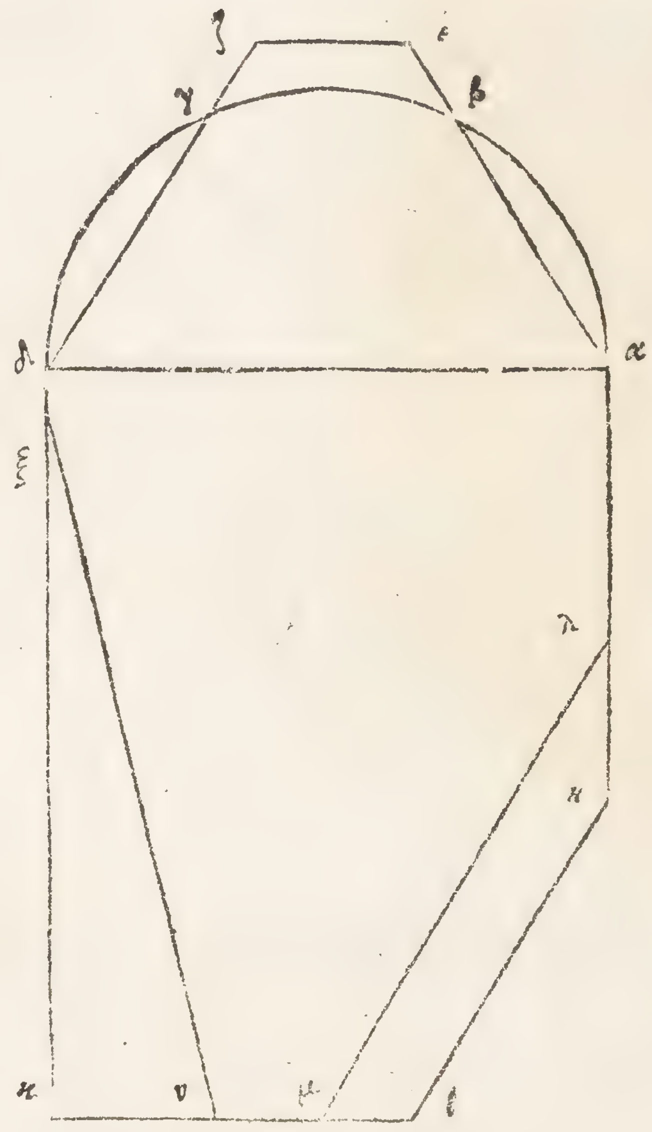
Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.



κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβ θκ τῶν αζη θκ. ἀλλ' αἱ βθκ ἐλάττους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῆς αξη θκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγ κε μείζους τῆς αζη θκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζη θκε.

Κἂν περιφέρειαι δὲ ὦσιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ ἐστι νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπὶ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσῃ ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνέχειαν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθω. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμάς, πάντῃ ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμή, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ τὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινὰ ἐστί, ὡς τὰ αλ, μν.



† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν

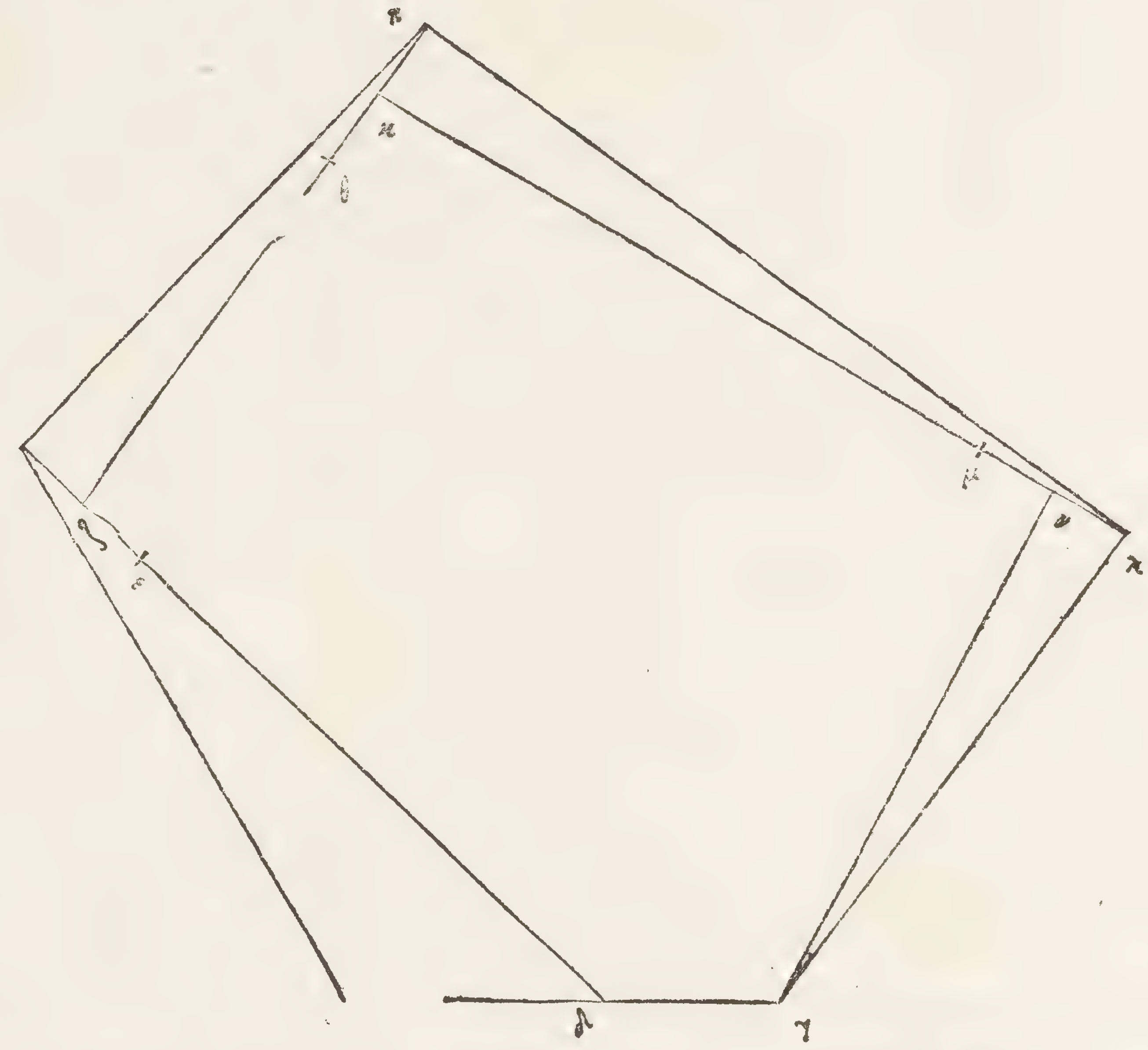
Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπὸ ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥς τε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι δεῖ θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θη κατὰ τὸ

κ,

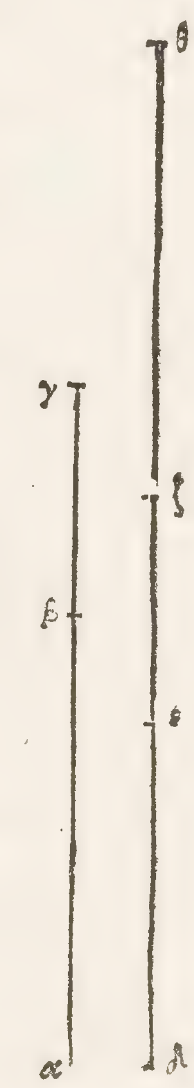
κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζη ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ κλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προειρημένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῆς αβ. ἡ δὲ ζκ τῆς αη, ἡ δὲ κν τῆς ηλ. ἡ δὲ νγ τῆς λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῆς αβηλγ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν ἐπὶ τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα *



αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.

ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

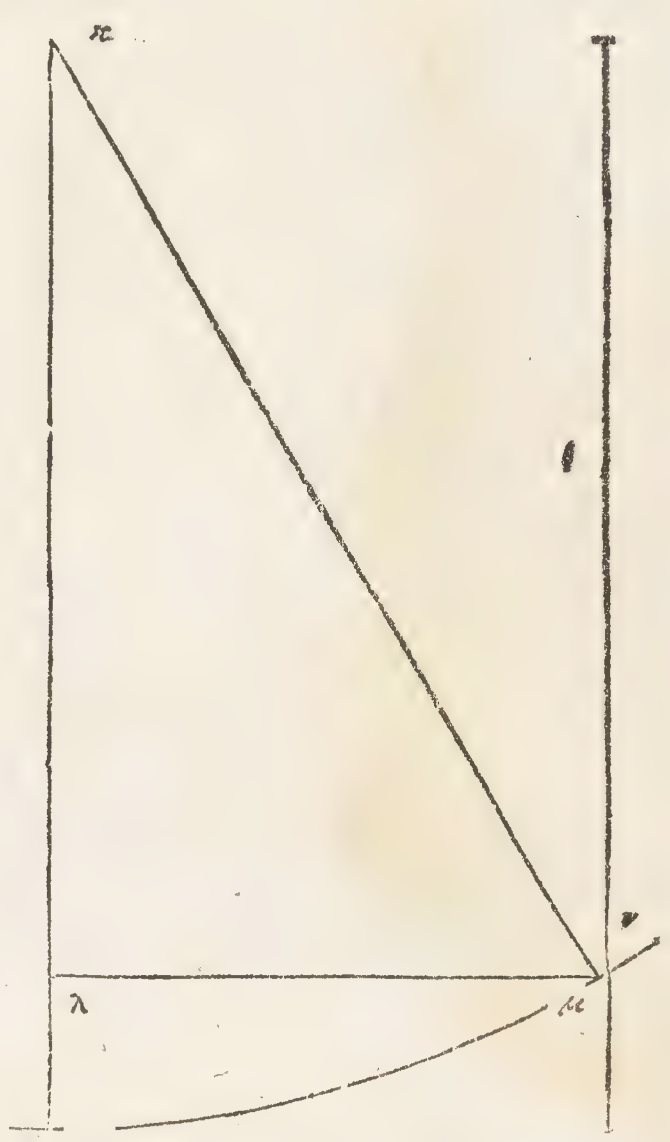
Τὸ δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, δηλαδὴ ὡς τοῦ αβ, ἤτοι ἐπιμορίου, ἢ τοῦ ἐπιμερούς τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συντεθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συντεθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συντεθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ' ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συντεθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συντεθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ,



ἀνά-

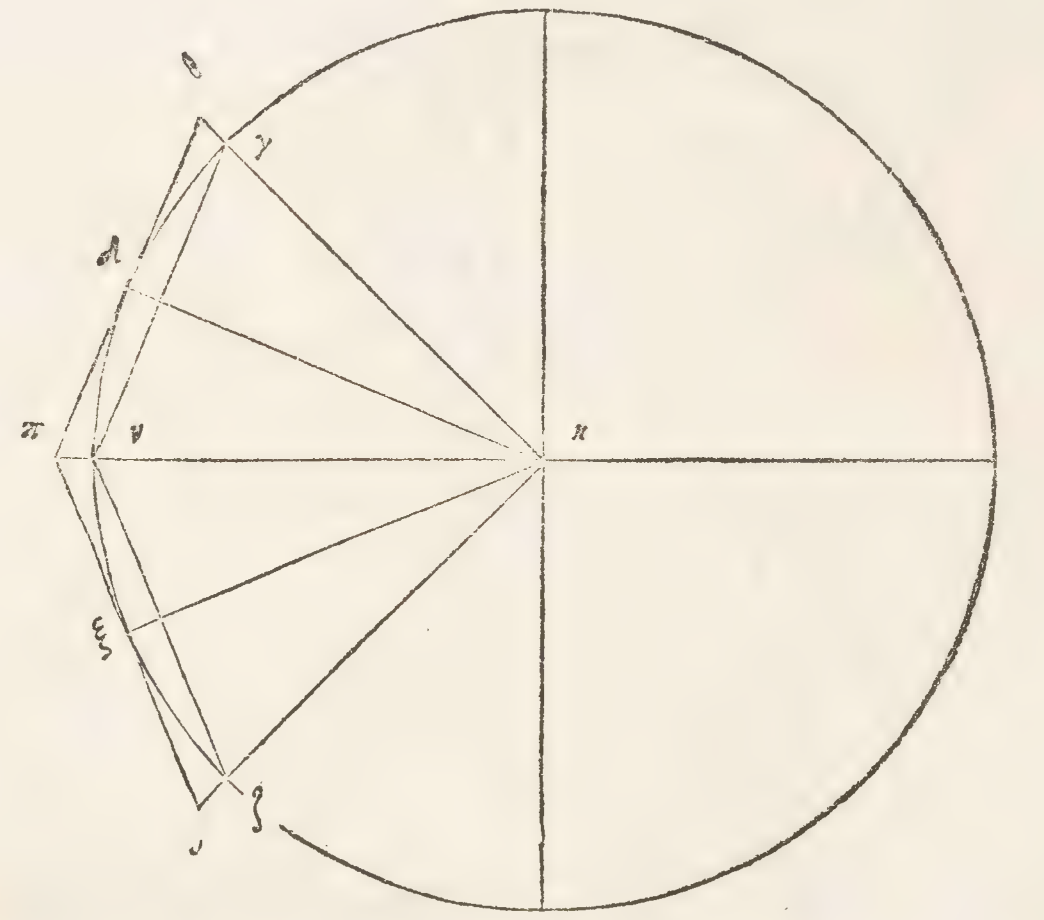
ἀνάπαλιν τὸ β γ πρὸς β α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζ ε πρὸς ε δ, καὶ συνθέντι τὸ γ α πρὸς α β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς δ ε.

ΕΙΣ ΤΟ γ.



Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κ λ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κ χ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κ χ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χ μ ν. ἔστι γὰρ ἡ κ μ ἴση τῇ κ χ, τουτέστι τῇ θ.

Ἡ ἄρα ν γ πολυγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ ο π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξ κ ν γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ ϖ κ δ, ἀπὸ τοῦ ϖ ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς κ θ ἴσην τῇ ὑπὸ π κ δ, ἔσται ἴση ἡ ϖ θ τῇ π ο, καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξ κ ἴση ἐστὶ τῇ κ δ, κοινὴ δὲ ἡ κ ϖ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξ ϖ τῇ ϖ δ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ π ξ κ ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ π δ κ. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δ π. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τῷ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ π κ δ, δ κ θ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δ κ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ϖ δ τῇ θ δ. ἀλλ᾽ ἡ ξ π τῇ π δ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θ ϖ ἄρα τῇ π ο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θ π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θ κ τῇ κ ϖ, τῆς δὲ γ κ τῇ κ ν, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ο ϖ τῇ γ ν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ϖ θ τῇ ν κ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γ ν κ τῇ ὑπὸ ο π θ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



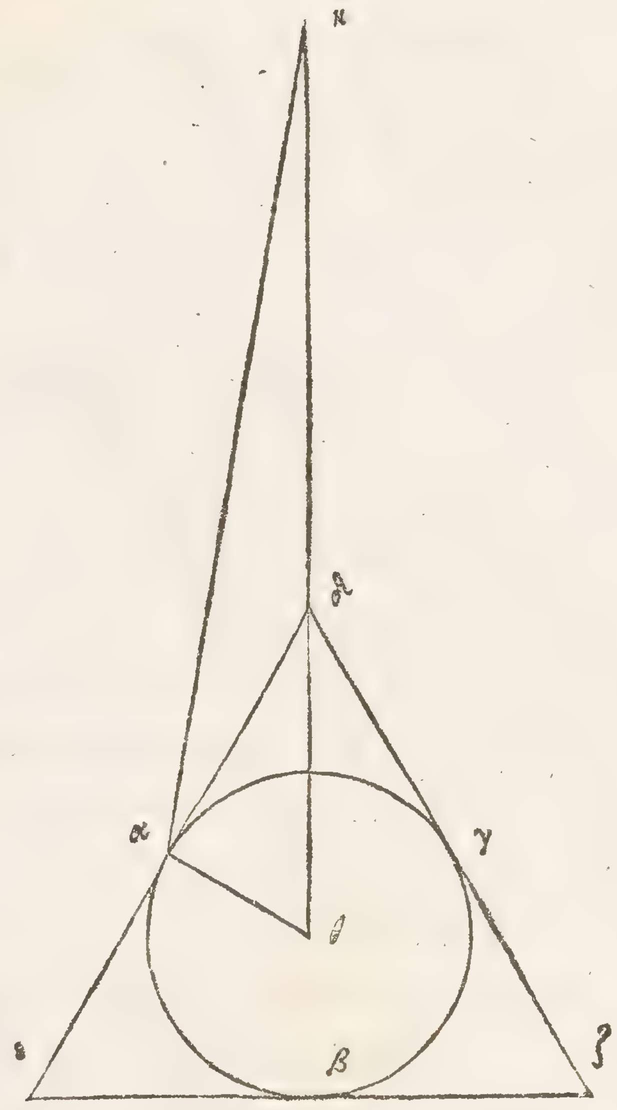
Ἡ ἄρα μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τῷ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γ κ τ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γ κ τ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λ κ ρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λ μ νοουμένου, τὸ λ κ ρ τρίγωνον τῷ γ κ τ ὅμοιον ἐστίν, ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ λ, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ τ. ὥστε καὶ ἡ μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ.

ΕΙΣ ΤΟ ϛ

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσόν ἐστι τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ β χωρίου.

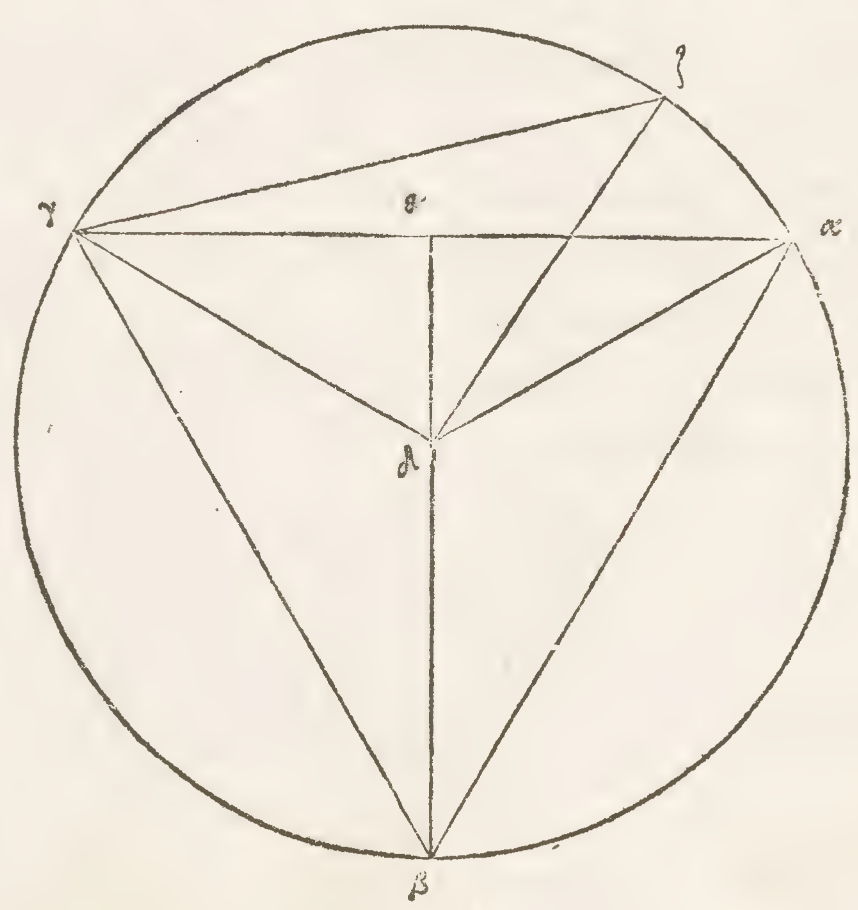
ΕΙΣ ΤΟ Η.

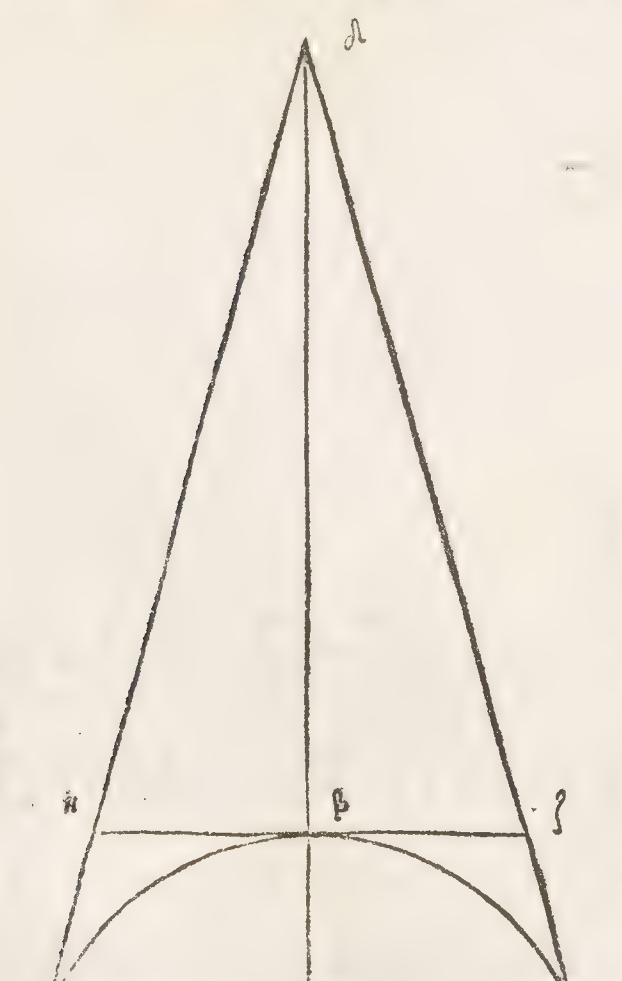
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ᾽ αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ η, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἡ ηα. λέγω ὅτι ἡ ηα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ ηθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ ηθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθάς, ἥ τις ἐστὶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ ηθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν ηα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ἐπὶ τὰ γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προέκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προέθηκε τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποία τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τὸ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

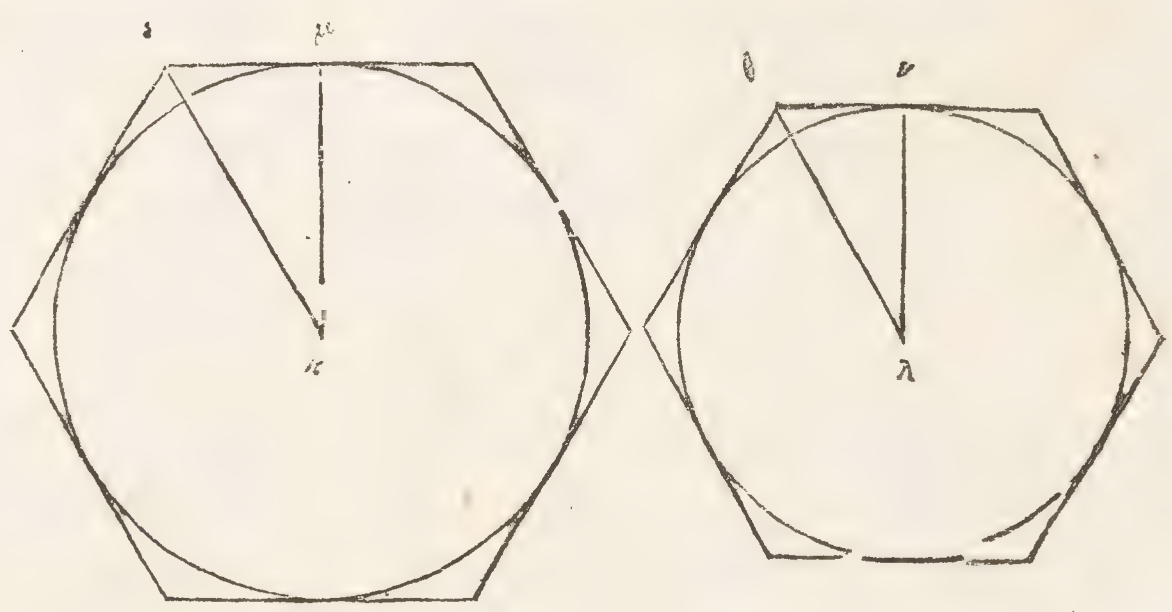
Ἤχθω γὰρ ἡ ηζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ηβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζβ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ηδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ.

Περιγραφόντων δὴ πολύγωνα περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θυ χωρίου. ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατὸν ἦν, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἔστιν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ς θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ηδζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ δβη τοῦ βηα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δηζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκέτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις



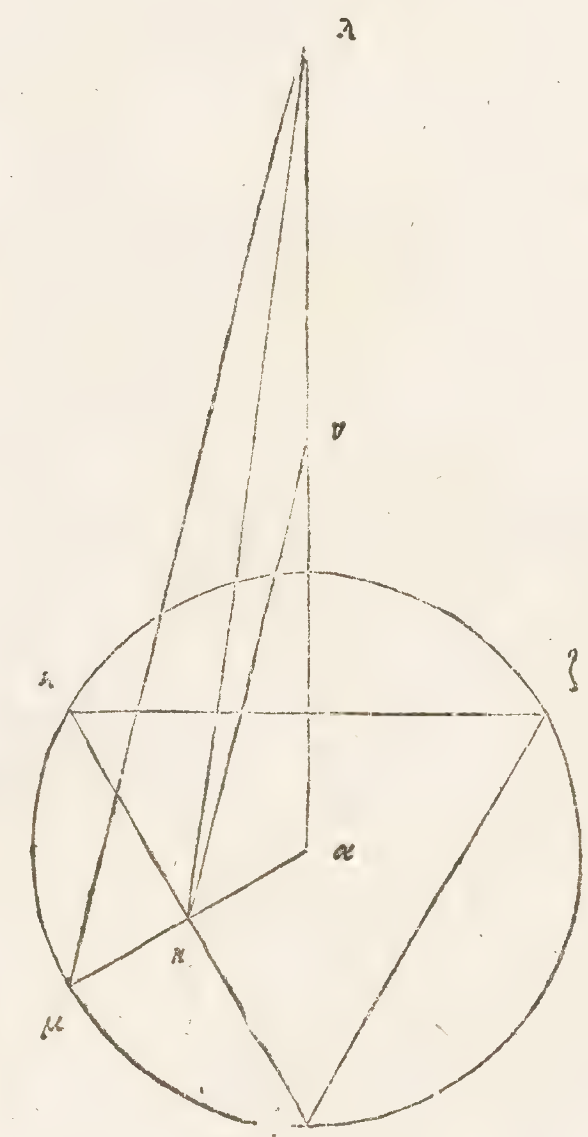
ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς η δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ-

μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφὴ, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αη. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζεύγμένη ἡ λη κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λη. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αη. διὰ δὲ ταῦτα καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λη, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ην παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αη πρὸς ην. ἡ δὲ αη πρὸς ην μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ηλ. μείζων γὰρ ἡ λη τῆς ην. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αη πρὸς ηλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αη, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αη, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αη. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αη ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ. καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αη.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

Ἡ δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ᾽ ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χκ τῇ χζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ηλ, γκ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παραλλήλου τῆς ακ τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ ηλε τρίγωνον, τῷ γκα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γκ πρὸς κα. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γκ πρὸς κα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ᾽ ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν η τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενόν ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅταν τὸν ἐστι τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τοῦ η, μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Αλλὰ τὸ ὑπὸ ε θ, ἐπὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ε ζ, γ δ, κ α, πρὸς τὴν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λ ε πρὸς ε θ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῷ δὲ ὑπὸ ε λ, κ θ ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ θ α. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσον ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. ὡς ἐστὶ δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς α λ. καὶ διὰ τὸ ὁμοίου γινομένου τοῦ θ α κ τριγώνου τῷ θ α λ. ἐστὶ γὰρ ὡς ἡ λ θ πρὸς θ α, ἡ α θ πρὸς θ κ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Εξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μ ζ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται κατὰ κωλούρου ἐπιφανείας κινηθήσεται, ᾗ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζ μ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζ η καὶ τῆς μ ν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μ α γενομένῃ κωλούρου κώνου ἐπιφάνεια, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μ α καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς α β καὶ μ ν. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ζ μ μείζων τῆς μ α, ἡ δὲ ζ η τῆς α β. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζ μ, ν η μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μ α, ν β ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Η ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ η ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ᾽ ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μ θ, ζ η, τὸ δὲ ὑπὸ μ θ, ζ η, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γ δ, δ ξ. ἡ μὲν γὰρ μ θ ἴση δέδεικται τῇ γ δ. ἡ δὲ ζ η μείζων τῆς δ ξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γ δ, δ ξ. τὸ δὲ ὑπὸ γ δ, δ ξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δ α. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ α.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Αλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δ λ κ, παραλλήλου οὔσης τῆς ε κ τῇ α λ, ἐστὶν ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ. ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς δ α, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ἡμίσεια τῆς ε ζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς α γ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ε κ πρὸς α λ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ε κ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς ε κ πρὸς α λ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ε κ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ α λ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ᾽ ἀμφοτέρας τὰς ε κ, α λ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ε λ πρὸς δ α, τουτέστιν ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον.

Εδείχθη δὲ ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Εκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιος ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ

ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανεία τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

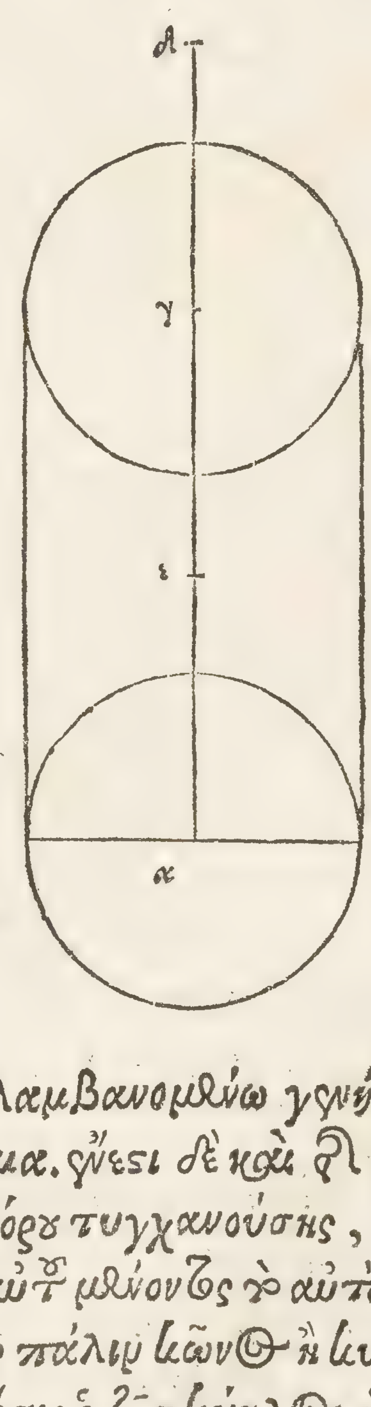
ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

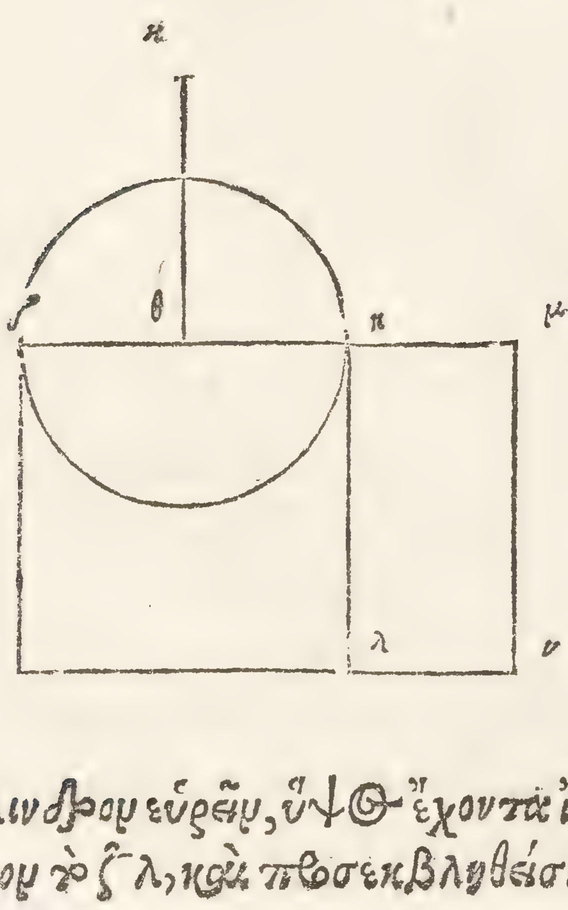
Το ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

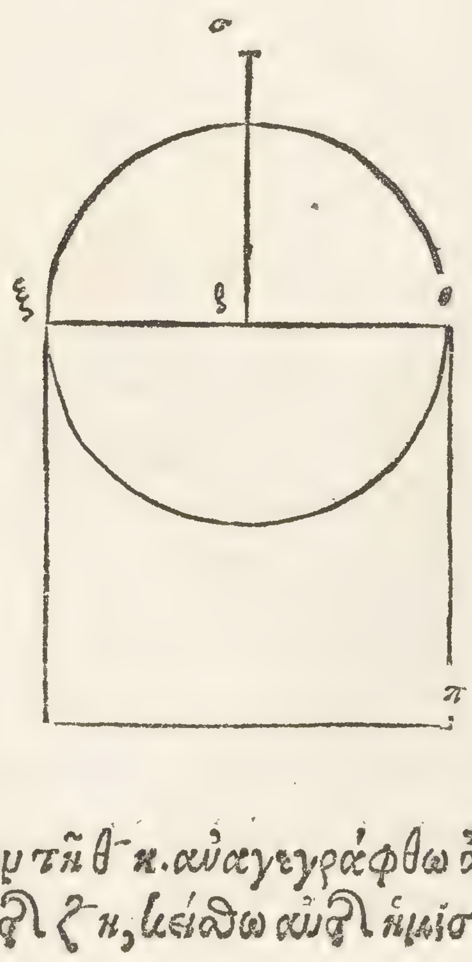
Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ
ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

ΣΑφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθος καὶ ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σπουδή. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιόλια ἐστι τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι,



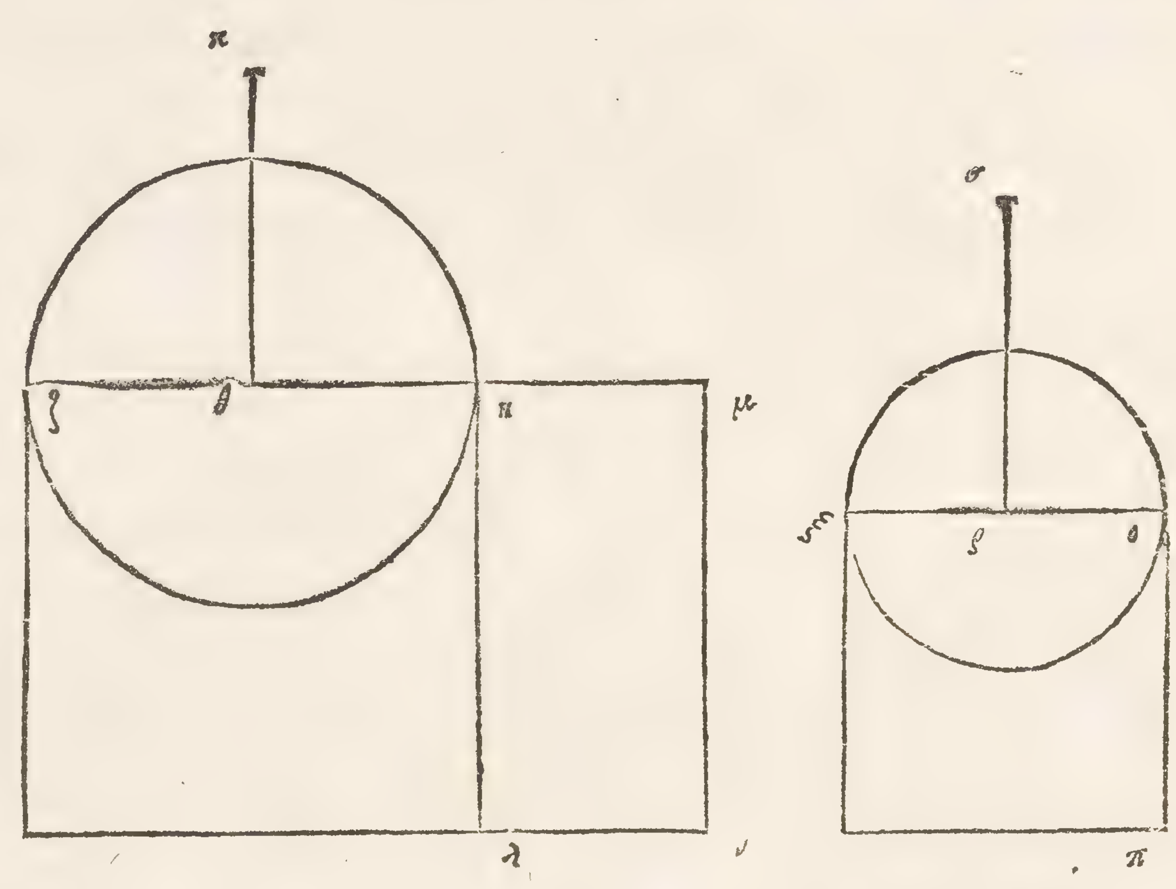


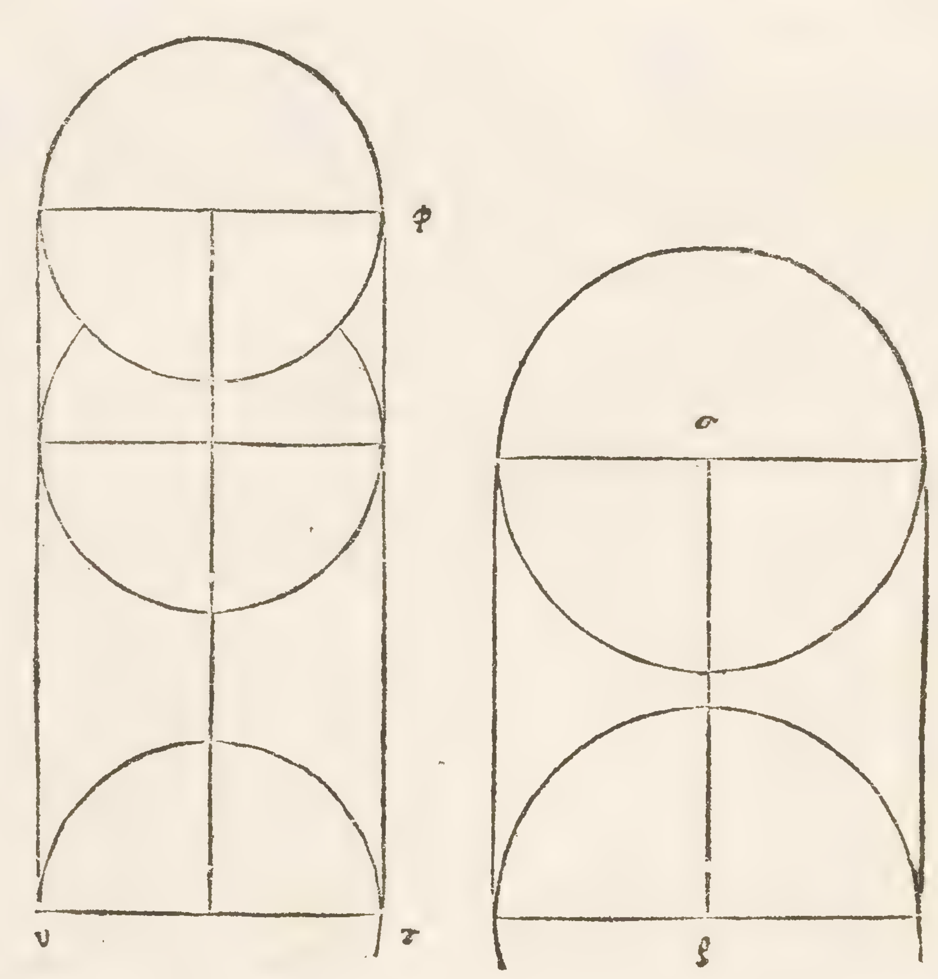


καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν

παραλλη

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζη. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζη. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζη κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ᾖ δεδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ ποιηθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





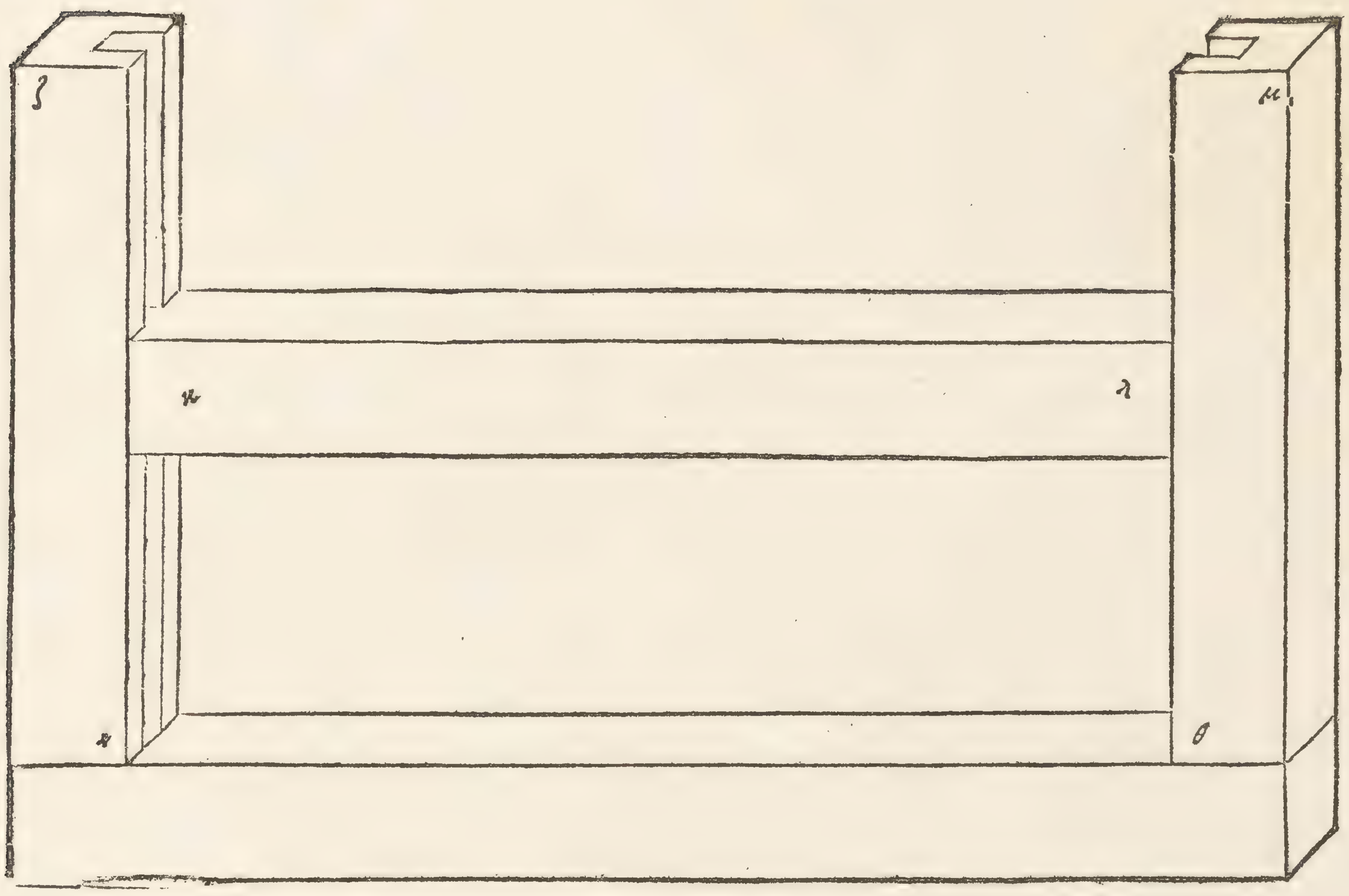
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτοῦ προὔβη τὰ τοῦ προβλήματος, λήξασης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι. τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

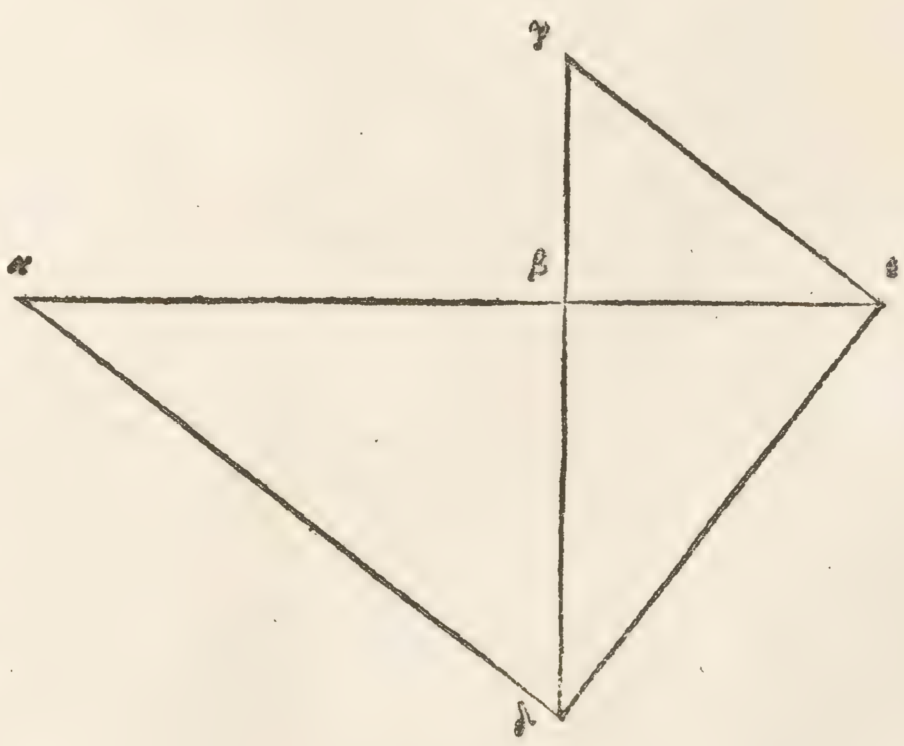
δόξῃ, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

ΔΥο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β γ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζ η θ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζ η. κινείσθω κανὼν ὁ κ λ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζ η, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ η θ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θ η. παράλληλον δὲ τῷ ζ η, ὡς τὸ θ μ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζ η, θ μ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κ λ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κ λ παράλληλος ἀεὶ τῷ η θ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



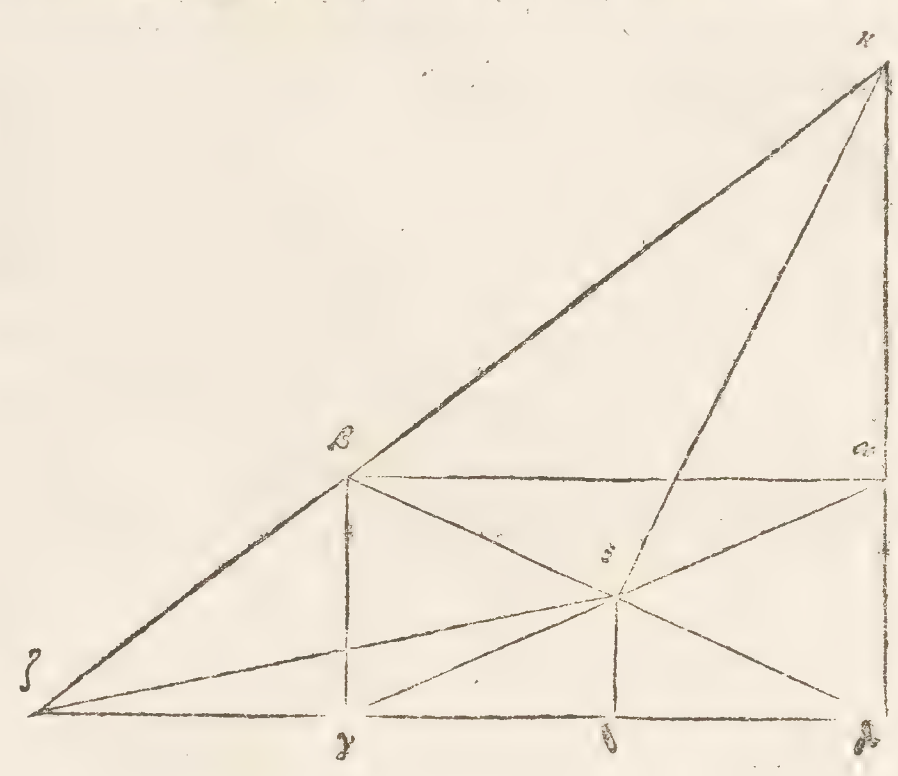
τυχὸν τὸ η θ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κ λ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς β δ εὐθείας ᾖ, τοῦ η θ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κ λ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς β ε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γ δ ε. τὸν δὲ κ λ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ε α. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ,
καὶ ἐν τοῖς Βελοποιικοῖς.

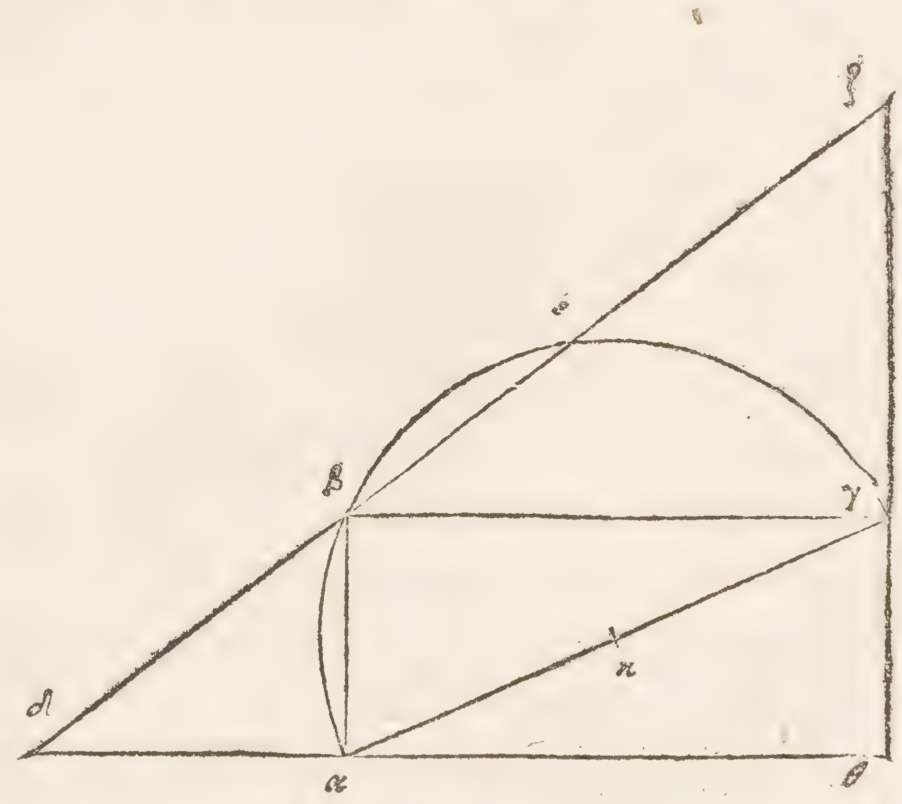
ΕΣΤωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β δ παραλ-

ληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. φανερὸν δὴ, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμὸν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει, δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε, τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

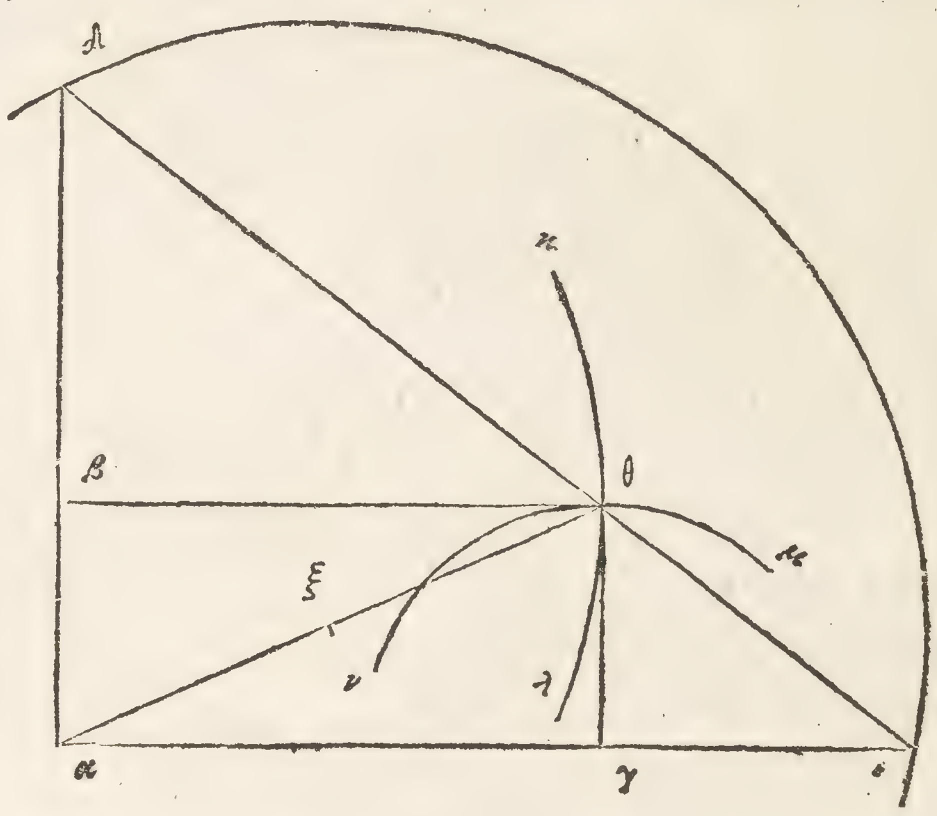
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ. τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς αδ, γζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τῷ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.



Ἰστέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῇ, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ, καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ, ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς ταῖς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

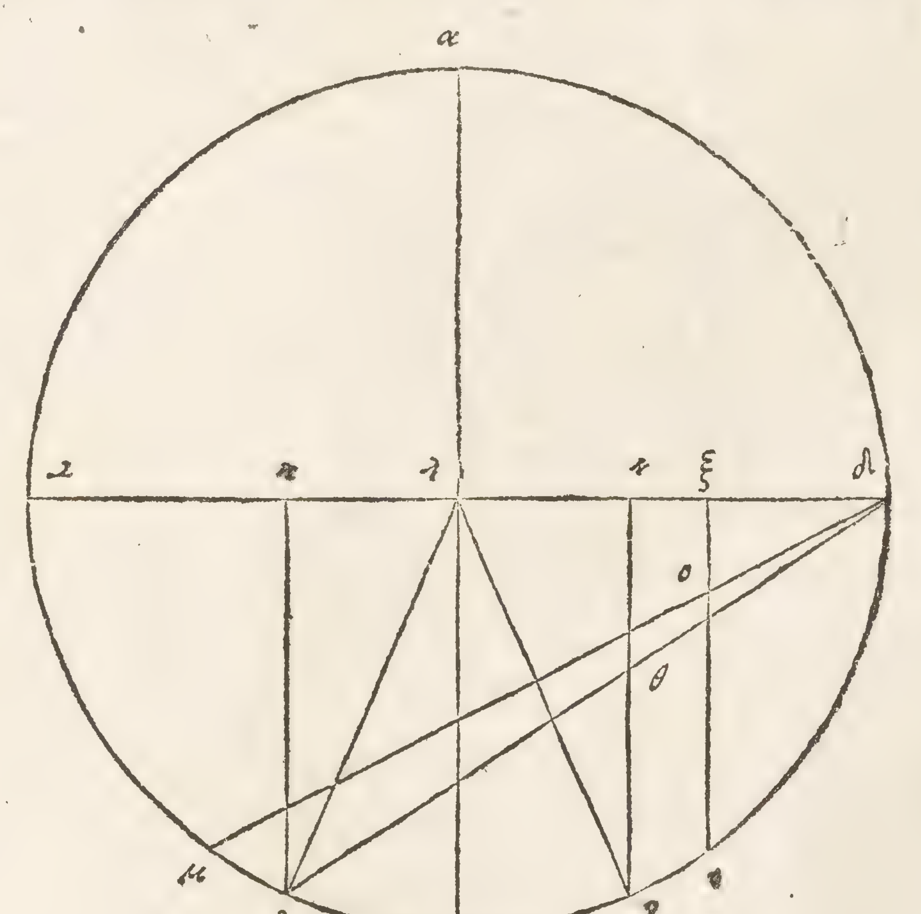
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ αβ, γ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



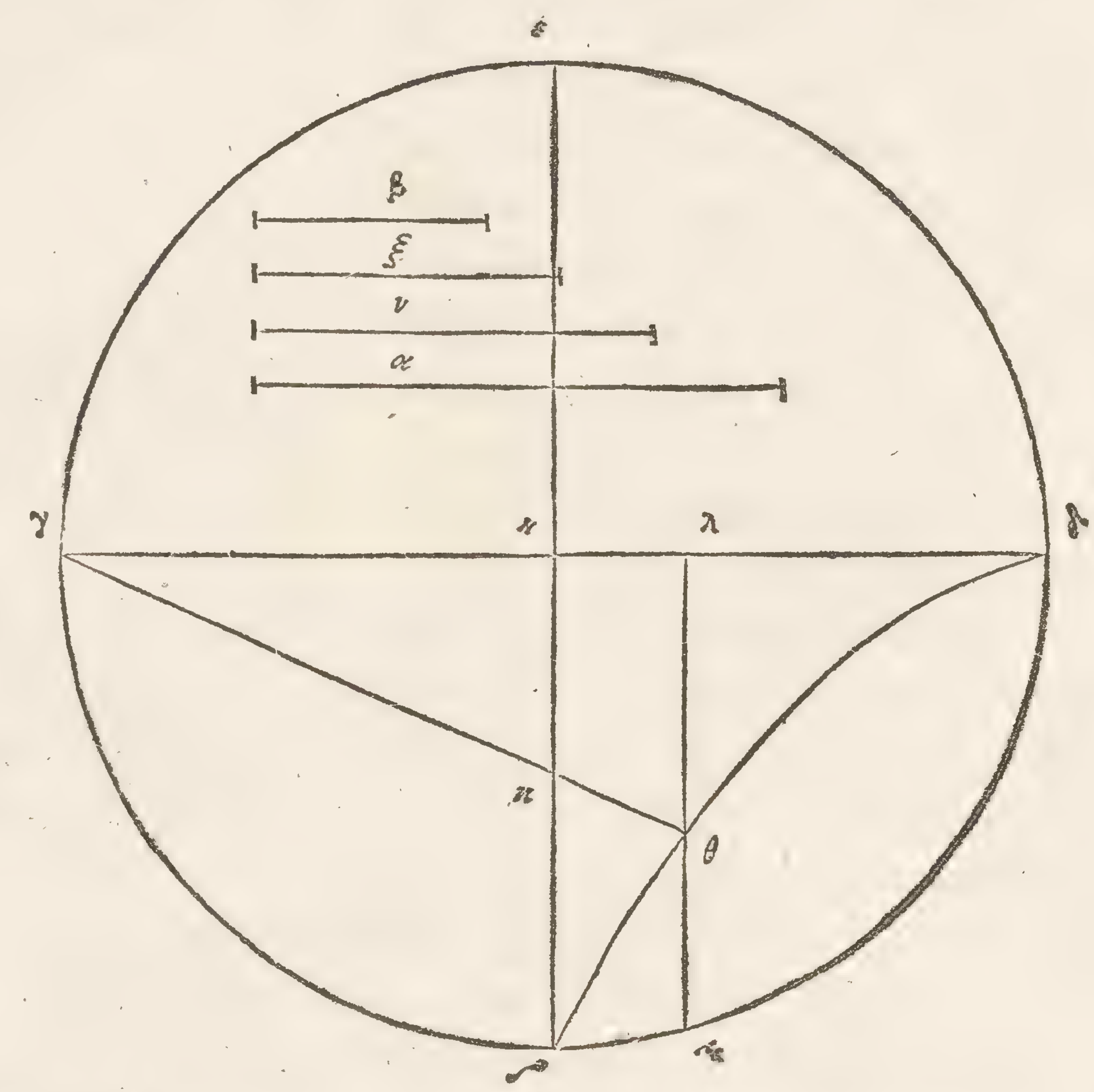
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ τῇ ηδ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογόν ἐστιν ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ, ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μετα



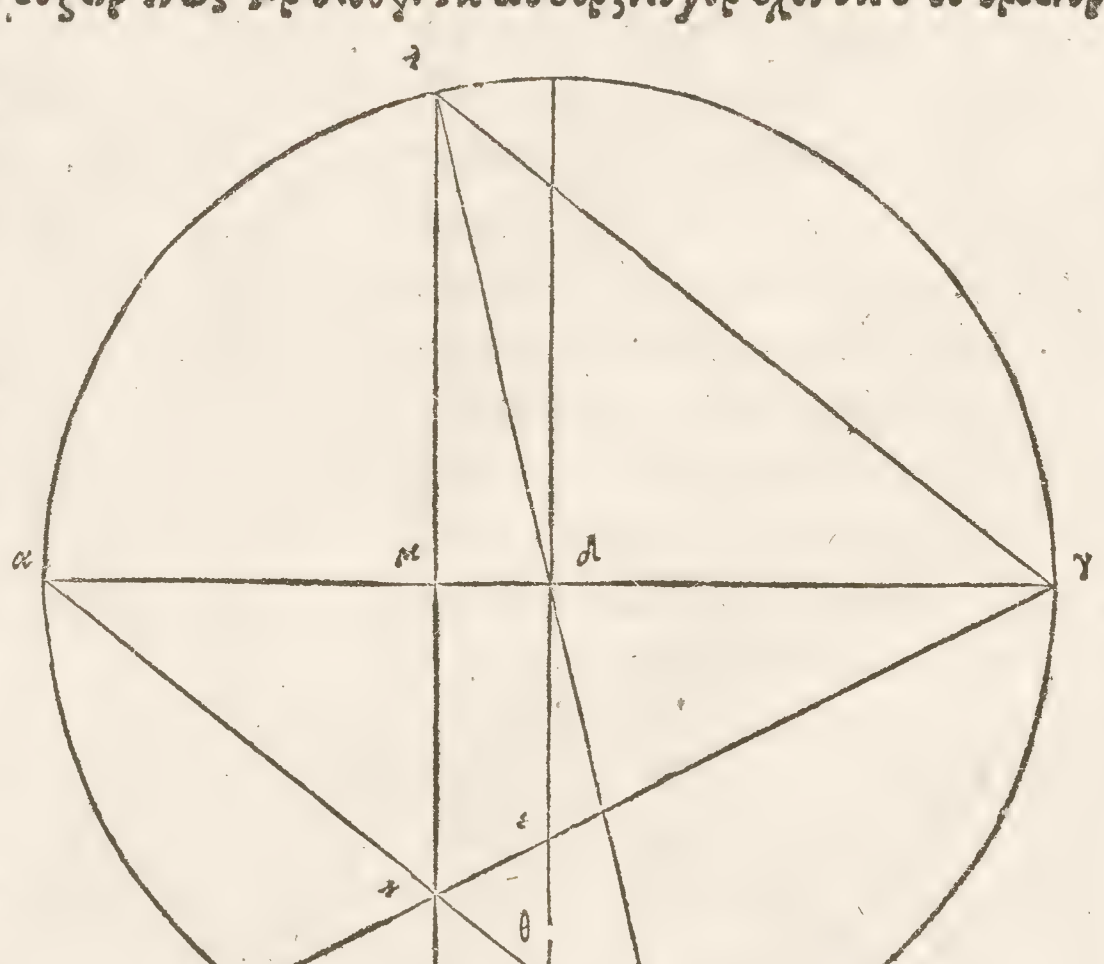
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων περιφερειῶν ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπιτεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ. καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ. μέσαι ἀνάλογον εἰσὶ τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογον εἰσὶ αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

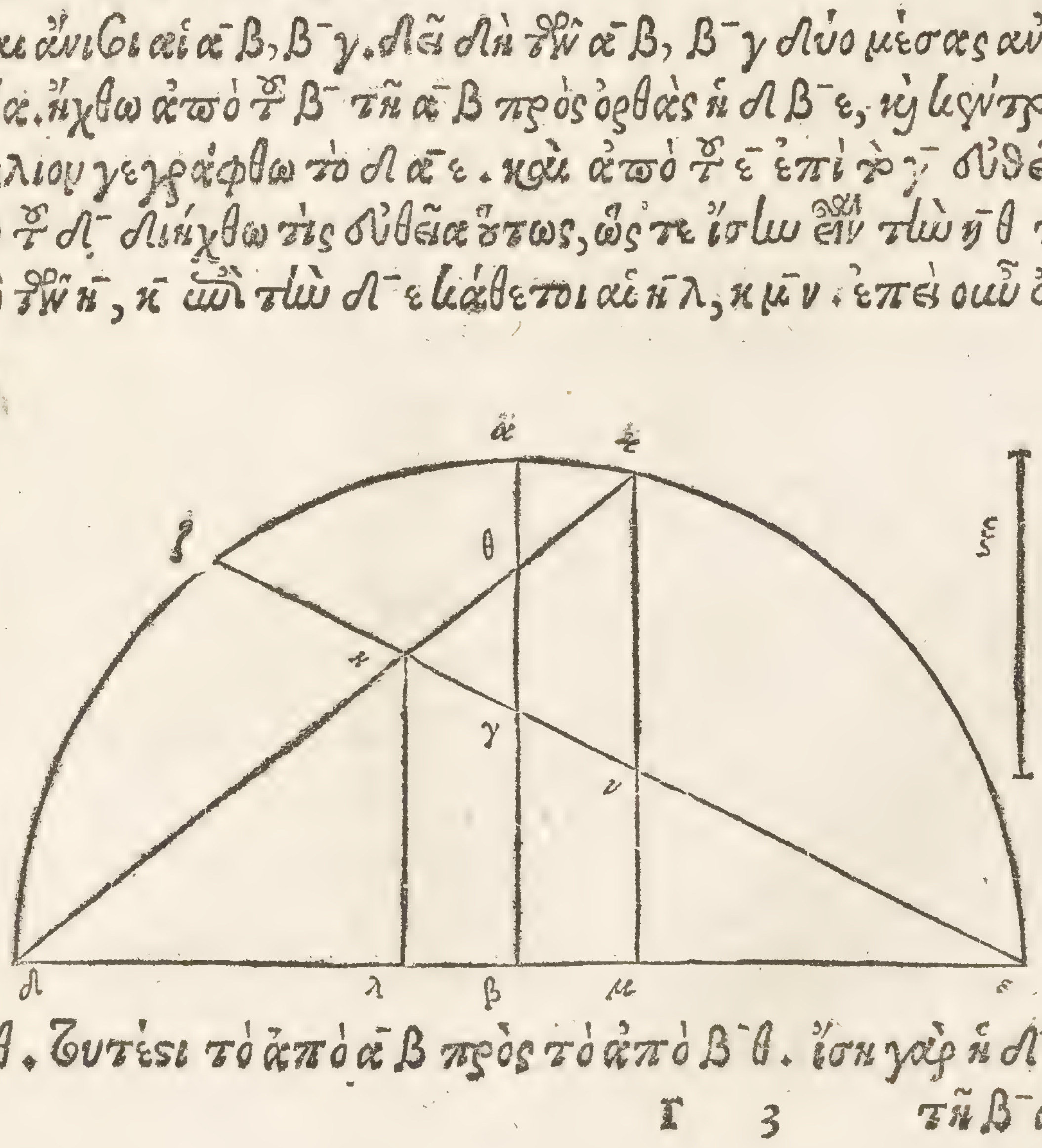
Προὔθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προσκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε.



δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γίνηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βηγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν αη, ὥς τε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ᾽ ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ αη κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ημ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ λμ, μα. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ,

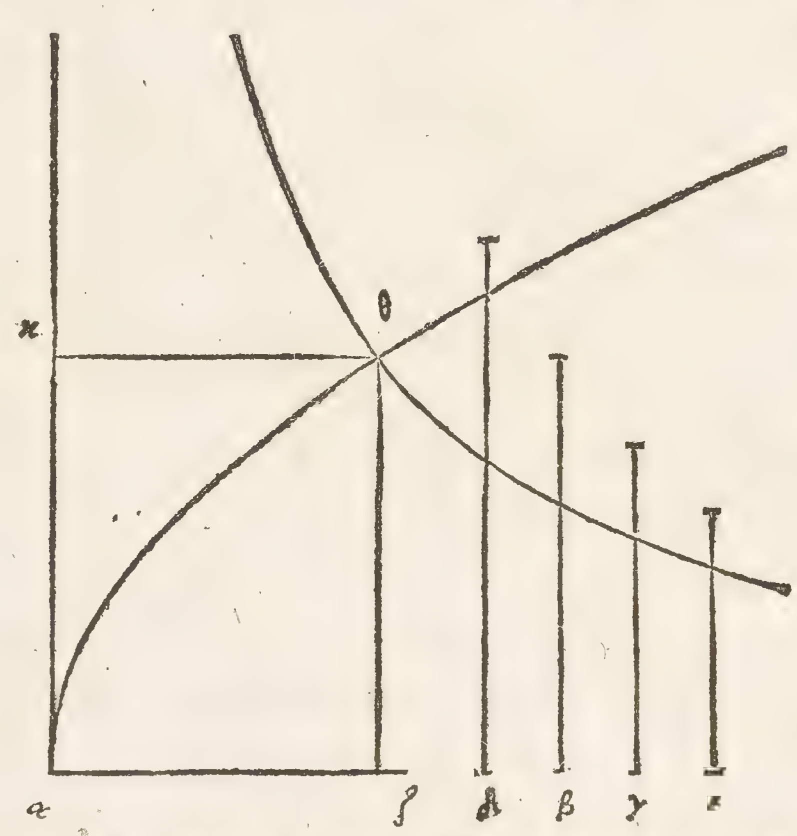


τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ

τῇ β α. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μ δ πρὸς δ β, ἡ λ ε πρὸς ε β. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ μ δ πρὸς δ β, ἡ κ μ πρὸς θ β. ὡς δὲ ἡ λ ε πρὸς ε β, ἡ κ λ πρὸς γ β. καὶ ὡς ἄρα ἡ κ μ πρὸς θ β, ἡ κ λ πρὸς γ β. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κ μ πρὸς κ λ, ἡ θ β πρὸς γ β. ἀλλ᾽ ὡς ἡ κ μ πρὸς κ λ, ἡ μ δ πρὸς δ λ, τουτέστιν ἡ δ μ πρὸς μ ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ β. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, ἡ β θ πρὸς β γ. εἰλήφθω τῶν θ β, β γ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, ἡ θ β πρὸς β γ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς β θ. ἡ δὲ θ β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς β θ, ἡ β θ πρὸς ξ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ θ β πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς β γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς β θ, ἡ θ β πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς β γ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστιν, τῇ τε ὑπὸ Πάππου καὶ Διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

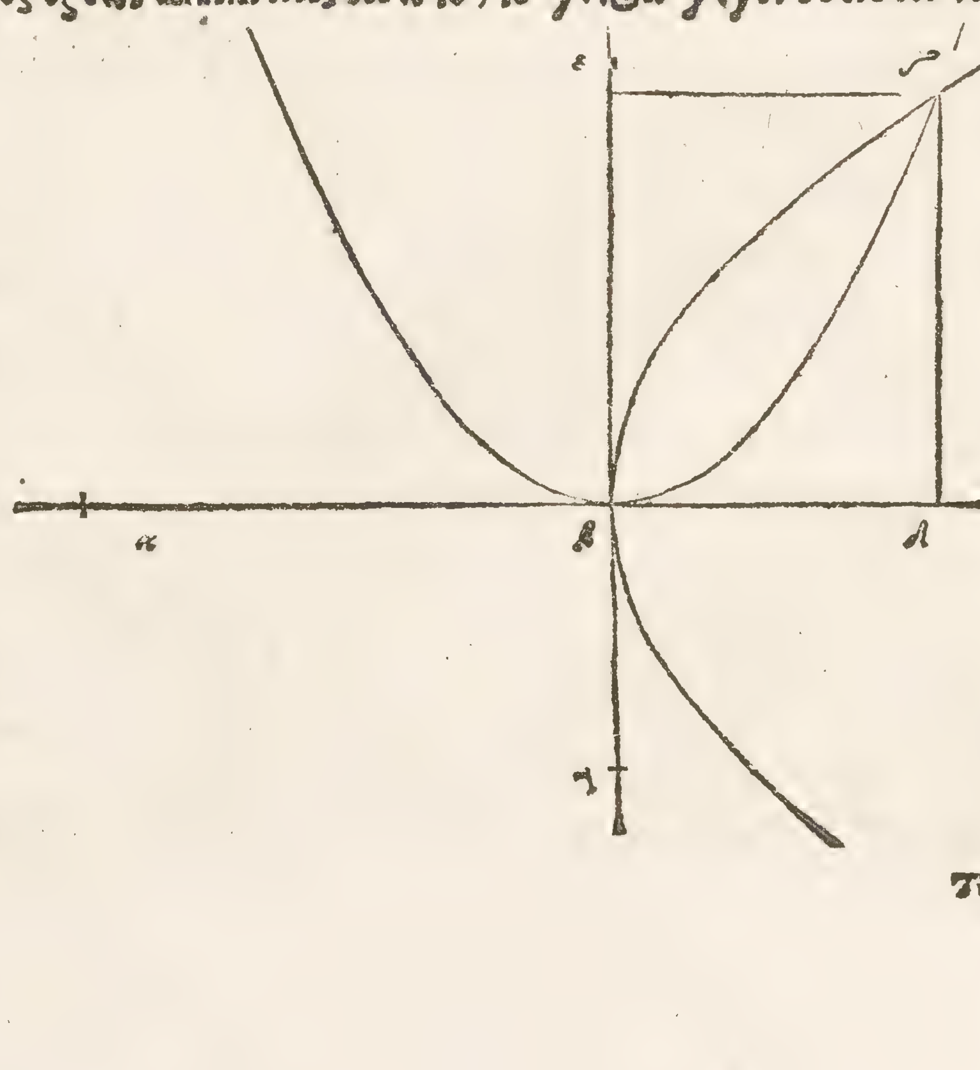
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ α η, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ α ζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζ θ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζ θ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς α ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζ θ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θ κ, α κ. καὶ ἐπεὶ δοθέν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κ θ ζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κ α, α ζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ α η πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ α η, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν α η ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ α θ.



καὶ ὀρθὴ ἡ α κ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κ α, α ζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ᾽ ἧς αἱ παρὰ τὰς κ α, α ζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ ε, τέμει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θ κ, θ ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζ θ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ γ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ θ πρὸς ζ α. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ ζ α, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ α πρὸς τὴν ε. ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ θ πρὸς ζ α, καὶ ἡ ζ α πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θ ζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ α ζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον εἰσίν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α β, β γ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δ β, β ε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γ β πρὸς β δ, οὕτως τὴν β δ πρὸς β ε, καὶ τὴν β ε πρὸς β α. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δ ζ, ε ζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δ β πρὸς β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ γ β ε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, τουτέστι τῆς ε ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β ε. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε ζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν β ε. πάλιν ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ α β πρὸς β ε, ἡ β ε πρὸς β δ. τὸ ἄρα ὑπὸ α β δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β δ, ἴσον ἐστὶ

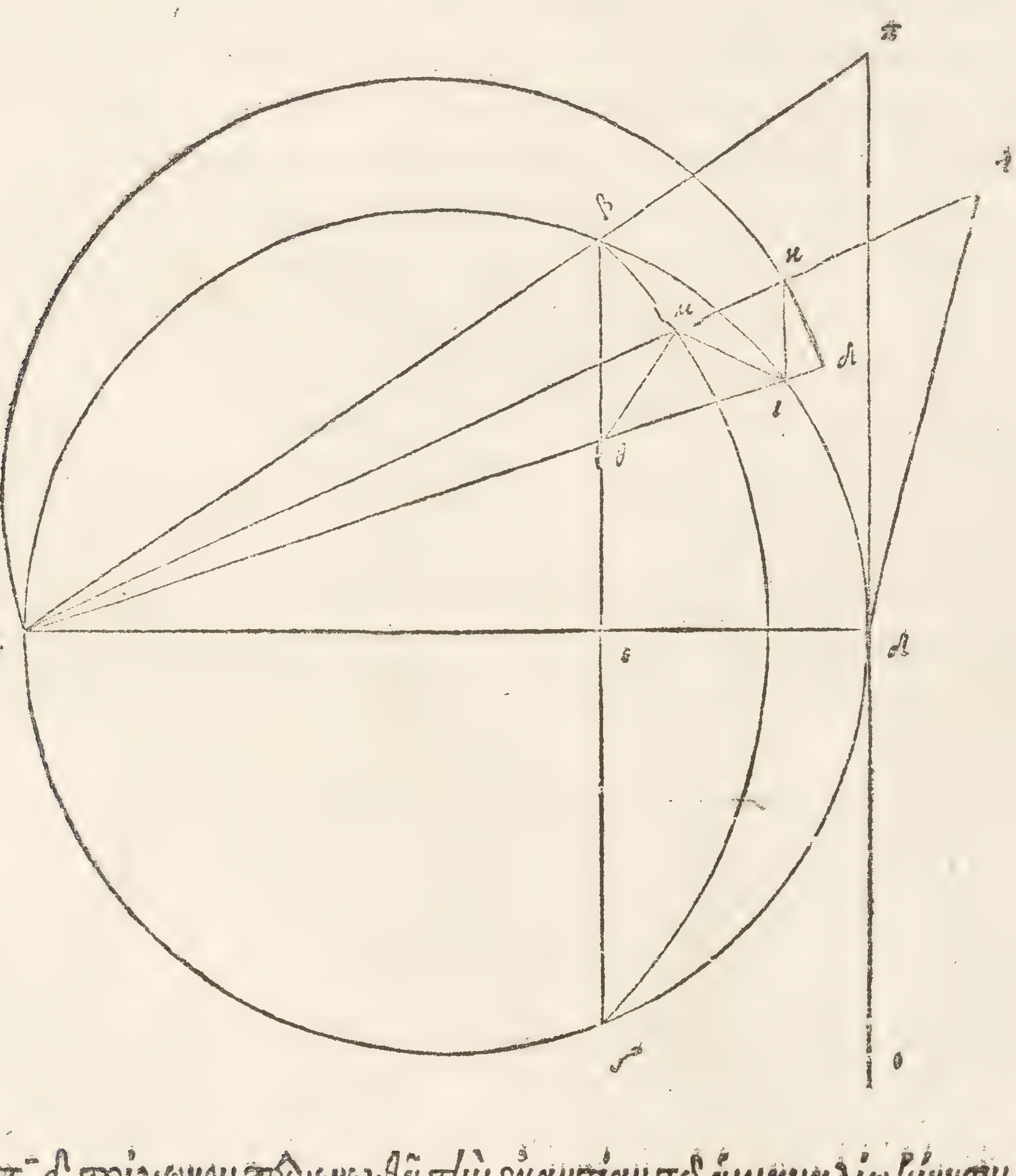


τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι τῷ ΔΖ. τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. ἅπτεται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν ΒΖ. δοθὲν ἄρα τὸ Ζ, καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ. καὶ δοθέντα τὰ Δ, Ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ Β, ΒΔ, ΒΕ. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΒΕ δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΒΓ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΑΒ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΔ, ΖΕ. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΕ, καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗΜΟΣ ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, Γ. δεῖ δὴ τῶν ΑΔ, Γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν ΑΔ κύκλος, ὁ ΑΒΔΖ. καὶ τῇ Γ ἴσῃ ἐνηρμόσθω ἡ ΑΒ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ Δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Π. παρὰ δὲ τὴν ΠΔΟ ἤχθω ἡ ΒΕΖ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ ΑΒΔ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς ΑΔ ἡμικύκλιον ὀρθόν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, μένοντος τοῦ Α πέρατος τῆς διαμέτρου, τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς ΑΔ



μενούσης τὸ ΑΠΔ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ Β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ ΔΚΑ. τὸ δὲ

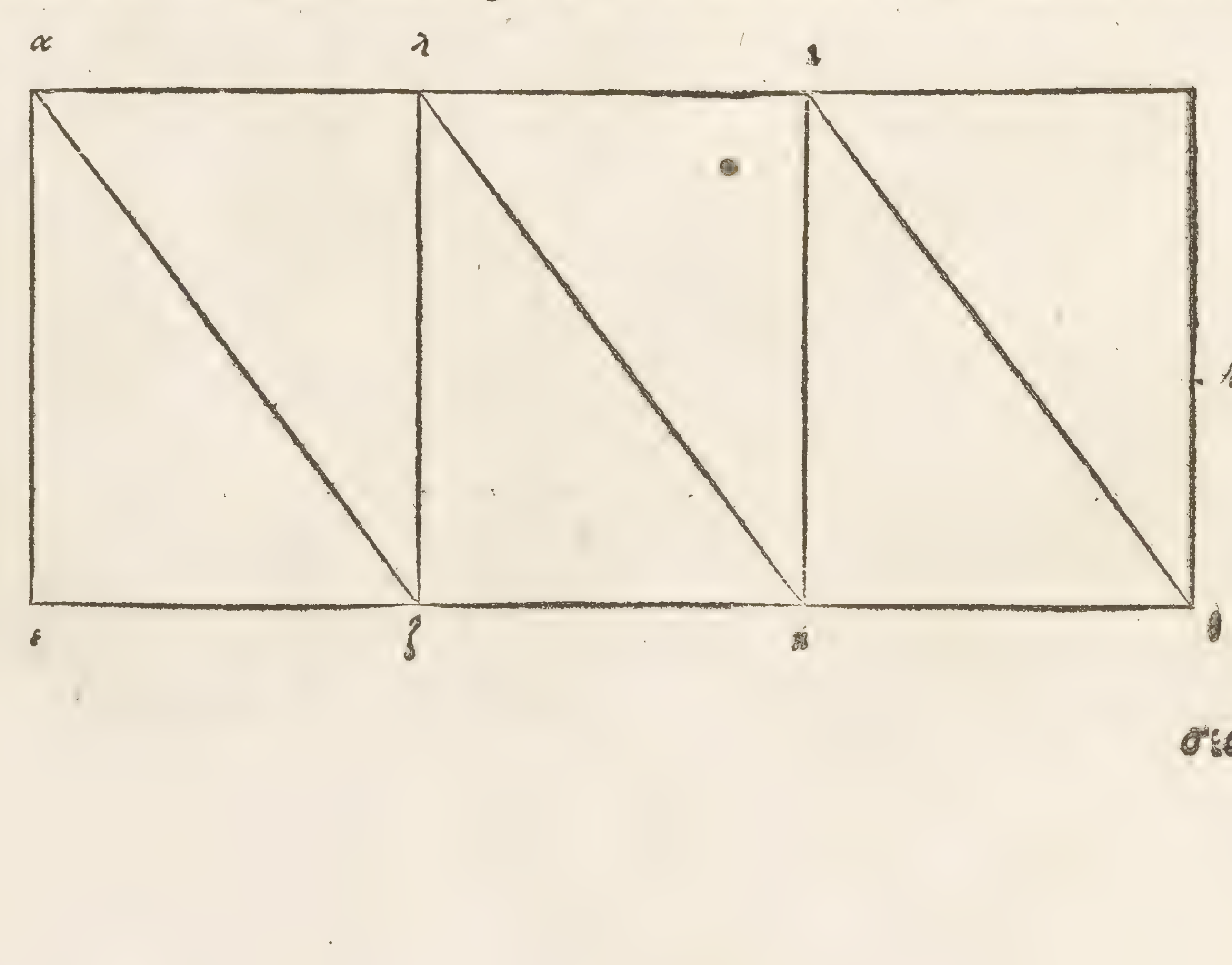
ἀντὶ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δλα. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ βμζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ βδζα κύκλου ἔστω ἡ βζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ βδα ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλλέτω τῇ βζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ αλ τῷ βμζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κδ, μι, μθ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δκα, βμζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μθ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν βζ ὀρθή ἐστιν ἡ μθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θβ, θζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θα, θι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μθ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ αμι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μιθ, μαθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ιμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δκα ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κδ, μι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δα πρὸς ακ, τουτέστιν ἡ κα πρὸς αι, οὕτως ἡ ια πρὸς αμ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δα, ακ, αι, αμ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καί ἐστιν ἡ αμ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ αβ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αδ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ ακ, αι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ ἐρατοσθένης χαίρειν.

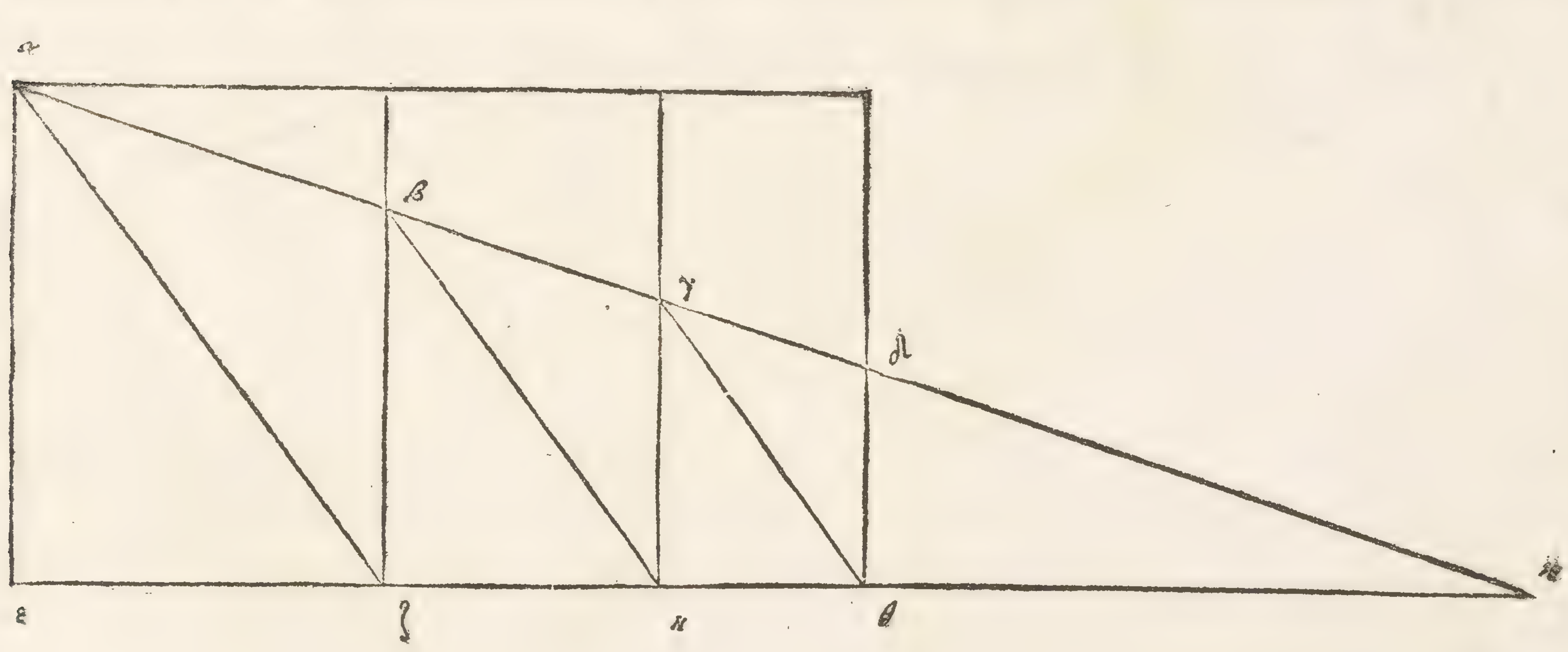
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασιν, εἰσαγαγεῖν τὸν μίνω τῷ γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω. τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν πάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασι δηλίους ἐπιβαλλομένης νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαμεμψαμένοις δὲ τοὺς παρὰ τῷ πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, ἀρχύτας μὲν ὁ ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθόβολα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γίνεσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως.

σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ α ε, δ θ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς ε θ πρὸς ὀρθὰς ἡ α ε, καὶ ἐπὶ τῆς ε θ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ α ζ, ζ ι, ι θ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ α ζ, λ η, ι θ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι, μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζ ι συνωσθήτω, τὸ μὲν α ζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ι θ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα, καὶ συμπιπτέτω τῇ ε θ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ α κ πρὸς κ β, ἐν μὲν ταῖς α ε, ζ β παραλλήλοις, ἡ ε κ πρὸς κ ζ. ἐν δὲ ταῖς α ζ, β η παραλλήλοις ἡ ζ κ πρὸς κ η. ὡς ἄρα ἡ α κ πρὸς κ β, ἡ ε κ πρὸς κ ζ, καὶ ἡ κ ζ πρὸς κ η. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ β κ πρὸς κ γ, ἐν μὲν ταῖς β ζ, γ η παραλλήλοις ἡ ζ κ πρὸς κ η. ἐν δὲ ταῖς β η, γ θ παραλλήλοις ἡ η κ πρὸς κ θ. ὡς ἄρα ἡ β κ πρὸς κ γ, ἡ ζ κ πρὸς κ η, καὶ ἡ η κ πρὸς κ θ. ἀλλ' ὡς ἡ ζ κ πρὸς κ η, ἡ ε κ πρὸς κ ζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ ζ κ πρὸς κ η, καὶ ἡ η κ πρὸς κ θ. ἀλλ' ὡς ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ α ε πρὸς β ζ. ὡς δὲ ἡ ζ κ πρὸς κ η, ἡ β ζ πρὸς γ η. ὡς δὲ ἡ η κ πρὸς κ θ, ἡ γ η πρὸς δ θ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε πρὸς β ζ, ἡ β ζ πρὸς γ η, καὶ ἡ γ η πρὸς δ θ. ηὕρηνται ἄρα τῶν α ε, δ θ δύο μέσαι, ἥ τε β ζ καὶ ἡ γ η.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχεις καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.



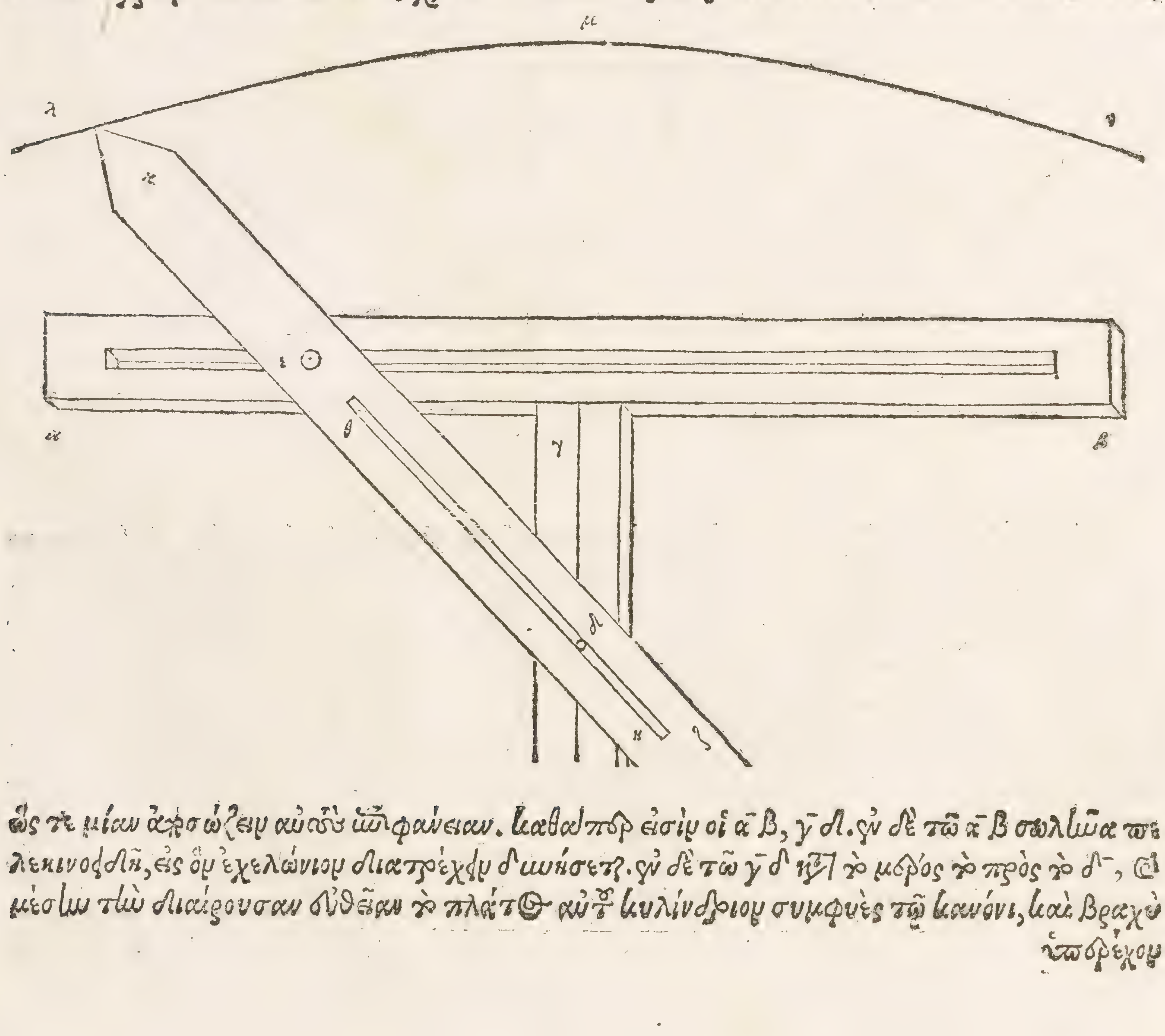
Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ α ε, δ θ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α κ πρὸς κ β, ἐν μὲν ταῖς α ε, β ζ παραλλήλοις ἡ ε κ πρὸς κ ζ. ἐν δὲ ταῖς α ζ, β η, ἡ ζ κ πρὸς κ η. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ κ ζ πρὸς κ η. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε α ε πρὸς β ζ, καὶ ἡ β ζ πρὸς γ η. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζ β πρὸς γ η, ἡ γ η πρὸς δ θ. ἀνάλογον ἄρα αἱ α ε, β ζ, γ η, δ θ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς α ε, δ θ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς α ε, δ θ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, εἰς ἀεὶ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦ γαθὲ τεύχειν
   Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα κἂν σύγε μάνδρην
   Ἢ † σῆρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος.
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
   Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύγ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
   Μὴ δὲ μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεοῦ δέος εὐδόξοιο,
   Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
   Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
   Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
   Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
   Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

† σωρὸν

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓχοειδῶν γραμμῶν.

Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἐκπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνὴρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ὅτ' ἐὰν ἐλλείποις. τῶν κοινῶν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕνεκά τε πρὸς ἐρατοσθένην συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,

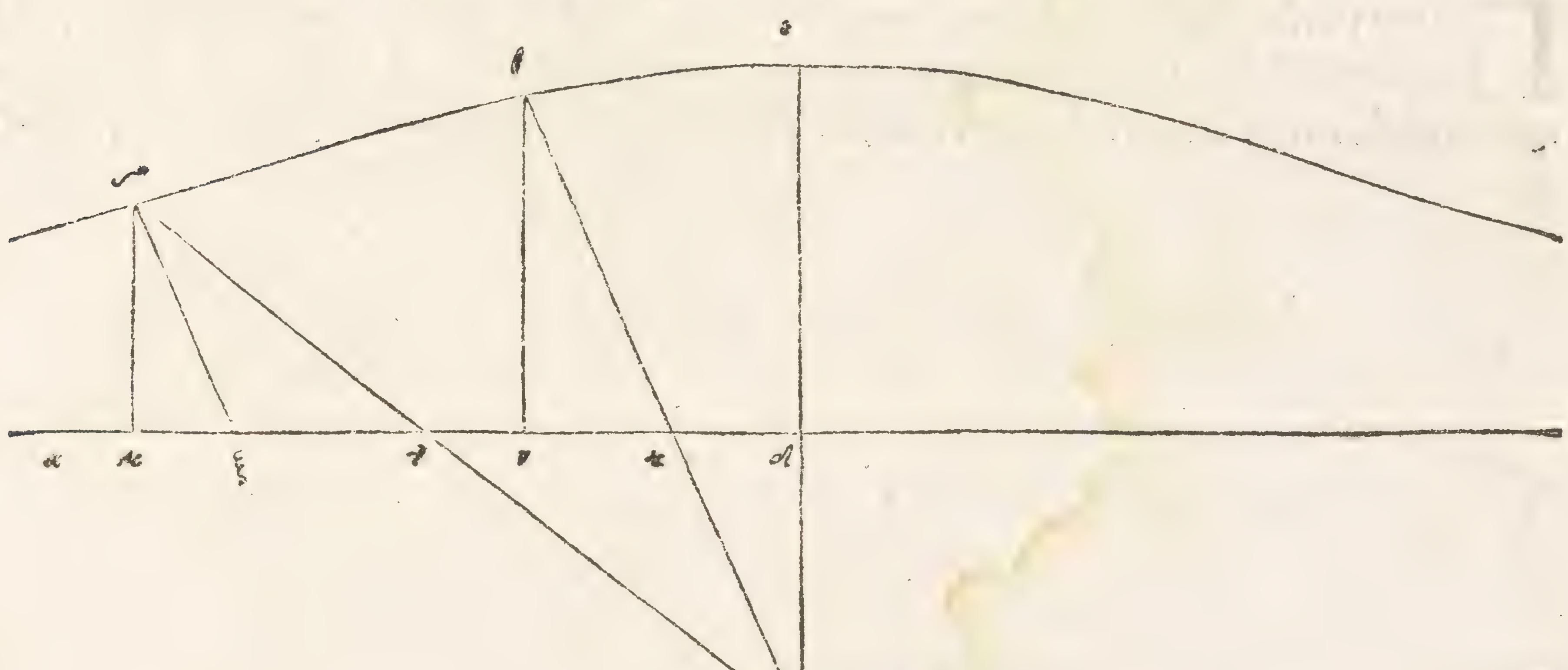


ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτῶν ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ α β, γ δ. ἐν δὲ τῷ α β σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γ δ ἐπὶ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ

ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν εζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν ηθ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκείσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ αβ κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ εζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν ηθ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ αβ κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ ηθ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ εζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρῳ νοουμένης. τῆς δὲ εκ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεται τις γραμμή, οἵα ἐστὶν ἡ αμν, ἥντινα καλεῖ νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμήν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ εκ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

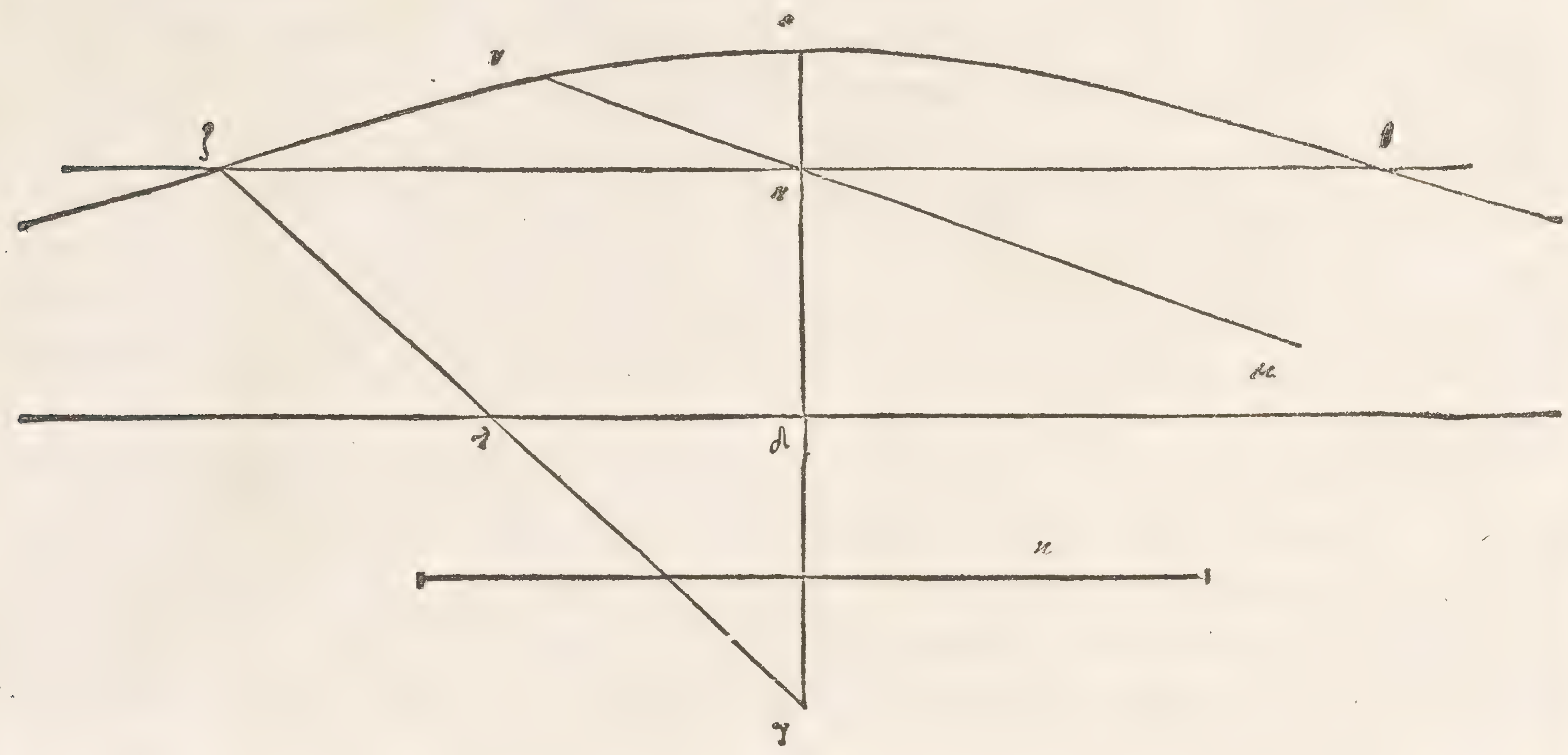
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ αβ κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ αβ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμήν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ αβ. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζεη. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γθ, γζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



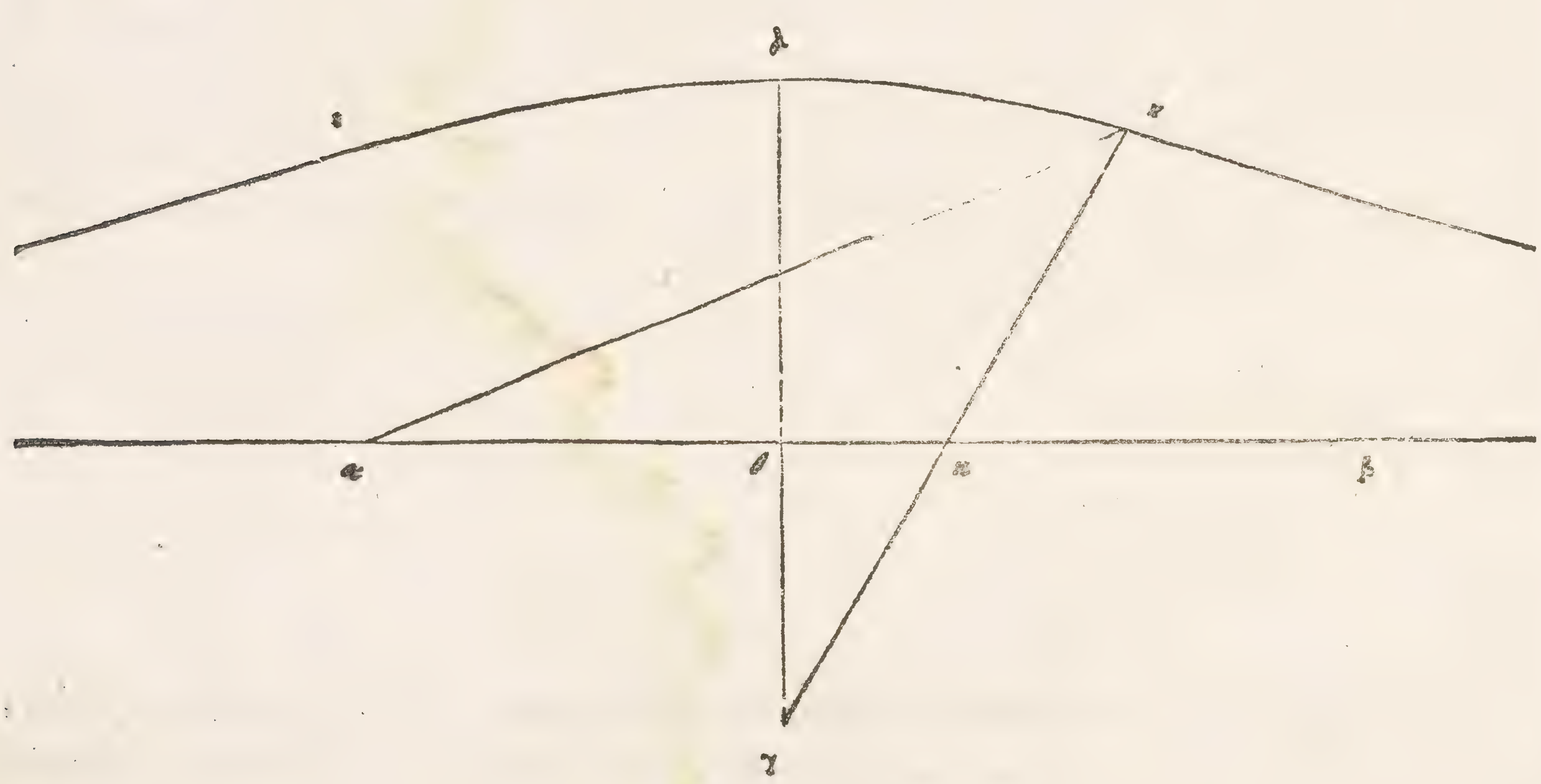
κθ, λζ. λέγω ὅτι ἡ ζμ κάθετος ἐλάττων τῆς θν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μλγ γωνίας τῆς ὑπὸ νκγ, λοιπὴ ἡ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μλζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ νκθ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ μζξ, ἡ κθ, τουτέστιν ἡ λζ πρὸς θν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξζ πρὸς ζμ. ὥστε ἡ ζλ πρὸς τὴν θν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζμ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θν τῆς ζμ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε αβ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμήν, ἐστὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῇ αβ ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζηθ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ δε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζη κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ λζ πρὸς ζγ. ἀλλ' ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἦν ἡ δε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γζ. ἴση ἄρα ἡ δε τῇ λζ ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔστω ὡς ἡ μη̄ ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η̄ παράλληλος τῇ ᾱ β, ἡ ζ̄ η. ἡ ἄρα ζ̄ θ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μ̄ ν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς ᾱ, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ̄, διάγειν τὴν γ̄ η, καὶ ποιεῖν τὴν κ̄ η ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ̄ σημείου ἐπὶ τὴν ᾱ β, ἡ γ̄ θ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δ̄ θ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ̄, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δ̄ θ, κανόνι

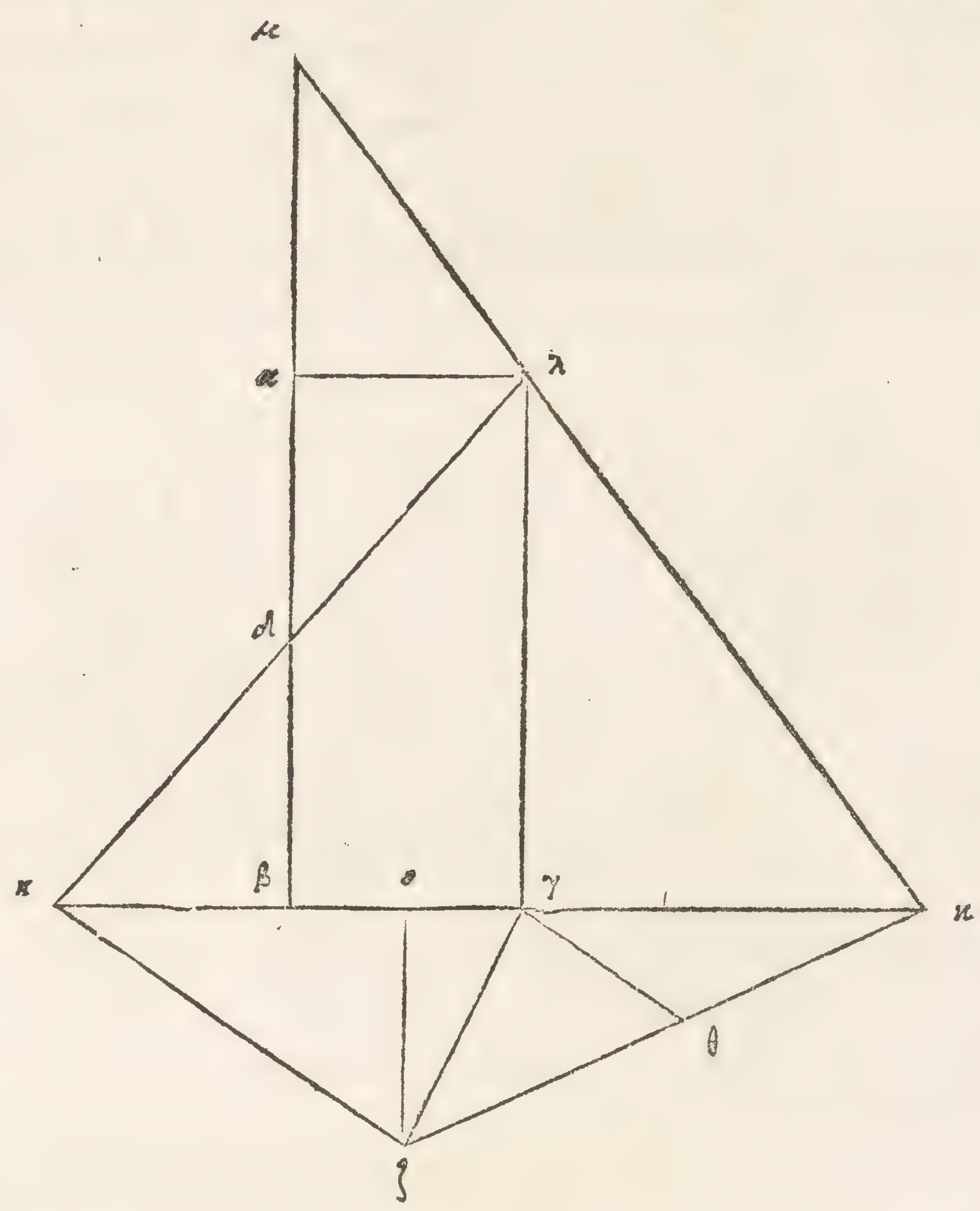


δὲ τῷ ᾱ β, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ ε δ̄ ζ. συμβάλλει ἄρα τῇ ᾱ η, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ̄ η. ἴση ἄρα ἡ κ̄ η τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γ̄ λ, λ̄ α πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ α β̄ γ λ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ᾱ β, β̄ γ, τοῖς δ̄, ε̄ σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δ̄ λ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ̄ β ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η̄. τῇ δὲ β̄ γ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε̄ ζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γ̄ ζ ἴση οὖσα τῇ ᾱ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ̄ η. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γ̄ θ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κ γ̄ θ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ̄, διήχθω ἡ ζ θ̄ κ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θ̄ κ τῇ ᾱ δ, ἢ τῇ γ̄ ζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κ̄ λ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ ᾱ β, ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ̄ γ, λέγω ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ φ̄ λ πρὸς κ̄ γ, ἡ κ̄ γ πρὸς μ̄ α,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γεζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κεζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ. ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καί ἐστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



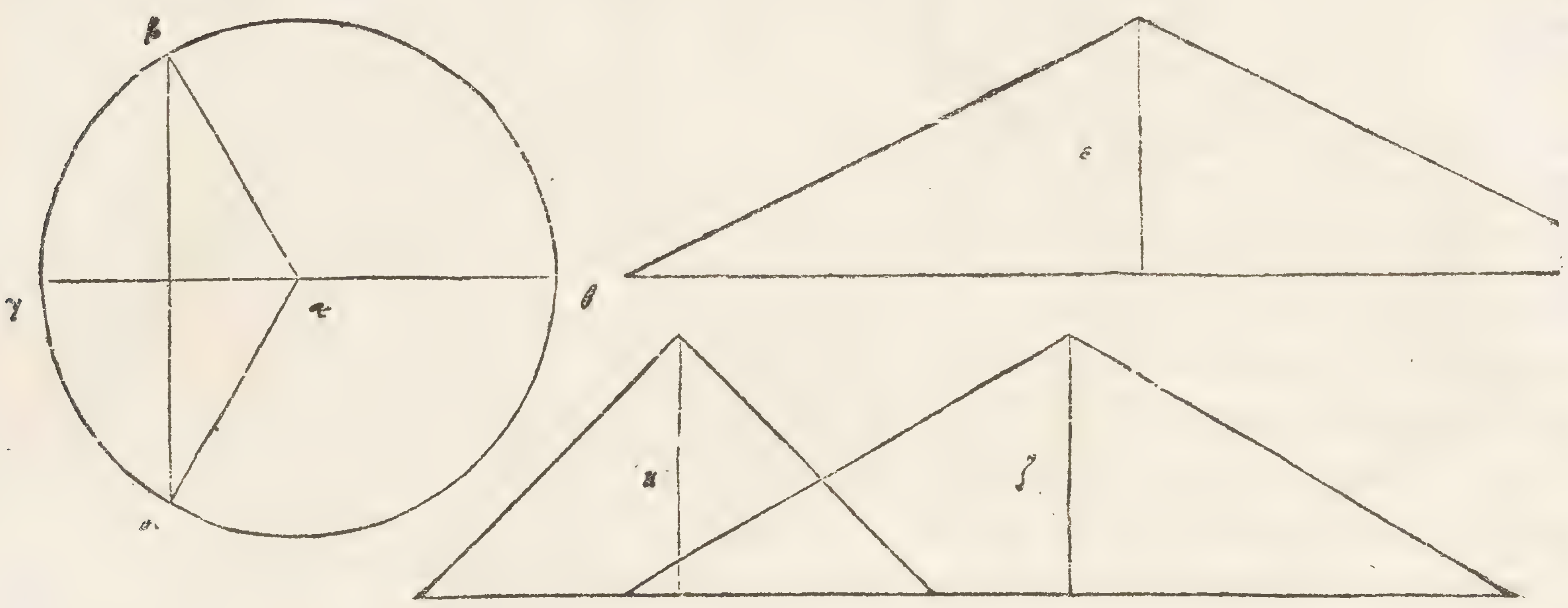
ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω, ἐπειδὰν σφαίραν κῶνος τέμνῃ ταν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

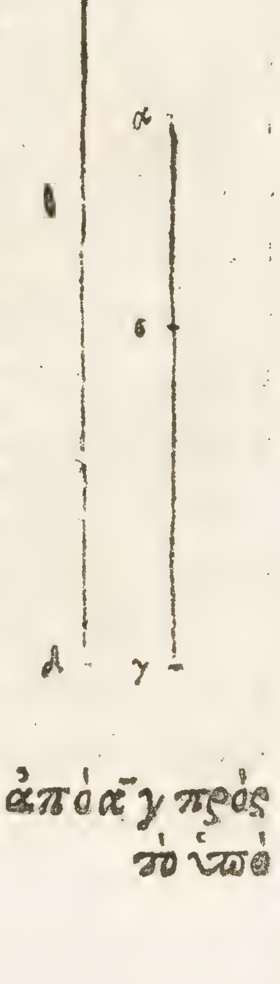
ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοείσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, οὗπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β γ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν β γ δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν β γ δ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεύς, τῷ β θ ζ κ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ε κ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. λοιπὸν τὸ β θ ζ κ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θ κ. τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ β α θ ζ τομεῖ.



Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ β α ζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β η ζ κώνῳ. καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ δ πρὸς δ θ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. τουτέστιν ἡ κ θ πρὸς θ α. ἦν γὰρ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς δ θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κ δ, α γ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κ δ, πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς

τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

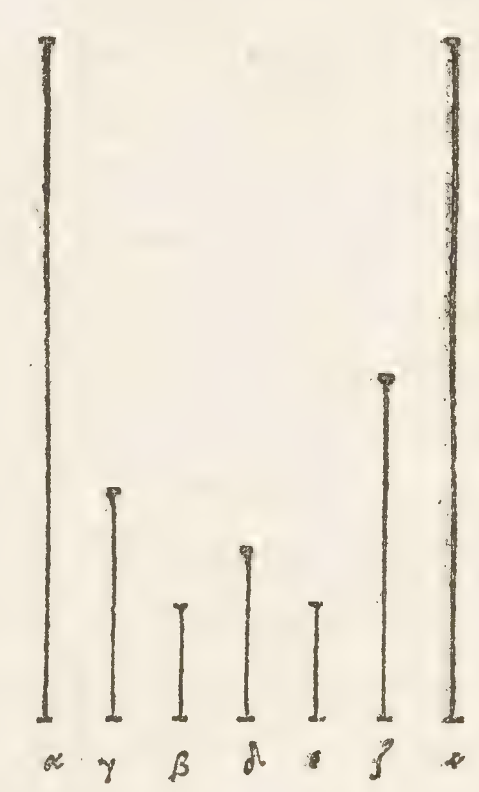
Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση, ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν β, χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ. καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κώνου λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται, Περὶ συνθέσεως λόγων.

κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι καὶ Ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον. ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὡς φασὶν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ Ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. ταυτὸν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὡς τῶν ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ' ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἰπεῖν ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ς ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλὰξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ' ὁ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ ζ ὁ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ α γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ς πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ς μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,

καὶ τοῦ

καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τὸ συνεχόμενους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

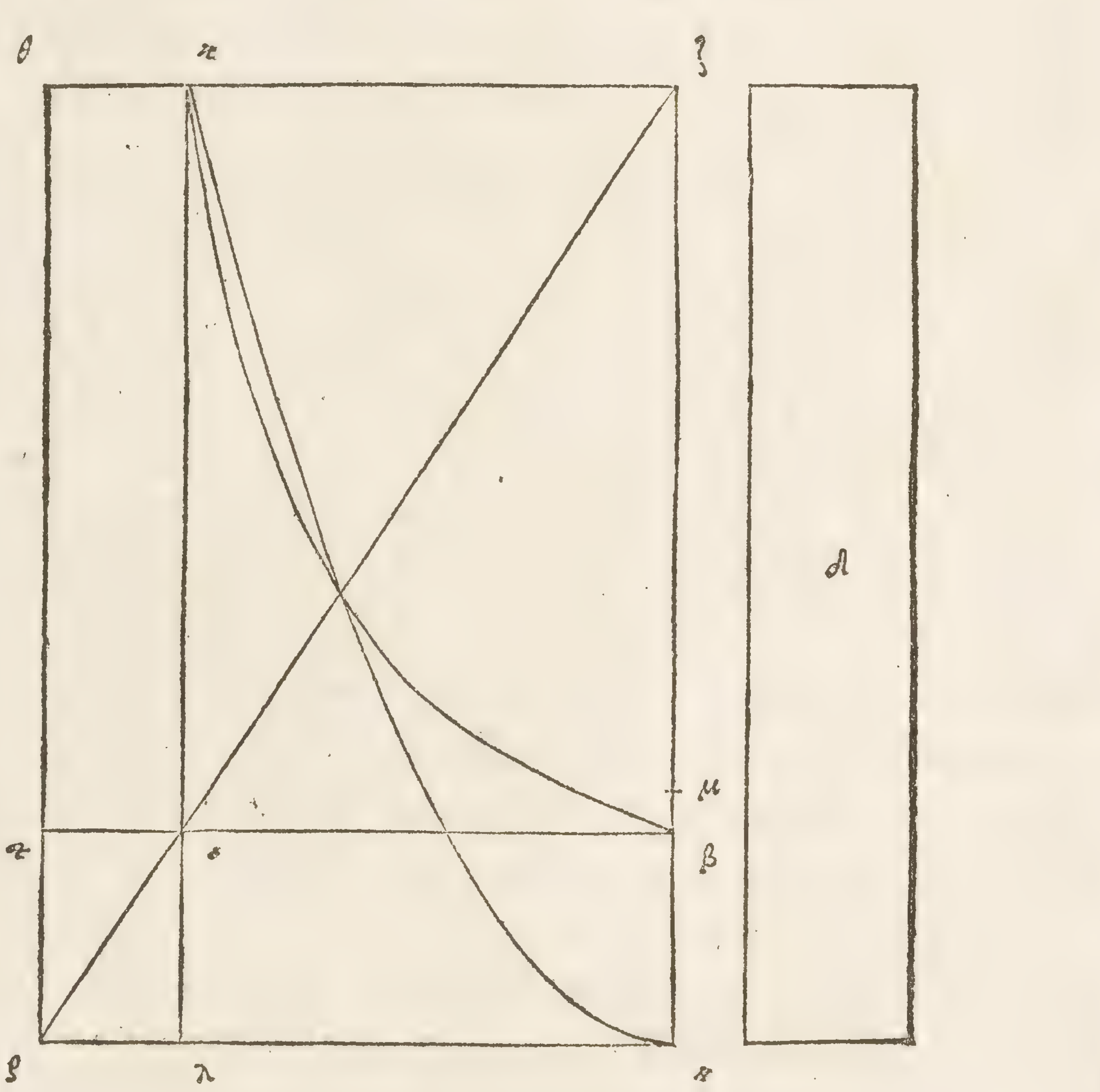


Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τὸ συνθεῖναι. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ρ πίπτει οὕτω διάδηλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς βζ πρὸς θζ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ρηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ἔνεστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβάλλειν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸ ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδην, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ προλελημμένα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζων τὸ πρόβλημα, ἔν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐνετύχομεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο. τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ' ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† διορισμῶν

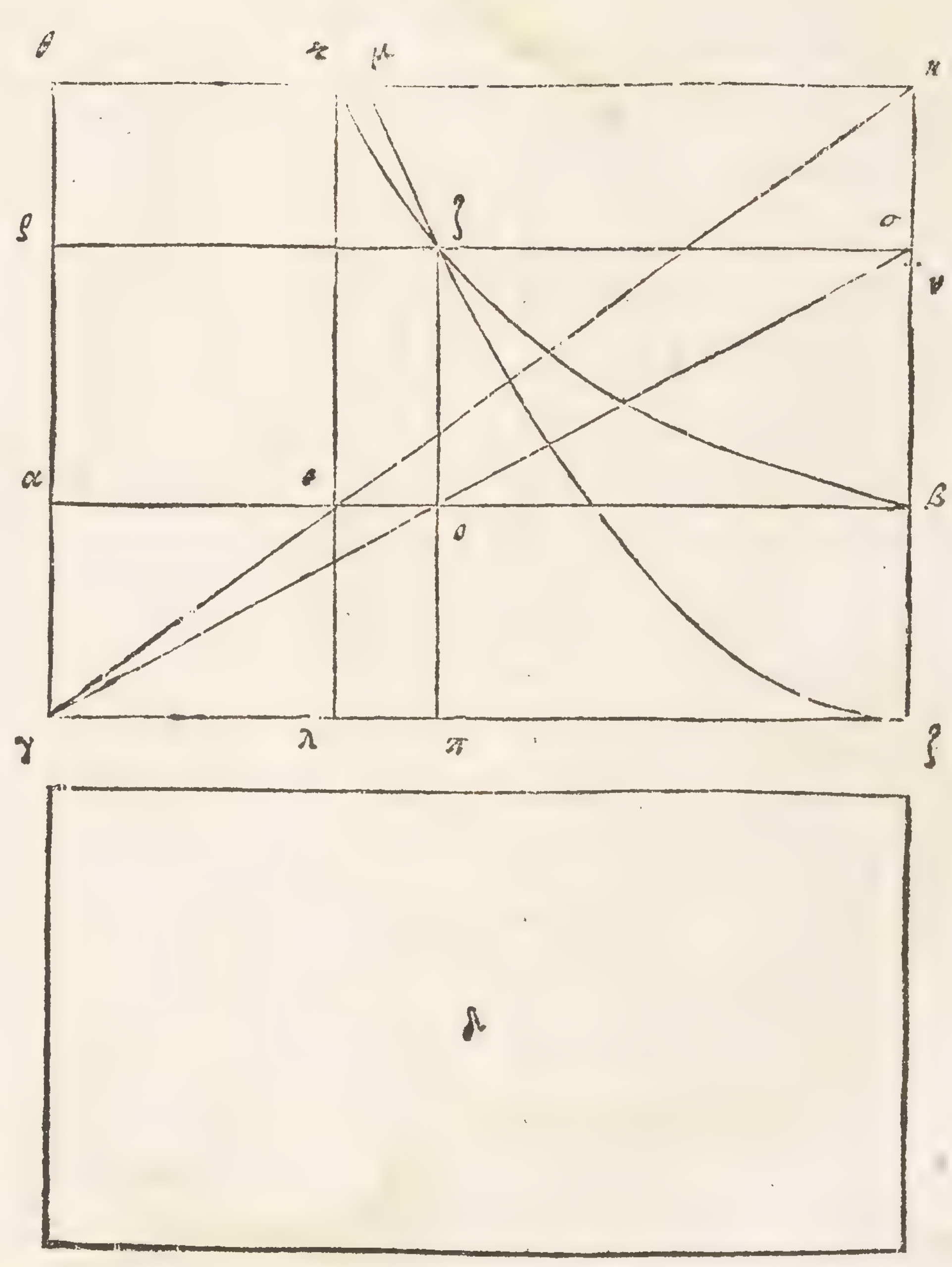
Εὐθείας δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς αγ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον ὡς τὸ ε, ὥστε εἶναι ὡς τὴν αε πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γη, διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἡ ζηβ, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γε, γη, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γθ, ηζ παράλληλος ἤχθω ἡ κελ, καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γημ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, ὡς δὲ ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηζ, ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως ἡ γη πρὸς ημ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ' ὡς ἡ γη πρὸς ημ, τῆς ηζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μηζ τῷ ἀπὸ ζκ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζη, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ημ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς ηγ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ ηκ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ θλ χωρίον



ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ γβ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβκ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γη γραφῇ ὑπερβολὴ ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θγ, γη, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κβ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἅπτεται δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ κε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν αβ. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ εβ, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ εα, αγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ εβ ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα. ὅταν ᾖ διπλασία ἡ βε τῆς εα, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα.

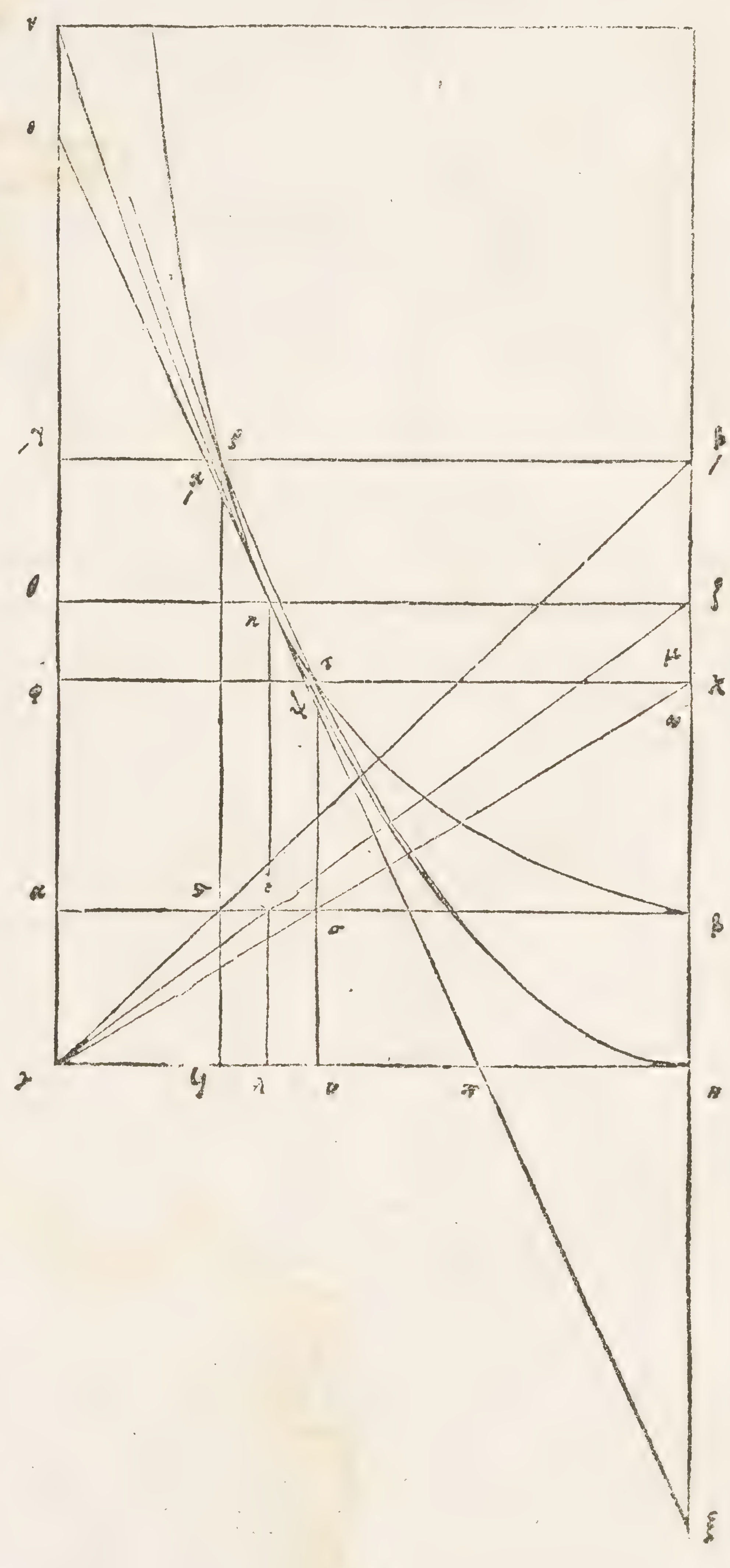
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ αγ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς αβ τρίτον μέρος ἡ αε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν αγ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζη παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα. ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηκ. ἔστω οὖν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γζν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ' ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζη. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζν. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζν τῆς ζη κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ημ τῷ ὑπὸ ηζν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζη γράψωμεν παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μξζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ τῷ αζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γζ γράψωμεν ὑπερβολὴν, ἥ-

ξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ β κ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ ξ ο π. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ ρ ξ σ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ β κ ζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θ γ, γ ζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρ ξ π, ταῖς α β ζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρ ξ π τῷ ὑπὸ α β ζ, ὥς τε καὶ τὸ ρ ο τῷ ο ζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ο ς. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ο β πρὸς β ς, τουτέστιν ἡ γ ζ πρὸς ζ ς. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ς, τῆς ζ ν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ὑπὸ ς ζ ν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ὑπὸ ς ζ ν. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ γ ζ ν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ ς ζ ν, ἴσον τὸ ἀπὸ ς ξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς β ε τῆς ε α, τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, ἡ α γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ α γ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ α β ἤχθωσαν αἱ θ ζ, γ η. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γ α ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. τὸ ἄρα ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς β α λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζ η παραβολή. ὥς τε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θ γ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ν γ η, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ β κ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζ η ἴση κείσθω ἡ η ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξ κ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς

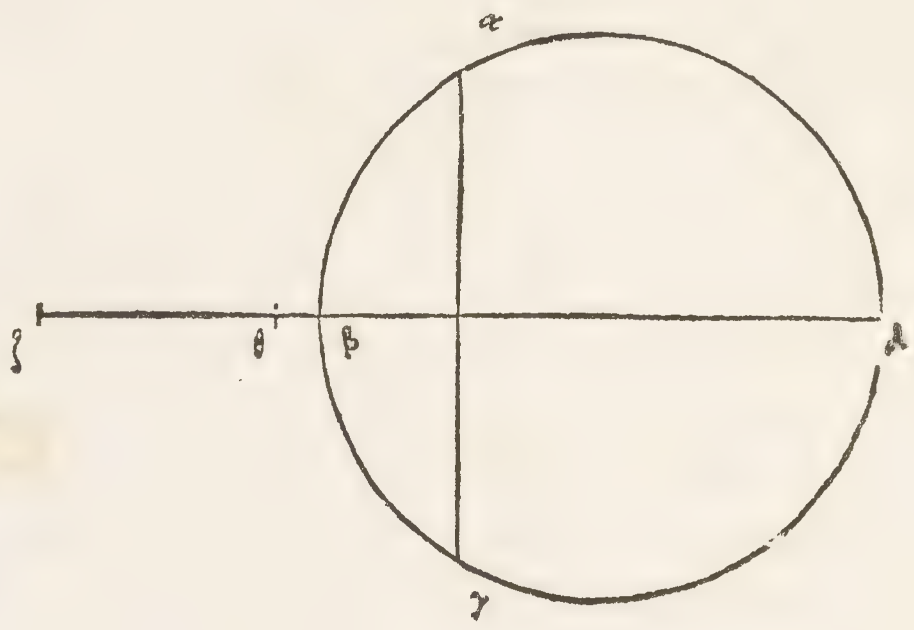


διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ η τῆς η θ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ο θ η τρίγωνον τῷ ξ ζ η τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ η τῆς η ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ η τῆς η π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ η. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π η τῇ η ζ. ἴση ἄρα ἡ ο η τῇ η π, ἡ ἄρα ο η π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ η. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ η. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ ϲ, καὶ διὰ τοῦ ϲ τῇ η λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ ϲ υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ϲ. ἴσον γὰρ τὸ φ ϲ τῷ ϲ η, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ ϲ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ϲ χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ϲ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η χ τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω, ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ϛ. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ϛ τῇ η λ παράλληλος ἡ ϛ ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ η ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ϛ καὶ τῷ α η, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ϛ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ϛ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η ..., τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ϛ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η β τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ϛ. τὸ ἄρα ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τοῦ ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ᾖ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. στοχάσασθαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι μετὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α, καὶ τὸ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ η γραφομένην παραβολήν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολή, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ υ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ η, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ϛ τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ϛ. ὥστε τὸ ϛ σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α, τῷ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τοῦ ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ ϲ. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ϛ.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντέθειται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι

μηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζθ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δεδείξεται. εἰ δὲ ἴσον, τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ. διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, ὅπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως πρόκειται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ᾽ ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ᾽ ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν.



προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ. καὶ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν· ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκέτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπὼν, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτὸν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

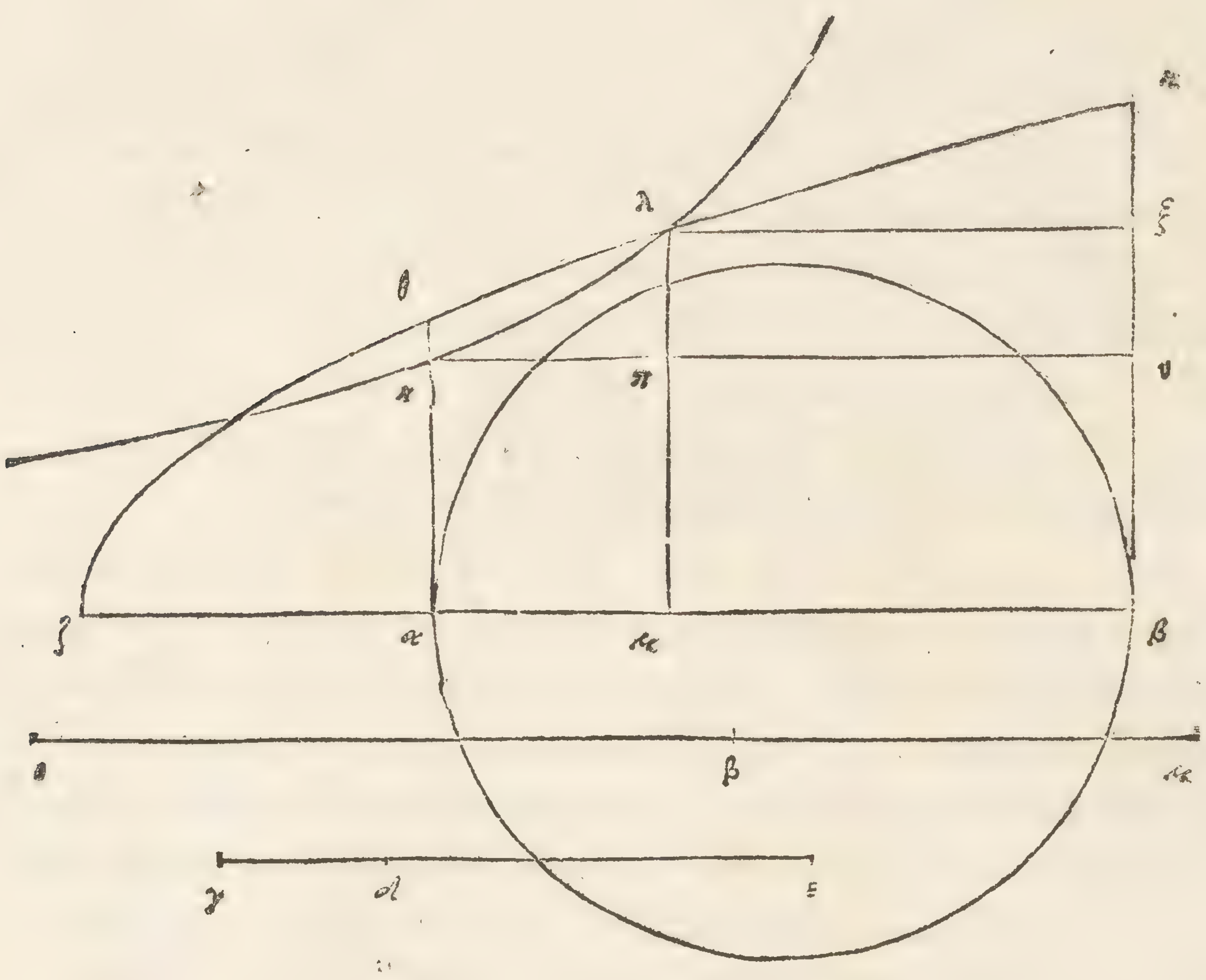
Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ᾽ ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχὼν, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ᾽ ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψα τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐνετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφέρετο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ. μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ

τὴν

τὴν αθ ἡ βκ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ η. περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζβκ. γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ λμ. καὶ διὰ τῶν η, λ τῇ αβ παράλλη-



λοι ἤχθωσαν αἱ ηυ, λξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ηλ, ἀσύμπτωτοι δὲ αβ, βκ, καὶ παράλληλοι ταῖς αηυ, αἱ μλξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αηυ τῷ ὑπὸ μλξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν ηυ τῇ αβ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λξ τῇ μβ, τὸ ἄρα ὑπὸ λμβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηαβ. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ πρὸς ηα, οὕτως ἡ αβ πρὸς βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λμ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζμ αη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζμ πρὸς μλ, ἡ μλ πρὸς αη. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζμ πρὸς αη, οὕτως τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ αη, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αβ. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν αη, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν αη, ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αη, τουτέστιν ἡ γε πρὸς εδ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἐστὶν ὡς ἡ γε πρὸς εδ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γε πρὸς εδ, καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ αμ πρὸς τὸ

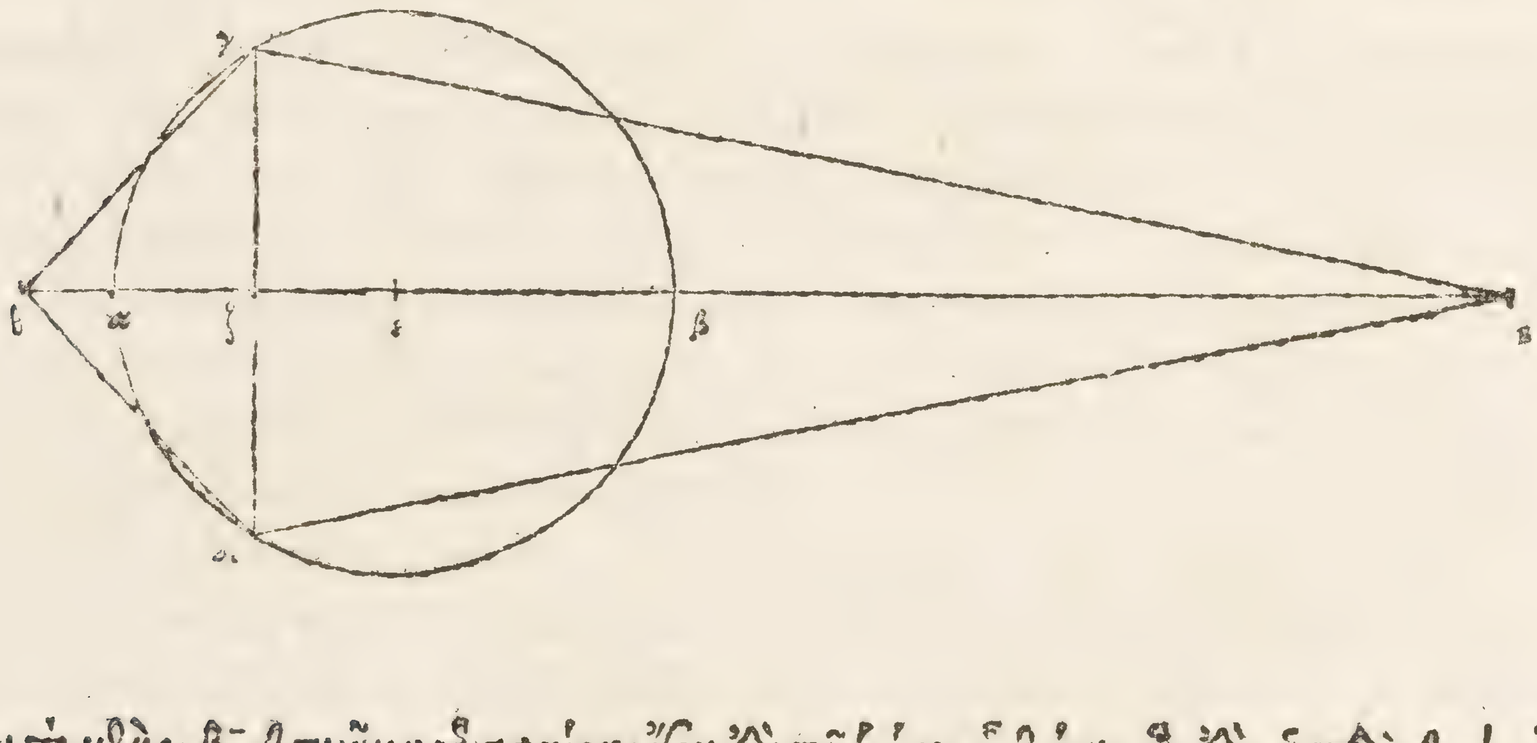
τμῆ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λμ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ομ, ἴσος ἐστὶ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ πρὸς μο, οὕτως ἡ αμ πρὸς μβ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αμ πρὸς μβ, οὕτως τὸ ἀπὸ πμ πρὸς τὸ ἀπὸ μβ. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, ὕψος δὲ τὴν μο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

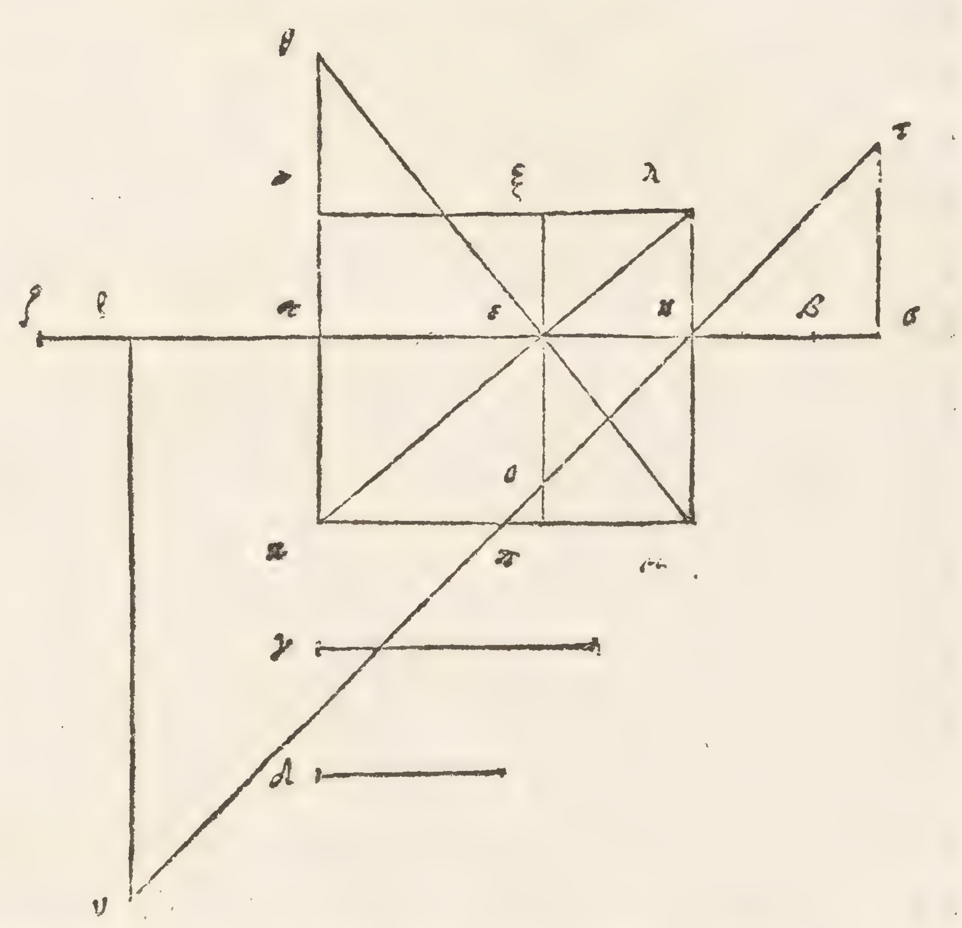
Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ αβγ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς αβ, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν εα, αζ πρὸς ζα. οὕτως τὴν ηζ πρὸς ζβ. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν εβ, βζ πρὸς ζβ, οὕτως τὴν θζ πρὸς ζα, ἀποδέδει-



κται ὅτι τὸ μὲν γβδ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζη. τὸ δὲ γαδ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τοῦ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζθ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζη. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θζ πρὸς ζη δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς τὴν ζβ. διελόντι ὡς ἡ θα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ ηβ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζα. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς εβ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θα, βη. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θζ πρὸς ζη δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θα πρὸς αζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζβ. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζα. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β. καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ. ὥς τε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζε πρὸς τὴν εη. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα. γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ νκ ἡ ξεοπ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βσ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη, συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ρε, συναμφότερος δὲ ἡ μβε ἴση τῇ σε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε, τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρεσ. διὰ δὴ τοῦτο ὅταν τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτῃ, τό τε τὸ σ ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη. ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. τὸ δὲ ὑπὸ ζεη ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρεσ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ εη. κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν σ, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ στ, ρυ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν αβ, ἦκται ἡ τυ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ εβο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τυ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν σ, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ στ, ρυ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τυ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν εοβ, στβ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ συ πρὸς ερ. ἀλλ' ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου. ὡς δὲ ἡ σε πρὸς ερ, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ σερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. τὸ δὲ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ οβ τοῦ ἀπὸ βε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα τοῦ ὑπὸ σερ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ εη ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ εη λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ εη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξο. ἑκατέρα γὰρ τῶν εη, ξο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λβε, τὸ ἄρα ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τυ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥς τε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξοβ γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ



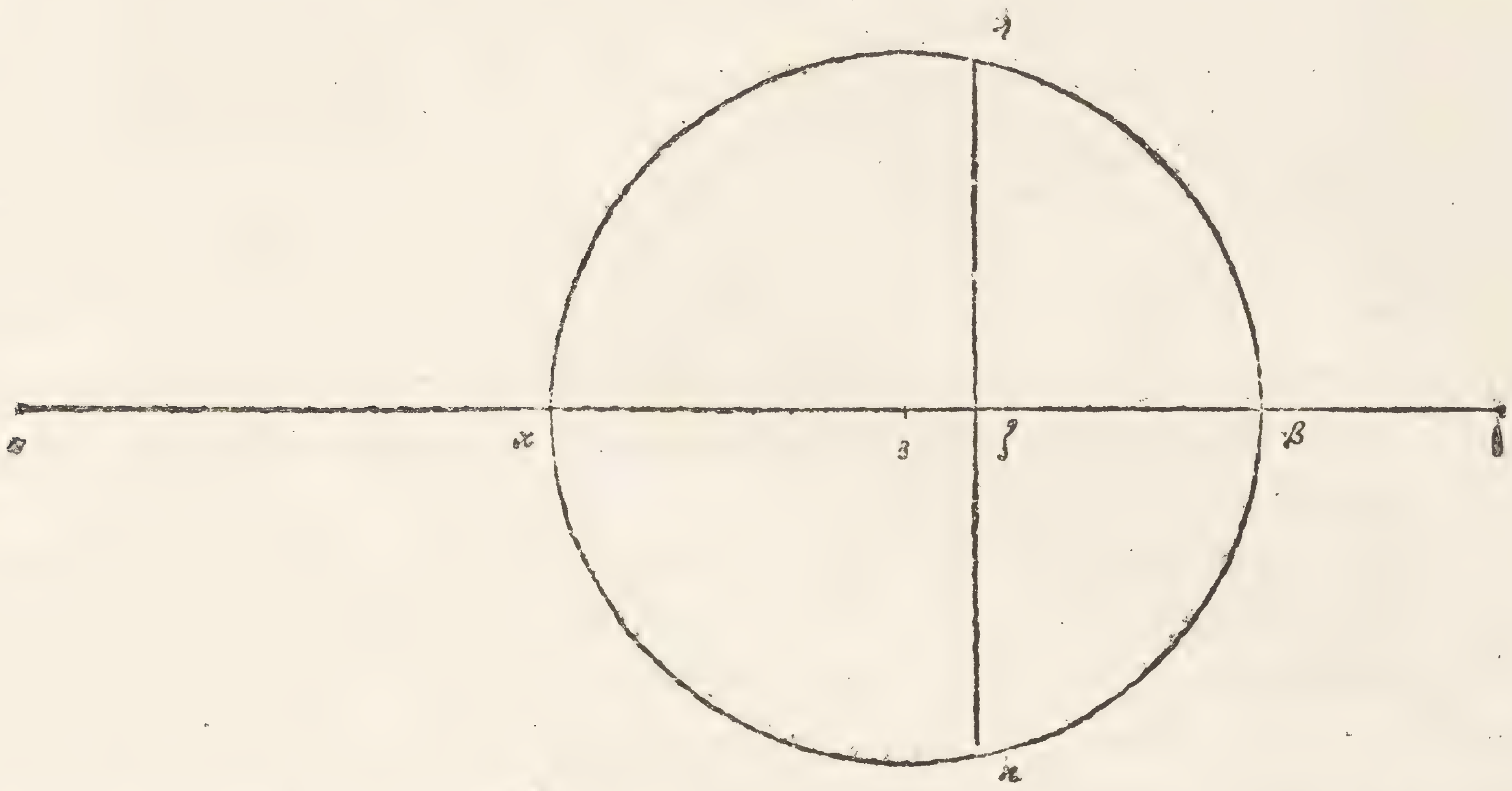
εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξτ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τέμνειν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, καὶ ἡ βσ. ἀπὸ τῶν ρ, σ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, στ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς στ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ σε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ὑπὸ σερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ σερ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εη, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ εσ. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρεσ. ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ εη. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τέμνειν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

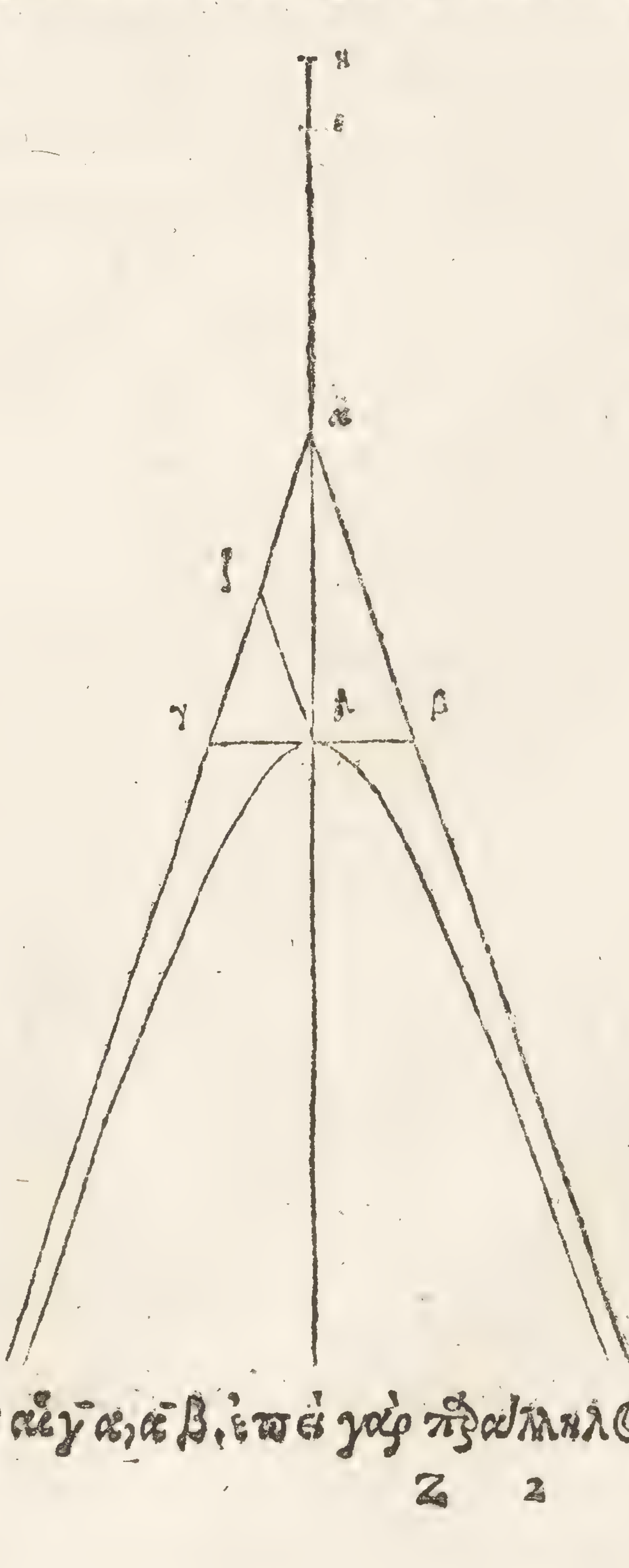
ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὃ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ὑπὲρ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τῆς ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἀλ-



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τὸ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δεκ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τῆς εκ ὑπερβάλλοντα, ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ δεκ.



λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γα, αβ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν

ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεη. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεη εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

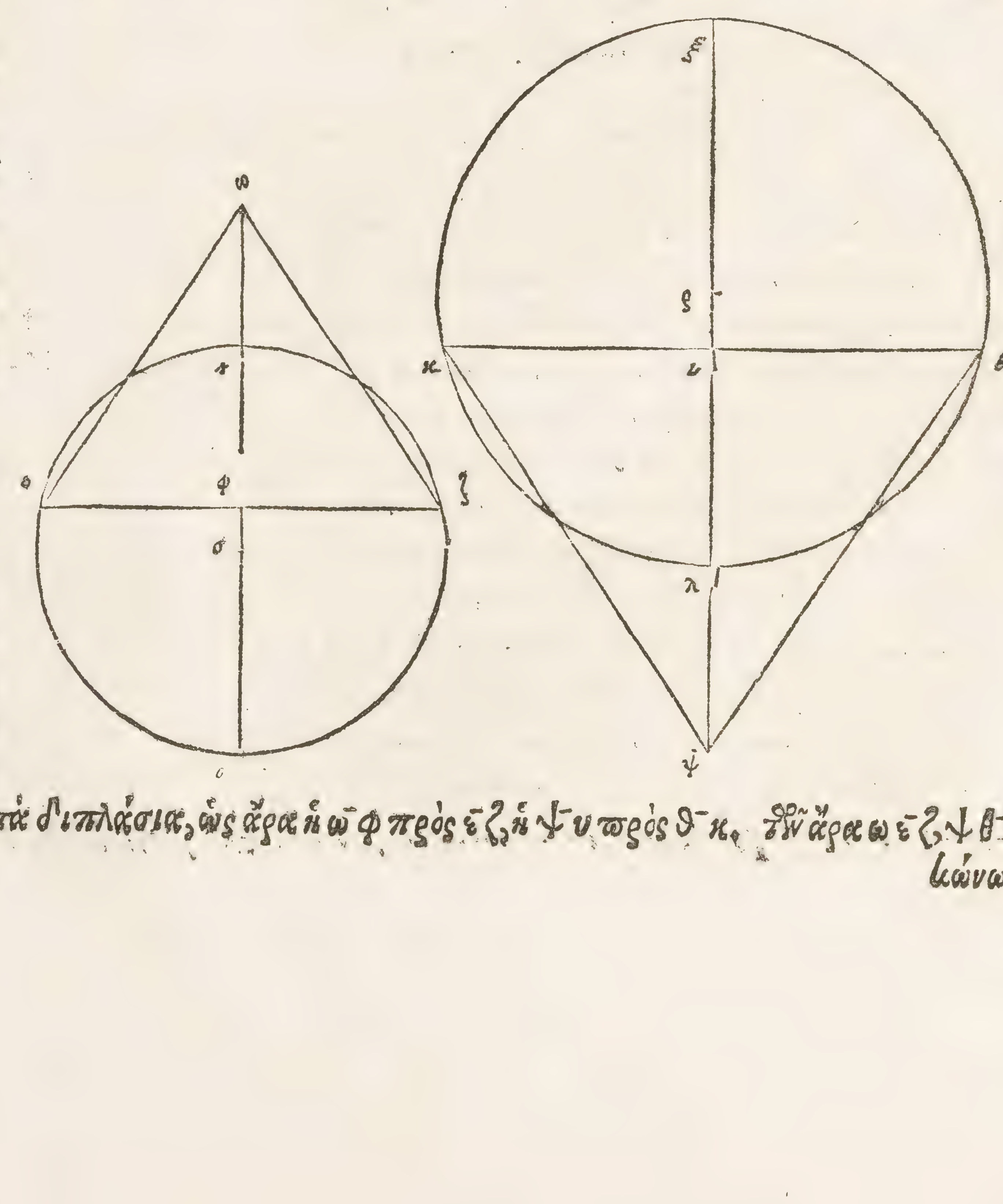
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

ΕΝ δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀποθέμενος τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπὶ τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

ΚΑὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ. τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ κώνων



κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαίρας δεδομένα, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ εζ καὶ ἡ ηφ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ηφο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φη. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ σο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οφ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σο πρὸς οφ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς σοφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ωφ πρὸς φη. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ωφ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δ' ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ εζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν εη δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ εηφ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς εφ πρὸς φη λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια οὖσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς εζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φη τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ κθ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δ. ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ κθ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δ. ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς βα πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θβ πρὸς θγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν. ἀλλ' ὡς ἡ θγ πρὸς θπ, ἡ μν πρὸς νρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γθπ, μνρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θπ, ἡ λν πρὸς νρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λρ πρὸς ρν. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς, δοθεῖσα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ. δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ εζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γπ, μρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ, πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς πλρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τμήματα.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδ ζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδ ζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδ ζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ. δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ. τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἤγηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ. καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδ ζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ β πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδ ζ τῆς δζ. μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδ ζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ β πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς θζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδ ζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ β πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

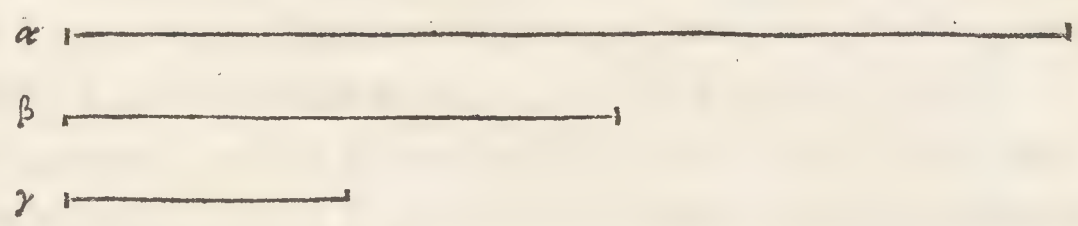
Ηθζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα. πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τὸ ἀπὸ βα. τὸ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ θβ πρὸς βκ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη ἢ τὸ ἀπὸ ζη, ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥστε

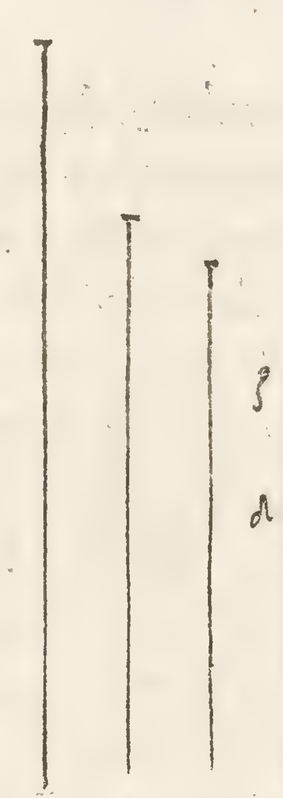
γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β.

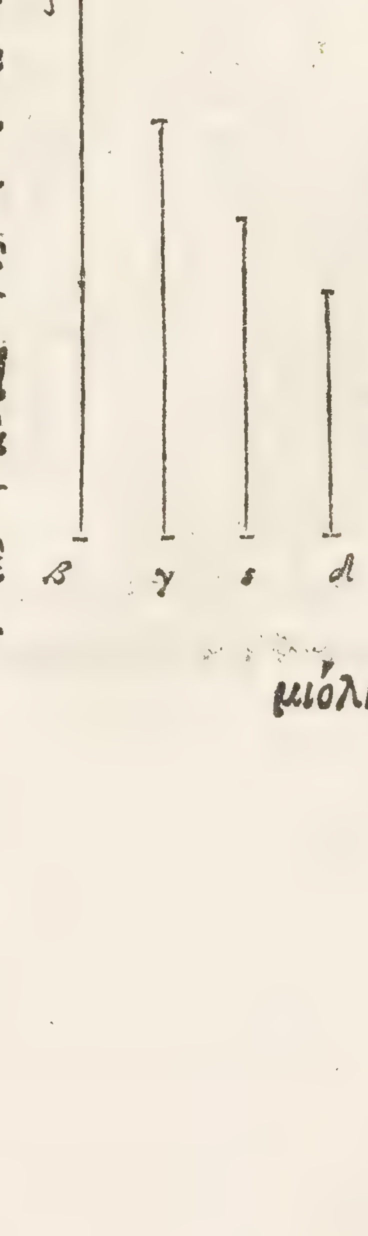


Τὸ ἄρα ὑπὸ θζ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζ η τοῦ ἀπὸ ζη ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζ δ τοῦ ὑπὸ τῶν βε δ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδ ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζ δ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐγγίον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρω τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δ ε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζ ε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζ ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν ε δ. καὶ ὁ α ε πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε.

Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβ κ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ προσκεῖται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιών ἐστι τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-

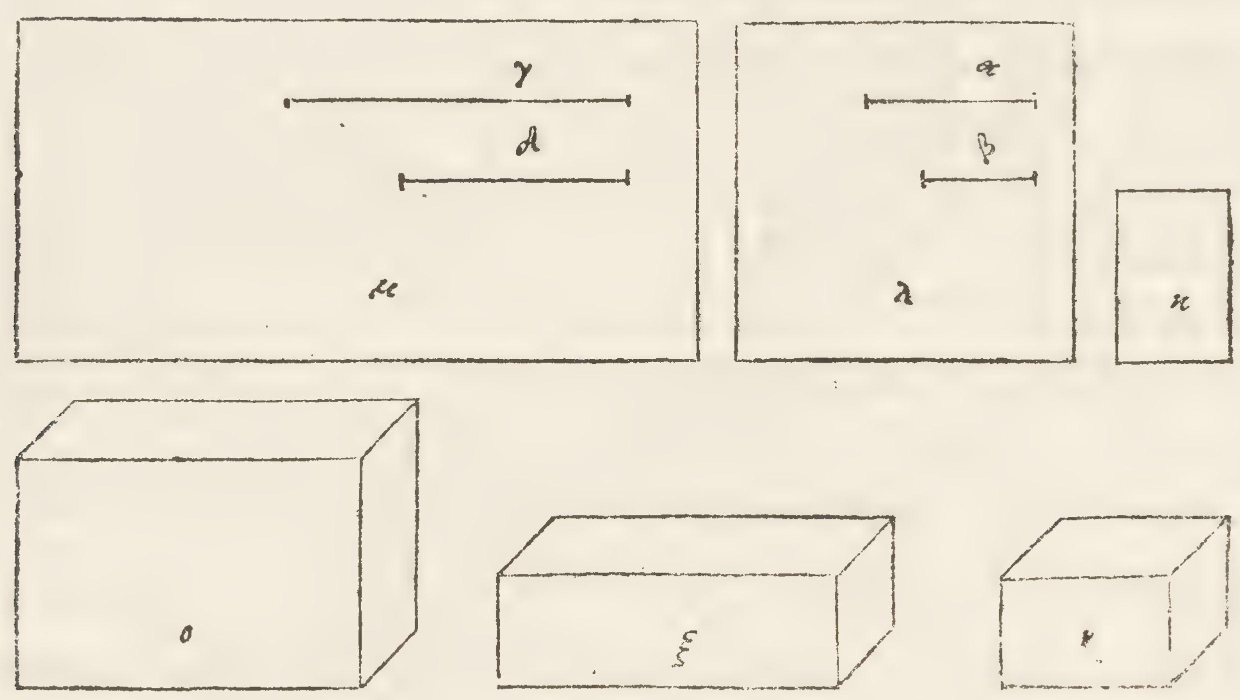




μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ αβ ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω. τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ο.



ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αβ ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστιν ὁ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β, πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν. ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν. ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ αβ ἐπὶ τῆς β πρὸς τῆς ἀπὸ γ ἐπὶ τῆς δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τῆς ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δβ ἐπὶ τῆς β πρὸς, τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ αβ ἐπὶ τῆς β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ αβ ἐπὶ τῆς β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τῆς α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησὶ, ὅτι ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δαβ τμήματος, καὶ τοῦ βγδ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸν βαδ κῶνον, ὁ τῆς κθ ἐστὶ πρὸς θγ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον.

τῷ κώνῳ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐπὶ τὴν θα, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστι ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θη. ἐστὶ δὲ τοῦτο φανερόν. αὐταῖς γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γη.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δ' αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θη μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὡς ἡ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιος ἐστὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μὲν ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ

θβ. καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἐζήτουν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστι τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θακε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθκλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ. οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλθα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ηγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλαθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθκε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς βθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβου λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, κβ. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ, κῶνος ἔσω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν δε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων κατὰ τὴν ἀπωτέρω. τοῦτο δέ ἐστιν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι· τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αργ τοῦ ὑπὸ ακγ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αργ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακγ τοῦ ὑπὸ ακγξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αργ, μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ ακγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακκξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ακξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μκγ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μκγ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ξκα μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ. καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ μκγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ. τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τῆς ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης ὑπὸ τοῦ Μιλησίου μηχανικοῦ Ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τῆς κύκλου μέτρησιν.

Ἐχόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχεις ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω. τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησὶ συνεγγὺς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέν τοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

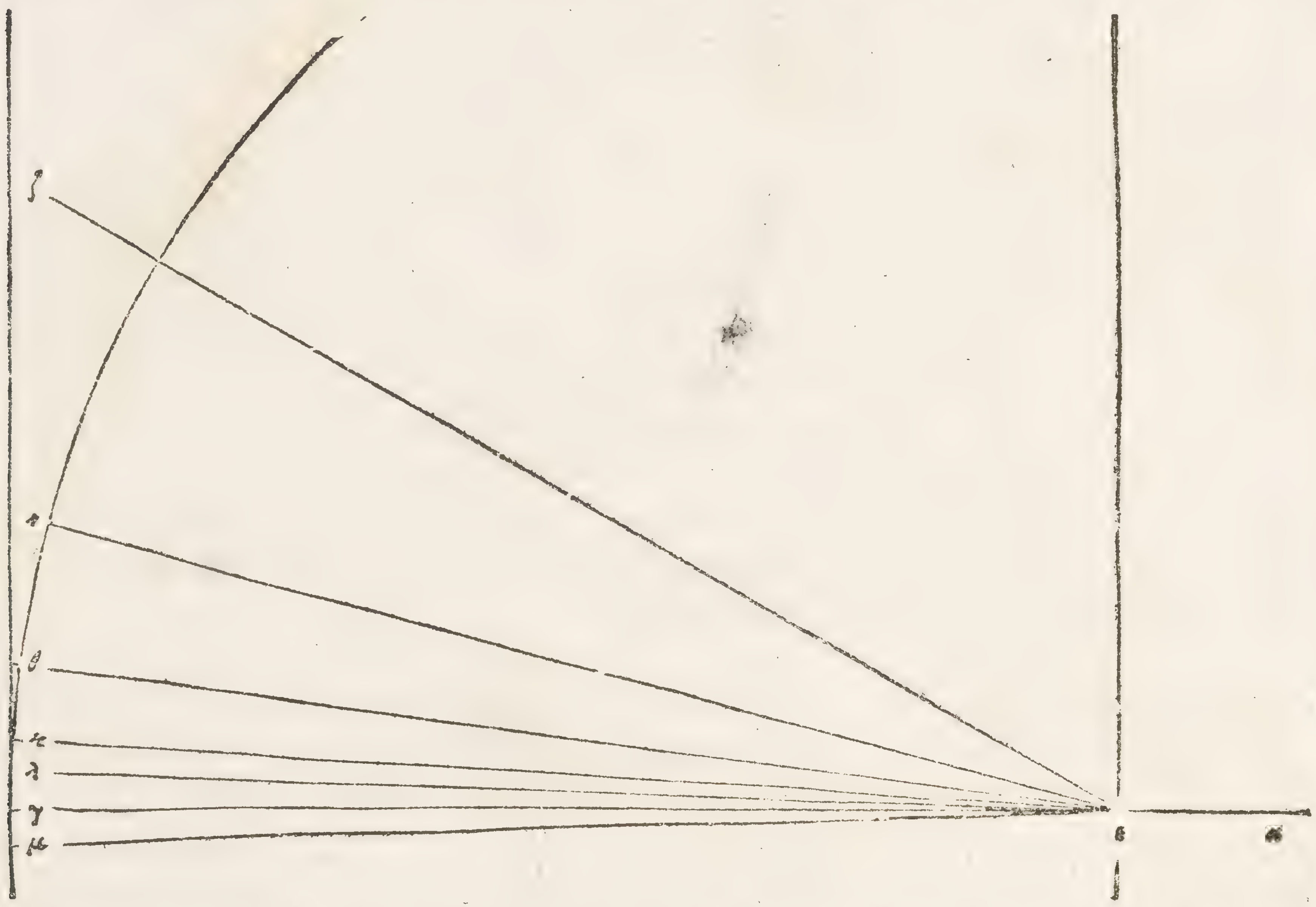
ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γεγυμνασμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ· ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησίν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστὶν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρὴ, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ' ἀρχιμήδους γράφεται. ἐστὶν γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, παντί που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστάτων. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφάνη, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως ἐστὶν τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενὸς ἐστὶ ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτον ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον κἂν τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ρ τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δύναμιν πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου, ὥστε οὐδὲν ὑμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί

νων ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν διχοτομήσαντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ τρίτῳ ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ. καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τὸ γ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε. συστασθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου ἰσοπλεύρου. ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τς. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{M}$,γχλς. ἡ δὲ γζ ἐστὶ ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{M}$,γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{M}$,γχλς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{M}$,γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ε $\overset{\zeta}{M}$ σκζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπεται γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τς	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ
ἐπὶ τς	ἐπὶ ρνγ	τὰ δὲ σξε θ $\overset{\zeta}{M}$ σκε
$\overset{\theta}{M}$,αω	$\overset{\alpha}{M}$,ετ	ἐπεὶ ἐξελείπει ἄρα $\overset{\theta}{M}$ β
,αω λς	,ζχν	$\overset{\delta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,β ,α εἰς τὸ ἀκριβές
,θ $\overset{\theta}{M}$,γχλς	υνθ	$\overset{\alpha}{M}$,β ,γχτ
	$\overset{\beta}{M}$,γυθ	,ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἐστὶν ἄρα ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τς. ἡ δὲ εγ σξε, καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζον εἰσὶν τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστὶ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει,

ἤπερ

ἤπερ φοα πρὸς ρνγ, ἡ ηε ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{λδ}{M}$ ͵θυν πρὸς $\overset{β}{M}$ ͵γυθ. συναχθήσεται δὲ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ, φοα. τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{λβ}{M}$ ͵ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{β}{M}$ ͵γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται $\overset{λδ}{M}$ ͵θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα η' ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϙα ἴσου τετραγώνος εἰς τὸ ἀκριβὲς $\overset{o}{M}$ κα. ϛ' ιε' ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{λδ}{M}$ ͵θυν πρὸς $\overset{β}{M}$ ͵γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα η' ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φοα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα η'
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα η'
$\overset{κε}{M}$ $\overset{γ}{M}$ ͵εφ	$\overset{α}{M}$ ͵ετ	$\overset{κε}{M}$ $\overset{δ}{M}$ ͵εφξβ ∠'
$\overset{γ}{M}$ ͵ε ͵δϡο	͵ε ͵βφ ρν	M ͵ε ηρ ϙια δ'
φοα	τ ρνθ	φϙα η'
$\overset{λβ}{M}$ ͵ϛμα	ὁμοῦ $\overset{β}{M}$ ͵γυθ	ξβ ζια δ' ηξ δ'
	ὁμοῦ $\overset{λδ}{M}$	θ υκη ζ' δ' ξδ'
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		$\overset{o}{M}$ κα ϛ' ιε' ἔγγιστα
$\overset{λδ}{M}$ ͵θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ δον πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φοα, καὶ ἔτι μόριόν τινος. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ͵αρξβ η'. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ.

Ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ͵αξβ η' πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{ρλε}{M}$ ͵φλ δ' ∠' ξδ'. τὸ δὲ ἀπὸ γθ $\overset{β}{M}$ ͵γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται $\overset{ρλϛ}{M}$ ͵γλμγ ∠' ξδ', ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτοῦ $\overset{o}{M}$ ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵αρξβ η'	ἡ θγ ρνγ	͵αροβ η'
ἐπὶ ͵αρξβ η'	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵αροβ η'
$\overset{ρ}{M}$ $\overset{ι}{M}$ $\overset{ϛ}{M}$ ͵βρκε	$\overset{α}{M}$ ͵ετ	$\overset{ρ}{M}$ $\overset{ι}{M}$ $\overset{ζ}{M}$ ͵βρμϛ ∠'
$\overset{ι}{M}$ $\overset{α}{M}$ ͵ϛσιβ ∠'	͵ε ͵βφρν	$\overset{ι}{M}$ $\overset{α}{M}$ ͵ζσκα ∠'
$\overset{ϛ}{M}$ ͵ϛγχρκζ ∠'	τ ρνθ	$\overset{ζ}{M}$ ͵ζ δ' λρμη ∠' δ'
͵βσρκδ δ'	ὁμοῦ $\overset{β}{M}$ ͵γυθ	͵βσρμδ δ'
ρμε δ' ξδ'		ρμϛ ∠' ξδ'
ὁμοῦ $\overset{ρλε}{M}$ ͵φλ δ' ∠' ξδ'	ὁμοῦ $\overset{λ}{M}$ ͵γλζ ∠' ξδ'	
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ $\overset{ρλϛ}{M}$ ͵γλμγ ∠' ξδ'.		$\overset{o}{M}$ λϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ͵αροβ η', καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ͵βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ ͵βτλδ δ´. ἡ δὲ γκ, ρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\phi\mu\delta\eta}{M}$ ψκγ ις´. τὸ δὲ ἀπὸ γκ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. τοῖς δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε, ἔσται ἄρα $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βρλβ ις´. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ´. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ μα <. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ´	ἡ γκ ρνγ	͵βτλθ δ´
ἐπὶ ͵βτλδ δ´	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ´
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\xi}{M}$ $\overset{\varsigma}{M}$ ηφ	$\overset{\alpha}{M}$ ετ	$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\xi}{M}$ $\overset{\varsigma}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ηφ
$\overset{\xi}{M}$ $\overset{\theta}{M}$ ͵θασοε	͵ε ͵βφρν	$\overset{\xi}{M}$ $\overset{\theta}{M}$ ͵θβψοε
$\overset{\varsigma}{M}$ ͵θλρκζ <	τρνθ	$\overset{\varsigma}{M}$ ͵θλσοζ <
͵ηασρκ ις α	ὁμοῦ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	$\overset{\alpha}{M}$ ͵ηβψσοπα β δ´
φπγ < ις		φπδ < δ´ ις.
ὁμοῦ $\overset{\phi\mu\delta}{M}$ ͵ηψκγ ις´		ὁμοῦ $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βγ < ις´
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εκ $\overset{\phi\mu\zeta}{M}$ ͵βρλβ ις´.		$\overset{o}{M}$ μα <

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καί ἐστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ´, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ´, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ <´. καί ἐστιν ἡ κγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδεκατημόριόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστοτέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϟς ἄρα ἐστί, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϟβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ λγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϟς ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ, καί ἐστι τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ <. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϟς. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϟς ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ <. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{o}{M}$ χξζ <´. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ <, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ <´, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{o}{M}$ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματός φησι. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{\sigma\mu\gamma}{M}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{\xi}{M}$ ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ͵εσ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀ-

ἀκριβοῦς

ἀκριβοῦς μονάδι α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ
ἐπὶ ͵αφξ
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\nu}{M}$ $\overset{\varsigma}{M}$
$\overset{\nu}{M}$ $\overset{\kappa\epsilon}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$
$\overset{\varsigma}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ ͵γχ
ὁμοῦ $\overset{\sigma\mu\gamma}{M}$ ͵γχ.
ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ βγ ἀπὸ τοῦ αγ, καταλείπονται $\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ͵εσ.

ἡ γβ ψπ
ἐπὶ ψπ
$\overset{\mu\theta}{M}$ $\overset{\epsilon}{M}$ ͵ς
$\overset{\epsilon}{M}$ ͵ς ͵ςυ
ὁμοῦ $\overset{\xi}{M}$ ͵ηυ

͵ατνα
ἐπὶ ͵ατνα
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\lambda}{M}$ $\overset{\epsilon}{M}$ ͵α
$\overset{\lambda}{M}$ $\overset{\theta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵ετ
$\overset{\epsilon}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵ε ͵βφν
͵ατνα
ὁμοῦ $\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ͵εσα
ὑπερβάλλει τοῦ ἀκριβοῦς μονάδι α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ, η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ ἐλάσσων, ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ, ἡ δὲ βγ, ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ, καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ δὲ ταῦτα, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αη $\overset{\omega\mu\varsigma}{M}$ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ $\overset{\xi}{M}$ ͵ηυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. καὶ αὐτὸ ἄρα ἔσται $\overset{\text{ϡη}}{M}$ ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ∠δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως μονάσι τξη ις'. διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ∠δ' πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια
ἐπὶ ͵βϡια
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\rho\pi}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ ͵β
$\overset{\rho\pi}{M}$ $\overset{\pi\alpha}{M}$ ͵θ λ
$\overset{\beta}{M}$ ͵θϙι
͵βϡια
ὁμοῦ $\overset{\omega\mu\varsigma}{M}$ ͵γϡκα

ἡ ηγ ψπ
ἐπὶ ψπ
$\overset{\mu\theta}{M}$ $\overset{\epsilon}{M}$ ͵ς
$\overset{\epsilon}{M}$ ͵ςυ
ὁμοῦ $\overset{\xi}{M}$ ͵ηυ

τὰ ἀπὸ τῶν αη ηγ $\overset{\text{ϡη}}{M}$ ͵βτκα

͵γιγ∠δ'
ἐπὶ ͵γιγ∠δ'
$\overset{\text{ϡ}}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ ͵θ ͵αφψν
$\overset{\gamma}{M}$ ͵ρλε β∠
͵θλθ α∠∠δ'
͵αφς∠δ'η'
ψνγ δ'ηις'
ὁμοῦ $\overset{\text{ϡη}}{M}$ ͵βχϡθ ις'
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς μονάσι τξη ις'

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ οὖν τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ, ἔστιν ὡς συναμφότερος ἡ ηαγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ μὲν αη ἐλάσσων ἢ ͵βλια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ͵γιγ∠δ'. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵ετκδ∠δ'. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ετκδ∠δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ετκδ∠δ' πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ υνε∠δ' πρὸς ξ. ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ'. καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκάτερα ἑκατέρας ἐστὶ δ' ιγ'. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ, τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ $\overset{\tau\lambda\beta}{M}$ ͵γλκθ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θγ σμ. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{\epsilon}{M}$ ͵ζ γ. καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα $\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ λκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη θ' ια'. τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς μονάσι τκα ἐγγύς. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη θ' ια' πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αθ ͵αωκγ

ἡ θγ σμ

͵αωλη θ' ια'

Θ ἐπὶ

ἐπὶ ͵αωκγ	ἐπὶ σμ	ἐπὶ ͵αωλη θ′ ια′
Μ Μ Μ ͵γ	Μ ͵η	Μ Μ Μ ηρια θ′ ∠ ια′
Μ Μ Μ ͵ϛϐυ	ηαχ	Μ Μ Μ ͵αϛυ ωη Μ οβ κ
Μ Μ ͵ϛυξ	ὁμ. Μ ͵ζχ	Μ Μ ͵δλσμγ γ β ια
͵γβυξθ		ηϛυσμξδ
ὁμ. Μ ͵γτκθ.		ρια θ′ πη γγ ηωα ϛθ′
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ		ϛιδοβηα.
Μ ͵λκθ ἐστὶ		͵αιηϛθρηα
		ὁμ. Μ ͵ασναγοερ ἐγγύς.
		ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς Μ° τκα ἐγγύς

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ γωνία τῇ κα. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αγ πρὸς γθ, ἡ ακ πρὸς κγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵γχξα θ′ ια′. ἐπειδὴ ἡ μὲν θα ὑπόκειται ͵αωκγ. ἡ δὲ αγ ͵αωλη θ′ ια′. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θα, αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξα θ′ ια′ πρὸς σμ, ὥστε καὶ ἡ ακ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξα θ′ ια′ πρὸς σμ. καὶ ἐπεὶ τῶν ͵γχξα θ′ ια′ τὸ ια′ καὶ μ′ ἐστὶ αζ. τῶν δὲ σμ, ξς. ἡ ακ ἄρα πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ αζ πρὸς ξς. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ακ Μ ρα ͵δμθ. τὸ δὲ ἀπὸ κγ ͵δτνς, οἷς ἴσον ὂν τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ Μ ρα ηνε. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ αθς″ ἔγγιστα. ἡ αγ ἄρα πρὸς γκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ αθς″ πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ακ αζ	ἡ κγ ξς	αθς′
ἐπὶ αζ	ἐπὶ ξς	ἐπὶ αθς′
Μ ζ	͵γχτξ	Μ ͵θρξς ∠ ς′
ζμθ	τξλς	θπαας
ὁμ. Μ ρα ͵δμθ. ὁμ. ͵δτνς.		ρξς ζ.ς.αγλς
Τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ Μ ρα ηνε		ὁμ. Μ ρα ηυιζ.γ′.λς′.
		ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ° ιβ.γ′ λς.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ γωνία τῇ αλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κα, αγ πρὸς κγ, ἡ αλ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ακ ἐλάσσων, ἢ αζ. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ αθς′. ἡ δὲ κγ, ξς. συναμφότερος ἄρα ἡ κα, αγ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βις ς′ πρὸς ξς. καὶ ἡ αλ ἄρα πρὸς λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βις ς′ πρὸς ξς. καὶ ἐπεὶ ἡ αλ ὑπόκειται ͵βις ς′, καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς Μ υϛ ͵δληκλς′. ἡ δὲ λγ, ξς. καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς ͵δτνς. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα Μ υϛ ͵θσπδλς. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἐστὶ ͵βιζ δ′ ἔγγιστα. ὑπερέχει τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς Μ° ιγς′ η′. ὥστε ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ′ πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αλ ͵βις ς′	ἡ λγ ξς	͵βιζ δ′
ἐπὶ ͵βις ς′	ἐπὶ ξς	ἐπὶ ͵βιζ δ′
Μ Μ Μ ͵βτλγ′	͵γχτξ	Μ Μ Μ ͵δφ
Μ ρξα ∠ ς′	τξλς	Μ ροβ ∠
Μ ͵βξλσα	ὁμ. ͵δτνς	Μ δομθ α ∠ δ′
τλγγ α ∠ ς′αλς		φβ ∠ α ∠ δ′ ις′
ὁμ. Μ ͵δληκλς′		θσϟζ ∠ ις′
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ		ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς
Μ ͵θσπδλς.		Μ° ιγ ∠ η′

Ἐπεὶ οὖν ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ′ πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξς πρὸς ξς πρὸς ͵βιζ δ′. καὶ ἐπεὶ ἡ γβ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἡ γβ ἄρα ιβ′ μέρος ἐστὶν, ἡ δὲ θγ, κδ. ἡ δὲ κγ, μη. ἡ δὲ λγ, ϟϛ. ὥστε ἡ λγ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϟϛ πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λγ, ξς. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ςτλς πρὸς ͵βιζ δ′. ταῦτα δὲ ἐστὶ τριπλάσια, καὶ ἔτι ὑπερέχει σπδ

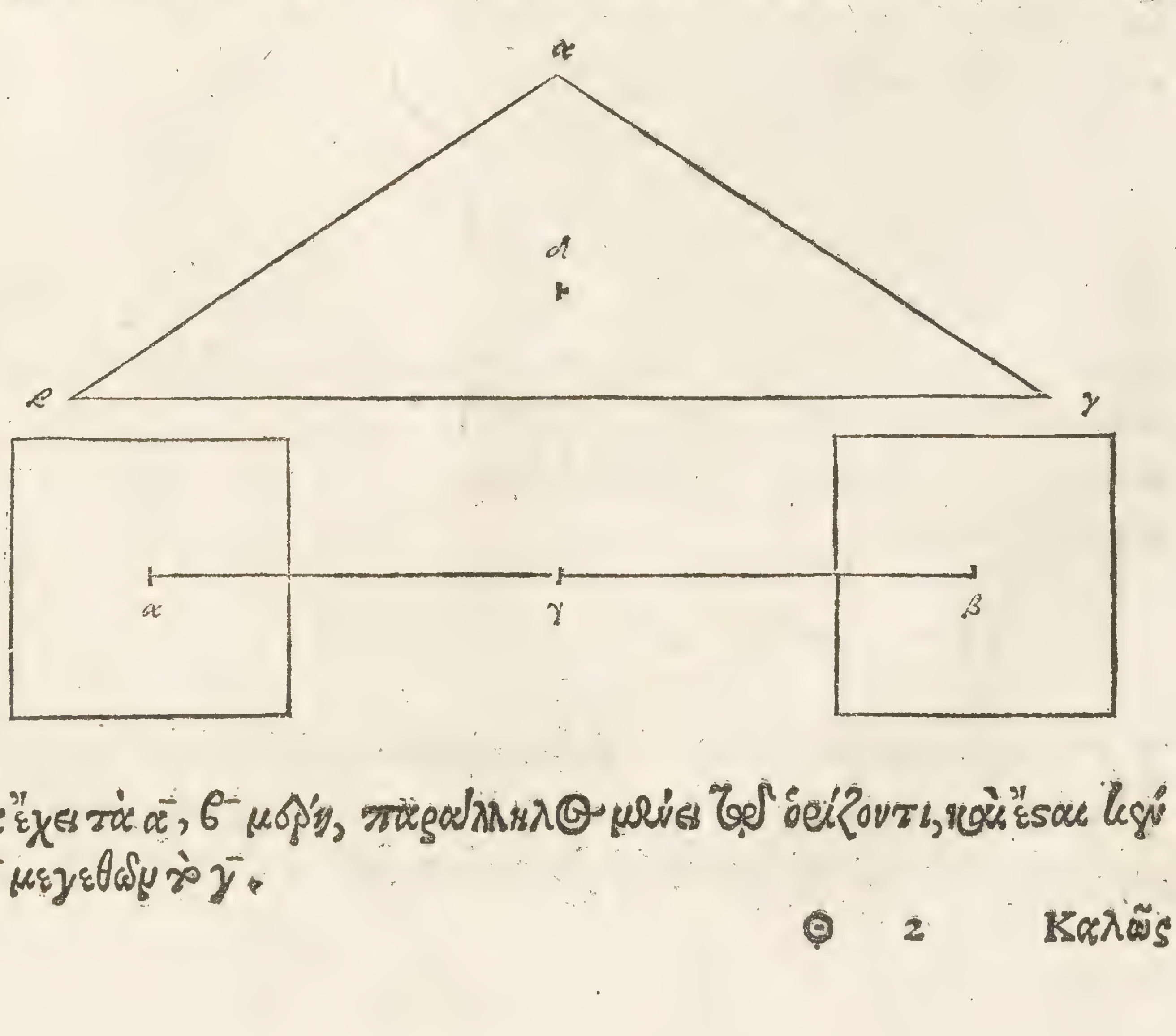
δ-

δ῾, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι μ, κζ < ς″ ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ς οζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶ ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ᾽ αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι᾽ ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ συνεγγὺς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ συνεγγὺς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς εὔκαιρον εὑρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποία εὐθεία ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ῾ φημὶ καὶ τῶν ι θ′. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τῷ μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐνενόουν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ συνεγγὺς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπὸ ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

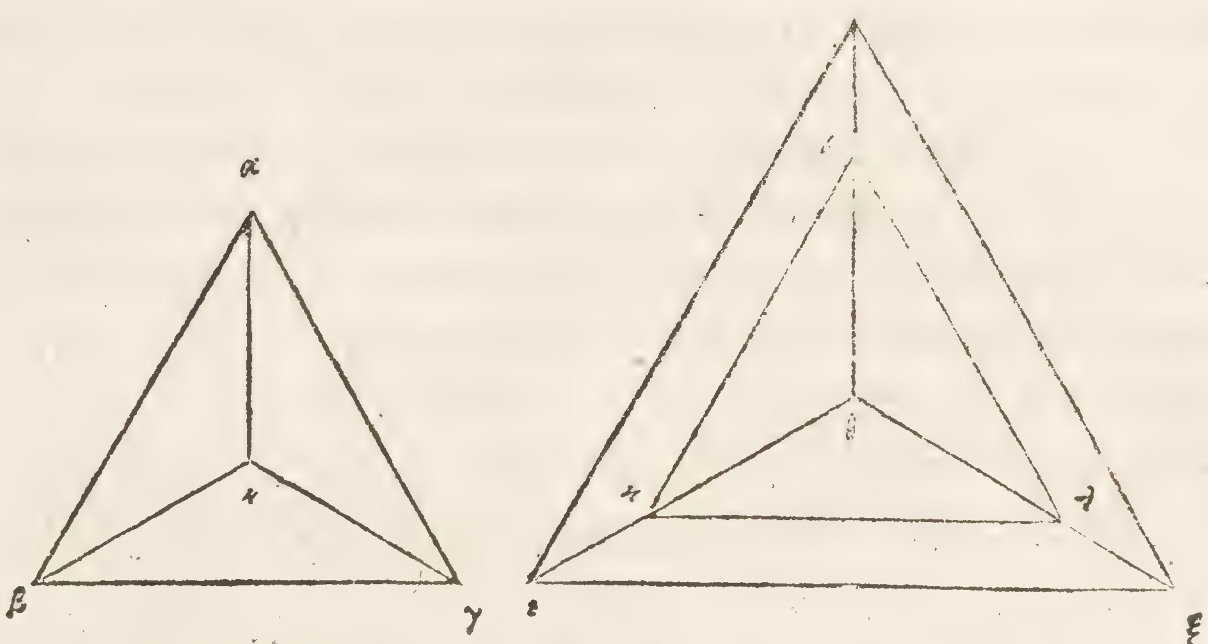
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ τοῦ κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

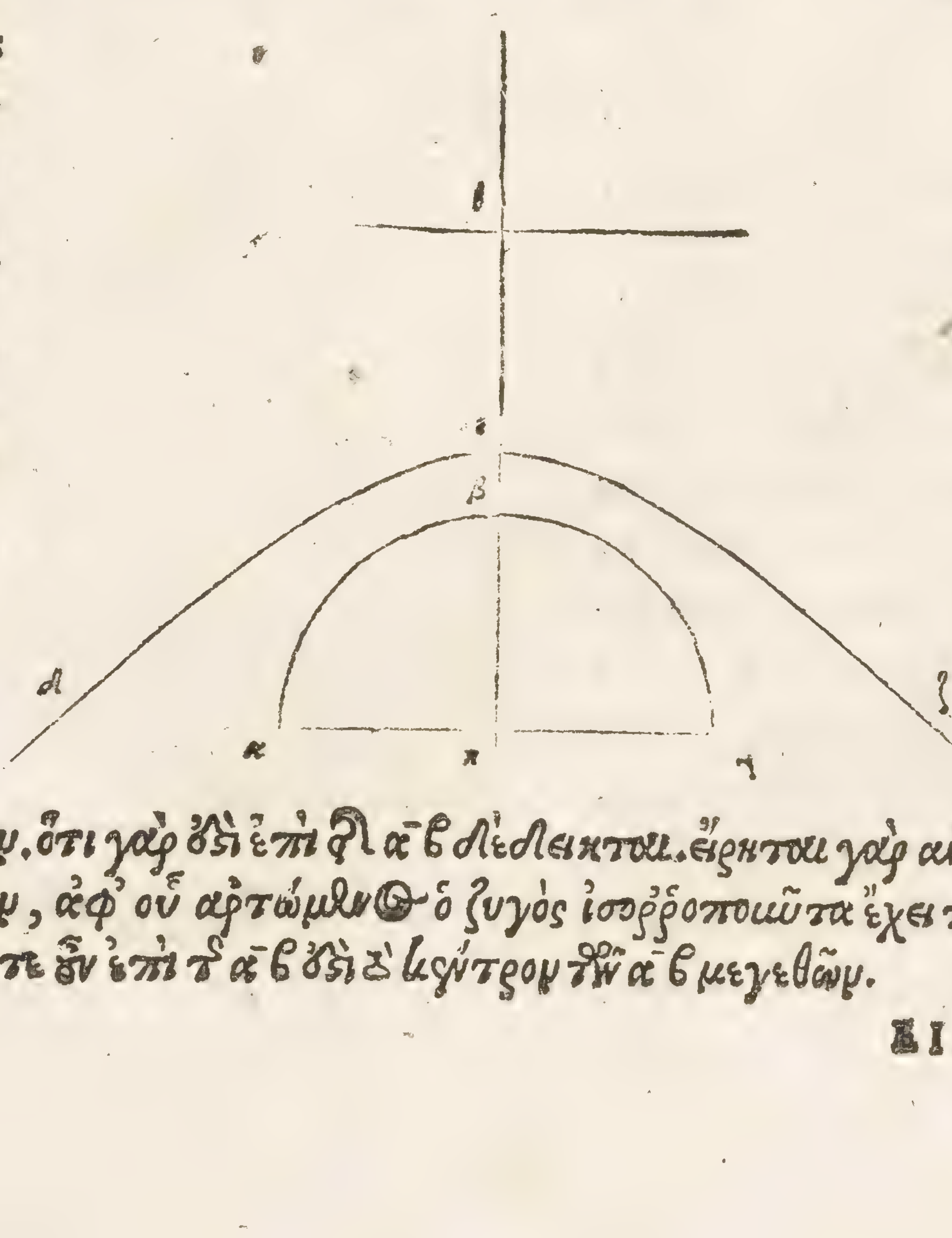
ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀπὸ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσι ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τοῦ πτολεμαίου συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν τοῦτο ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι. οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσοῤῥοπήσει τὰ α β γ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδ᾽ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ ἰσοῤῥοποῦντα ἔχει τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.



Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ Γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔστι πάντα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπισκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν η θ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.



Παντὸς σχήματος οὗ ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλά ἐστι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς προειρημένοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γὰρ τινῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματός ἐστι τὸ η, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρους τὸ δ εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι. ὥστε ὂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἢ περὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ἢ οὐ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ α β μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ ἐπὶ τὴν ἰσορροπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιοῦν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τὰς ὑπεροχάς, ἃ μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β μέγεθός τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ ἐπὶ τὴν ἰσορροπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

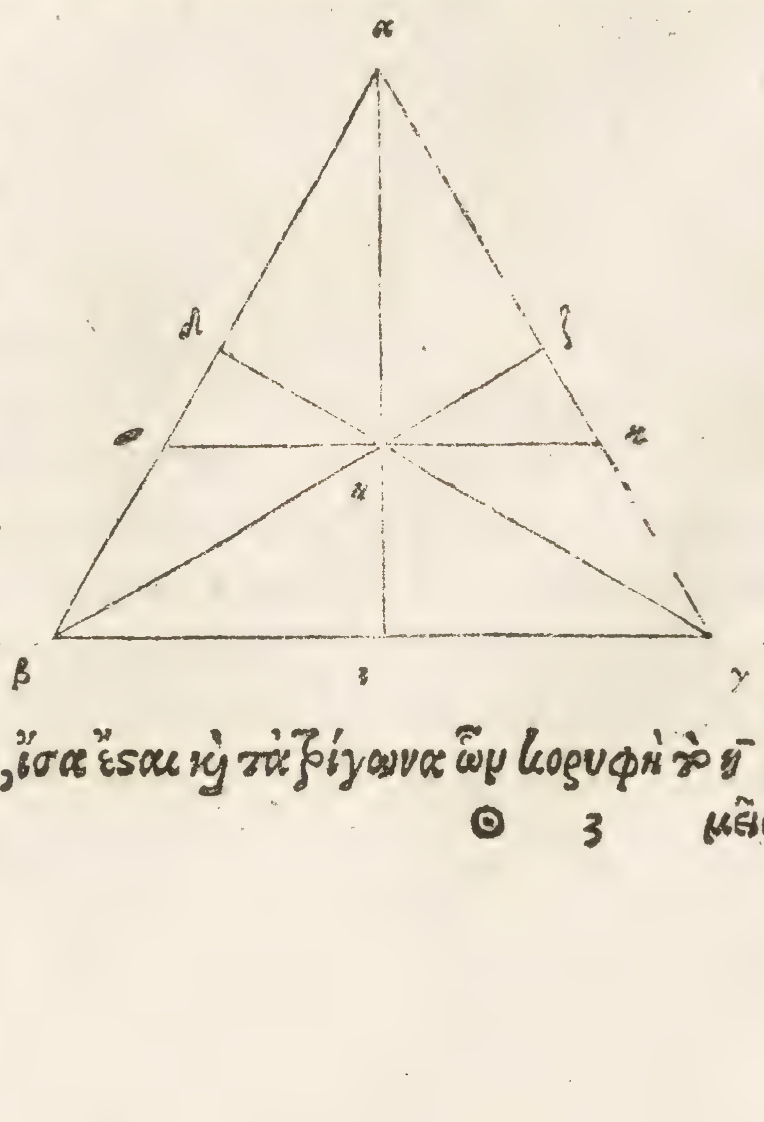
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ η κ, λ μ. πεσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν β γ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ β ο τῇ ψ γ, καὶ ἡ δ β τῇ δ γ. ἔσται ὡς ἡ δ β πρὸς ο β, ἡ δ γ πρὸς ψ γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ α ε πρὸς ε β. ἡ γὰρ ε ο παρὰ τὴν α δ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε πρὸς ε β, ἡ α ζ πρὸς ζ γ. παράλληλος ἐστὶν ἄρα ἡ ε ζ τῇ β γ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ α δ γ πρὸς τὰ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ α δ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ α πρὸς α μ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ α δ γ α ε μ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α γ πρὸς α μ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ α γ τῆς α μ τετραπλασίων τὸ α δ γ τρίγωνον πρὸς τὸ α ε μ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ α μ, μ κ, κ ζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ, ὅμοια τῷ α δ γ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ α ε μ, τουτέστιν ἡ γ α πρὸς α μ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γ α πρὸς α μ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. ὁ γὰρ τῆς α γ πρὸς α μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φ ρ πρὸς ρ π. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρ φ, γ δ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φ ρ πρὸς ρ π, ἡ γ δ πρὸς δ ω. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γ δ πρὸς δ ω, ἡ γ α πρὸς α μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ α πρὸς α μ, ἡ φ ρ πρὸς ρ π. ἡ δὲ φ ρ πρὸς ρ π μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. καὶ ἡ γ α ἄρα πρὸς α μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὰν δ α ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ᾽ ἐκεῖνο πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσορροπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΙΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐστὶ κείμενα τὰ θ κ, λ ε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ α θ ε, κ ζ α παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θ λ γ, θ κ β αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κ δ, δ λ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γ δ η, ζ ε η, β α η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν β α η, ζ ε η, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ β δ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ β η πρὸς η α, ἡ ζ η πρὸς η ε, καὶ ἡ β ζ πρὸς α ε, καὶ ἡ ζ γ πρὸς ε δ. καὶ ἐναλλὰξ δὴ ἡ δ η πρὸς δ ε. ἔσται δὴ τοῦ μὲν β δ γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς θ μ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἡ β θ τῆς β δ. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ α ε, β ζ, γ δ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ α δ, β δ, β ε, ε γ, γ ζ, ζ α, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η ση-



μείου, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ αηβ τρίγωνον, τοῦ ηβε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ αη τῆς ηε. ἐὰν διὰ τοῦ η παρὰ τὴν βγ ἀγάγωμεν τὴν θκ διπλασία ἐστὶν ἡ αθ τῆς θβ, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

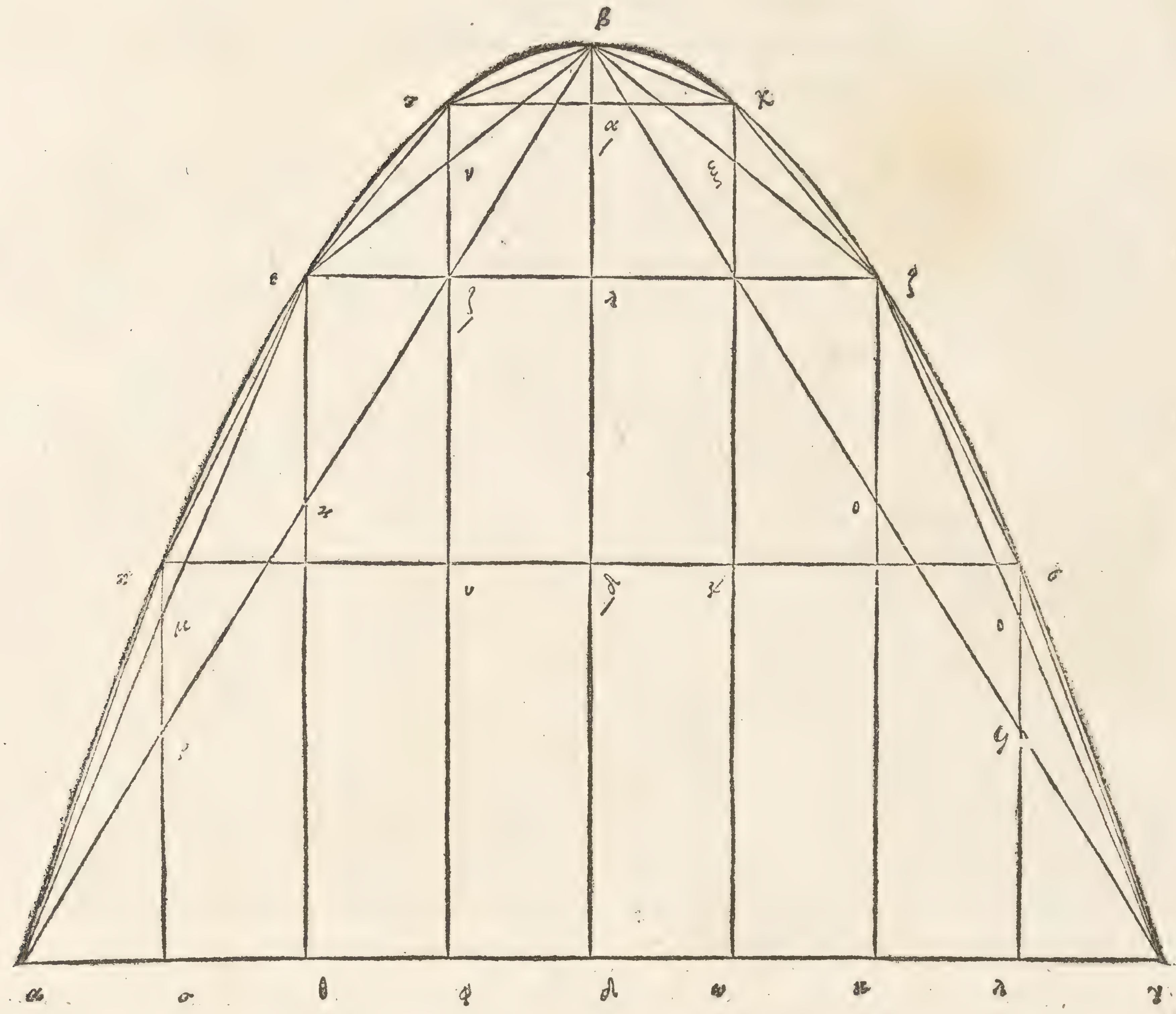
ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ αβ, γδ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. πόθεν δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς καὶ ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τά τε ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλα ἐστὶ διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟΥ δευτέρου θεωρήματος περιλέγει τινά, δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καὶ φησὶ ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς αβγ, καὶ εὐθείας τῆς αγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ βδ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς αβ, βγ, ἔσται τὸ ἀπὸ αβγ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν αβ κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ βδ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν αβ, βγ τμημάτων τὰς ε, ζ δι᾽ αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ βδ, ὡς τὰς εη, ζθ, ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν αβ, βγ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροι εἰσὶ τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς αβ, βγ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ελζ παρὰ τὴν αβγ. ἐπειδὴ αἱ εθ, ζκ παράλληλοι εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ϛ τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ εθη παράλληλός ἐστι τῇ βδ, ἐστὶν ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ δθ πρὸς θα. ἴση δὲ ἡ ηβ τῇ αη. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ εη διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ θα, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δκ τῇ κγ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ αδ τῇ δγ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ δκ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ελ τῇ λζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αε, εβ, βζ, ζγ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν βδ, αἱ πμρς, τνυφ, χξψω, ϛογλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ απ, πε, ετ, τβ, βχ, χζ, ζϛ, ϛγ. καὶ αἱ τ ᾳχ, καὶ πβγ δ ε ϛ. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τχ καὶ ἡ εζ καὶ ἡ πϛ παράλληλοι εἰσὶ τῇ αγ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τᾳ τῇ ᾳχ. καὶ ἡ πδ τῇ δϛ. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν βδ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἵου ἐστὶν ἑνὸς ἡ βα, τοιούτων

τριῶν

τριῶν ἡ α λ, καὶ ἡ κ δ, πέντε, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α η τῇ η β, καὶ παράλληλος ἡ ε θ τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α θ τῇ θ δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν, ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ



ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δέδεικται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστὶν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ε ν τῇ ν β, καὶ ἡ ε ζ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ η, καὶ ἡ α σ τῇ σ θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α σ, σ θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ σ δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαέξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ κ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ κ δ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῆς διαμέτρου εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἷον γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ε λ, τριῶν δὲ ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνόμασται δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ α π ε τ β χ ζ ς γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΤΑ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαι εἰσί, τὸ δὲ γνωρίμως ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστίν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζηι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κζ, λη. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ βδ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θζ, ἡ λι πρὸς ιη, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θζ τῇ ιη, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θζηι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θμ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βδ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζη, καὶ ἡ ιν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν ακβ, βλγ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ βαγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ αβκ, βλγ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ ακβλγ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ αβγ πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ κλβ, βλγ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ετ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ ϛ.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν ἐστι, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ εἰ τύχοι τὸ ε τῆς βδ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν εβ τῆς εδ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν θε σημείων. καὶ ὅσῳ δ' ἂν πολυπλευρώτερον ᾖ, τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ θ. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς εθ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς θε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

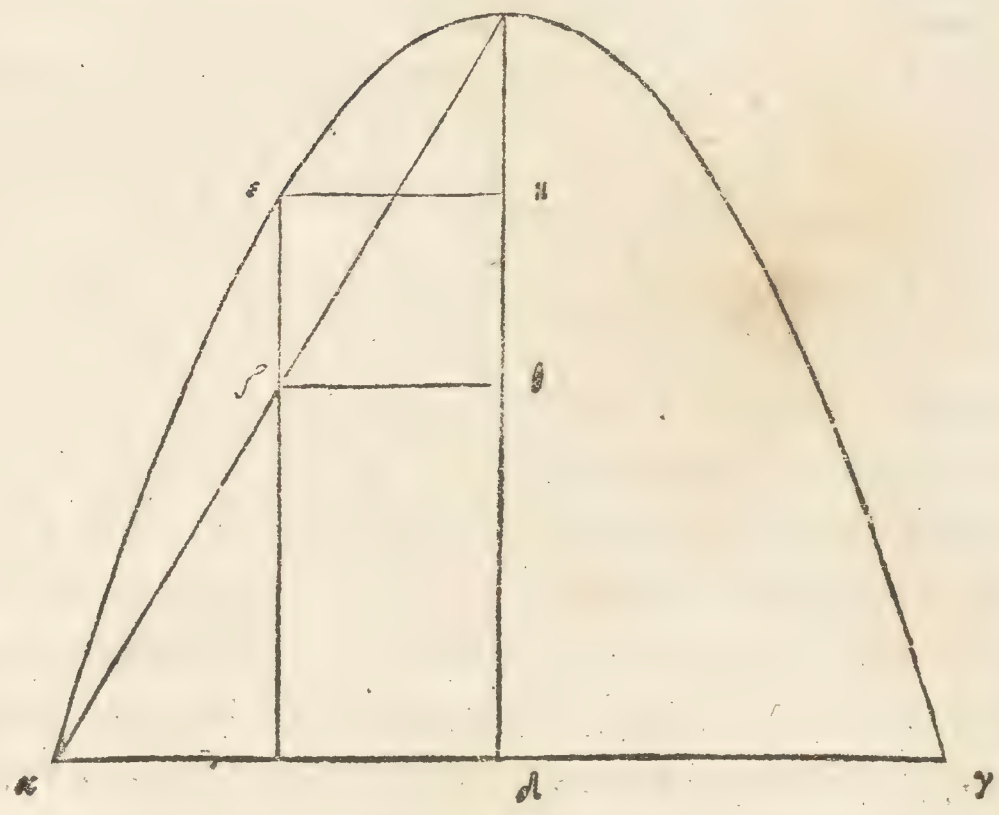
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ αβγ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δεζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς αβγ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται τῆς εζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ αβ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ εζη ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ δὴ κορυφαί εἰσι τὰ βζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ κμ πρὸς μζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ βδ πρὸς δθ, ἡ κζ πρὸς ζμ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ βδ πρὸς κζ, οὕτως ἡ δθ πρὸς μζ. τετραπλασία δὲ ἡ βδ τῆς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ αβγ, ἧς διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ αβ τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ εη, ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ βζ, διπλῆ ἐστιν ἡ αβ τῆς ζβ, καὶ ἡ δβ τῆς βθ, καὶ ἡ αδ τῆς ζθ, τουτέστι τῆς εη. ὥστε τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εη ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δβ τῆς βη ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ βδ τῆς

μὲν βθ διπλῆ, ἡ βθ τῆς βη ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θη τῇ ηβ ἴση, τουτέστι τῇ εζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ εηζθ. τετραπλασία ἄρα ἡ βδ τῆς ζε.



Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἁ βδ τῆς βς. καὶ γὰρ τοῦτο δέδεικται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ βδ ἑκατέρας τῶν βη, εζ τετραπλασία, ὥστε ἡ βη τῇ εζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐνταῦθα ἡ βς τῇ κζ ἴση, καὶ ἡ βδ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ βδ τῆς βς. οἵων ἄρα ἡ βδ τεσσάρων, ἡ βς ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ βδ δώδεκα, τοιούτων ἡ βς τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ βς τῆς ςξ, οἵων ἄρα ἡ βς τριῶν, ἡ ξς ἑνός, καὶ ὅλη ἡ βξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ βδ δώδεκα. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ αβγ τρίγωνον τῶν ακβ, βλγ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐν τῇ τὰς εδ τριπλασία. ἡμιόλια ἄρα ἐν τῇ ἁ βθ τὰς θδ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστὶν ἡ βδ τῆς δε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ εδ πέντε· οἵων δὲ ἡ δε πέντε, τοιούτου ἡ θε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θε, δε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δθ τῆς θε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δθ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θβ ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ βθ τῆς θδ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Το ἕνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, βγ, δβ, βε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ αγ, γδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, βδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ αγ, γδ, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ γ πρὸς τὴν β τῆς δβ. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γβ, βδ, βε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ αγ, γδ, δε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ γβ, βδ πρὸς βε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, καὶ συναμφότερος ἡ γβ, βδ, τουτέστι δύο αἱ αβ, καὶ τρεῖς αἱ γβ, καὶ μία ἡ βδ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῆς βδ, καὶ ἡ βε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς δβ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς δ τῆς γβ, καὶ τῆς δ τῆς δβ, καὶ τῆς β τῆς βε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς αβ καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης. ἔξωθεν δὲ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δβ, καὶ τῆς εβ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

διπλῆς τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εζ. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ γ τῆς γζ, καὶ τῆς βδ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εζ, οὕτως ἐδείχθη ἡ αδ πρὸς δε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αδ πρὸς δε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῆς αδ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δε. ἔστω ἡ δο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ πρὸς δο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εζ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δα, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εζ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ τῆς δ συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ οα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ δ τῆς γζ, καὶ ς τῆς βδ, καὶ γ τῆς βε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ. ἥ τε γὰρ βδ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ βε τρὶς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ αδ πρὸς ηθ τὸν αὐτὸν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ δ τῆς γζ, καὶ ς τῆς βδ, καὶ γ τῆς βε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οα πρὸς ηθ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ ι τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ τῆς γζ, βδ. τὸ γὰρ τῆς γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οα, πρὸς ἑπόμενον τὴν αδ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ δ τῆς γζ, καὶ ς τῆς βδ, καὶ γ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζ, δζ. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν ηθ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ δ τῆς γζ, καὶ ς τῆς βδ, καὶ γ τῆς βε. ἐπεὶ ἡ ε συναμφοτέρου τῆς αζ, βε πρὸς τὴν β τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ι συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ πρὸς τὴν δ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ τῆς γζ, βδ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ εζ μετὰ τῆς β τῆς βδ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, μετὰ τῆς δ συναμφοτέρου τῆς γζ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν δε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ γ τῆς γζ, καὶ μόνης τῆς δζ πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς εζ, καὶ τῆς β τῆς βδ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς γ τῆς γζ, καὶ μόνης τῆς βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ τῆς γζ, ζδ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ εδ πρὸς δο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ γ τῆς γζ, καὶ μόνης τῆς βδ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δε πρὸς εο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζε, μετὰ τῆς δ τῆς γζδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γζ μόνης, καὶ γ τῆς βδ, καὶ τῆς β τῆς εζ. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ ζ τῆς αζ, καὶ τῆς βε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τῆς αζ μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β τῆς εζ. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ συναμφοτέρου τῆς γζδ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τῆς γβ, καὶ ἡ βδ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γζ μόνη, καὶ ἡ γ τῆς βδ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δε πρὸς εο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γζ, καὶ τῆς γ τῆς δζ, καὶ τῆς β τῆς εζ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ὁ ε πρὸς εδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γζ, μετὰ τῆς γ τῆς βδ, καὶ β τῆς εζ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αζ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γζδ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δζ πρὸς ἄλλο τι τὴν εζ, ἡ αζ πρὸς βγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δε

δ̄ε πρὸς ε̄β, ἡ ᾱγ πρὸς γ̄β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔστιν ὡς ἡ γ̄δ πρὸς δ̄β, οὕτως ἡ δ̄ε πρὸς ε̄β. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῆς γ̄δ πρὸς τὴν γ̄ τῆς δ̄β, οὕτως ἡ β̄ τῆς δ̄ε πρὸς τὴν β̄ τῆς ε̄β. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ̄ε πρὸς ε̄β, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ᾱγ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ ἡ β̄ τῆς δ̄ε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γ̄β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄δ, καὶ τῆς β̄ τῆς ε̄β. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο̄ε πρὸς ἑπόμενον τὴν δ̄ε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄δ, καὶ β̄ τῆς β̄ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δ̄ε πρὸς ἄλλο τι τὴν ε̄β, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ᾱγ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς δ̄ε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γ̄β, καὶ γ̄ τῆς δ̄β, καὶ β̄ τῆς β̄ε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ο̄ε πρὸς ε̄β, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ᾱγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ ἡ β̄ τῆς δ̄ε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ο̄β πρὸς β̄ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ᾱγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς ε̄δ, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ᾱγ, καὶ γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ β̄ τῆς δ̄ε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. ἴση ἐστὶ τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ̄ τῆς ᾱβ, καὶ ϛ̄ τῆς γ̄β, καὶ γ̄ τῆς δ̄β. ἥ τε γὰρ ᾱβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν ᾱγ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τῆς γ̄β μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν ᾱβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ τῆς γ̄β μίαν, γίνεται γ̄. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ̄ τῆς γ̄δ, καὶ γ̄ τῆς δ̄β, ποιεῖ τὴν ϛ̄ τῆς γ̄β. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄β, γ̄, μένει μόνη ἡ δ̄β. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β̄ τῆς δ̄ε, καὶ τὴν β̄ τῆς ε̄β, ποιεῖ τὴν γ̄ τῆς β̄δ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ ο̄β πρὸς ε̄β τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ τῆς ᾱβ, καὶ ϛ̄ τῆς γ̄β, καὶ γ̄ τῆς δ̄β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. πάλιν ἐπεὶ αἱ ε̄δ, δ̄γ, γ̄α ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῆς ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν ε̄β, β̄δ, δ̄β, β̄γ, β̄α. ἔσται ὡς ἡ ε̄δ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δ̄γ, γ̄α, τουτέστι τὴν δ̄α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε̄β, β̄δ πρὸς συναμφότερον τὴν δ̄β, β̄γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄α. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ε̄α πρὸς ᾱδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ̄δ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβ̄γ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ̄α, πρὸς συναμφότερον τὴν δβ̄γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ̄α. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβ̄δ μετὰ τῆς δβ̄γ, καὶ τῆς γβ̄α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ εβ̄α, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβ̄γ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι, συναμφότερος δὲ ἡ δβ̄γ μετὰ τῆς γβ̄α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ αβ̄δ, καὶ δὶς τῇ γ̄β, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ ε̄α πρὸς ᾱδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς εβ̄α, καὶ β̄ συναφοτέρου τῆς δβ̄γ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς δβ̄α, καὶ τῆς β̄ τῆς γ̄β. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ ε̄α πρὸς ᾱδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς εβ̄α, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. ὥστε καὶ ὡς ἡ ε̄α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ᾱδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. ἀλλ' ὡς ἡ ᾱε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ᾱδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ β̄ε πρὸς ζ̄η. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε̄β πρὸς ζ̄η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ ο̄β πρὸς ἑπόμενον τὴν β̄ε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ μετὰ τῆς ϛ̄ τῆς γ̄β, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ ε̄β πρὸς ἄλλο τι τὴν ζ̄η, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄β. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου ἐστίν, ὡς ο̄β πρὸς ζ̄η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ ϛ̄ τῆς γ̄β, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ ϛ̄ τῆς γ̄β πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄δ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν τῶν

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. πρὸς δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πέντε καὶ δεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων εἰσὶν ἔνατα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν ο α πρὸς η θ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ ο β πρὸς ζ η τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζ θ ὅλης τῆς α β.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ α δ ε γ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζ η. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζ β διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ α γ, δ ε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, κατὰ τὸ ζ, η, παράλληλοι εἰσὶ τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δ ε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς β ζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζ η. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζ β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ α β γ τμῆμα τοῦ α β γ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δ ε β τμῆμα τοῦ δ ε β τριγώνου, ἐστὶν ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α β γ τρίγωνον, οὕτως τὸ δ ε β τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τμῆμα, οὕτως τὸ α ζ β τρίγωνον πρὸς τὸ δ η β τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δ η α ζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τῆς β ζ πρὸς β η. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τοῦ τῆς ζ β πρὸς β η. ὁ γὰρ τῆς ζ β πρὸς β η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ α ζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς ζ α. ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ ξ ν πρὸς ν μ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δ η πρὸς α ζ, ἡ β τῆς ξ ν πρὸς ν μ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς ν ξ μετὰ τῆς ν μ πρὸς ν μ, ἡ β τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς α ζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον, καὶ ἡ μ ν πρὸς ν τ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δ η κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην εὐθεῖαν ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, οὕτως ἡ δ η πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δ η πρὸς τὴν β τῆς α ζ μετὰ τῆς δ η, οὕτως ἡ τ ν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ο ν, καὶ τῆς τ ν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ α ζ πρὸς δ η, ἡ μ ν πρὸς ν ξ, καὶ ἡ ο ν πρὸς ν τ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ τ ν πρὸς ν ο. καὶ ὡς ἡ δ η μετὰ τῆς β τῆς α ζ πρὸς δ η, οὕτως ἡ τ ν μετὰ τῆς β τῆς ν ο πρὸς ν ο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς α ζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δ κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς α η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ν ξ, καὶ μόνης τῆς μ ν, καὶ δευτέρα ἡ μ ν, καὶ τρίτη ἡ ν τ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ο ν, καὶ τῆς ν τ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ μόνης τῆς δ η, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξ ν, καὶ μόνης τῆς μ ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ν ο, καὶ μόνης τῆς ν τ. ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

εἰρημένα στερεὰ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ ηζ πρὸς ηι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζη, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκατέρα γὰρ τῶν ηθ ζκ δύο πεμπτημόριά ἐστι τῆς ηζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ζκ, ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ϛ τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ. οὕτως γὰρ εἴληπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστι τῆς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν, τουτέστι τῆς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τῆς βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ, τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ τῆς βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστι τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β̄ τῶν ἰσορροπικῶν ἀρχιμήδους.

ARCHIMEDIS SY RACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXCELLENTISSIMI OPE-ra, quæ quidem extant omnia, latinitate iam olim do-nata, nuncq́ primum in lu-cem edita.

Cum Cæſareæ Maieſtatis gratia & priui-legio ad quinquennium.

B A S I L E AE.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI VRBIS NORINBERGAE, DOMINIS SVIS obſeruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, ſe ipſum commendat.

PHiloſophorum omnium, ut uidere licet, P. C. unum hoc ac ſubinde continuum fuit ſtudium, ut ſimul & animos & actiones inconditæ multitudinis, ab illis nunquam non genus noſtrum ſequentibus erroribus, eximerent, atq; ad inquirendæ ueritatis amorem potius inclinarent, inſtigarent, inflammarent. Quorum magiſtros bifariam diuiſos à ueteribus iam olim accepimus. Aut enim Italici uocabantur, ab ea Italiæ parte, quæ pridem magna Græcia eſt dicta, quorum autor & magiſter Pythagoras ille Samius fuiſſe perhibetur. Putabant illi plenam naturalium rerum, ſynceramq; cognitionem penes ſe unos reperiri poſſe. Qui ab ea ſecta alieni eſſe uidebantur, Ionicos ſe dicebant, hoc potiſſimum nomine ſibi placentes, quod in ipſa media, ut dicitur, Græcia philoſophiæ placita traderent. Poſt longam uerò ſeriem doctorum tandẽ ad Anaxagoram et ſumma et caput eius ſectæ redijt: cui deinde Archelaũ ſucceſſiſſe perhibent. Huius Archelai ſucceſſorem, Auguſtinus doctor eccleſiaſticus ſanctus, Socratem facit: quem ipſe Plato (aliorum philoſophorum quaſi deus) magiſtrum habuiſſe, antiqua et iam olim recepta in ſcholis noſtris opinione, ad nos uſq; perlatum eſt. Atqui Socrates cũ uideret cauſas rerum ab illis non rarò inquiri, qui parum purgato eſſent animo: cum ipſe interim animum ſuum ad cognitionem potius ueri et ſummi illius boni intenderet: noluit imperitam multitudinem rebus illis, quæ captum humani ingenij ut plurimum ſuperant, implicatam teneri. placuit communi hominum utilitati conſulere, ac ipſum iam ſapientiæ ſtudium ad corrigendos mores, componendasq; ciuiles actiones, quaſi cœlo ereptam prædam, inter homines collocare. Et rectè quidem ille cenſuit. Vt quid enim relictis imis, ad ſumma ſtatim admitterentur, quæ alioqui infauſto ſidere nata cõſpiciuntur ingenia? ad aratrum potius quàm ad Muſarum ſacra, idonea iudicamus huiuſmodi portenta. Præter rugas, & triſte ſupercilium, & ueſanam in pectore bilem, quid illi aliud è ſtudijs ſuis referunt? Quæ uerè generoſa eſt aquila, implumis adhuc cum eſt, nunquam ſe cœlco credit aperto: ſecus factura, ubi ad ſolis radios contuendos iam luminis ſibi eſſe uiderit ſatis. Sic præclara quæ ſunt ingenia, intra præſcri-

ptos ſapientiæ limites tantiſper ſeſe continebunt, donec non tam ſuo amo
re, quàm doctorum uirorum iudicio, ſummas bonarum artium partes cũ
laude tueri & poſſint & ualeant. Quisquis hæc quæ dicimus hic, impro
bare conatus fuerit, illum nos extra ſe poſitum, equidem non temerè con-
tenderimus. Quid enim omnino eſſet uita noſtra, ſi hiſce ſtudijs carere o-
porteret, ſine quibus nulla inter nos conſtare poteſt humanitatis ſocietas,
niſi barbara quædam barbaries, aut (ut Plato uocat) ἀφιλόσοφος καὶ ἄ-
μουσος. *Homine neſciente põdera, atq; adeò neſciente menſuras rerum,*
quid ſtolidius, imò quid inhumanius uidere queat ille omnia inſpicientis ſo
lis oculus? Quare non ab re uidetur ille mihi cum ſacra tũ prophana pol-
luere, quiſquis poſthac honeſtas diſciplinas uel contẽpſerit, uel alijs ad
ea penetrare uolẽtibus, aditum recluſerit, aut alioquin data opera remo
ratus fuerit. Præſtat cum præclaris ingenijs conuenire potius, quàm lon
gè lateq; regnantem, ac bonas artes uaſtantem, iuuentutem à contempla
tione ueritatis deterrentem, ſequi conſuetudinem. Quid eſt enim conſue
tudo ad ueritatem collata, niſi pabulum erroris? Qui tales ſunt, in orbẽ
illum diſciplinarũ, quæ ſtudio quærendæ ueritatis famulantur, nullo mo
do ſe intromitti ſperent. Occinimus illis uetus hoc: Procul eſte propha-
ni. Procul, inquã ego, à lectione Archimedis noſtri abſint uniuerſi, qui
nihil ad regulã, nihil ad perpendiculum, nihil ad libellam reuocare didi
cerunt. Nos ut hoc cõſilium noſtrũ admiſerint, non ualde laboramus. nõ
enim ſtudemus placere illis, dum ui magna conamur rectis ſtudijs prodeſ
ſe, ac ipſi etiam humanitati ſatiſfacere. Officij noſtri partes ſunt, laten-
tẽ adhuc in rebus ueritatẽ eruere, ac omnia illius optima quæ ſunt, huma
nis oculis conſpicienda inferre. Quid hic enim poſiti agimus aliud, quàm
ut plurimos ad ueritatis ſtudia inuitemus, dum reuelata facie, ipſam per-
fectè contemplaturi ſumus in patria? Interim tanquam in tranſcurſu hiſ-
ce uerè liberalibus artibus tædia præſentis uitæ fallentes non illibenter.
Solent enim hæ artes honeſtiſſimæ non tantũ delectare ſuos cultores, ſed
etiam commouere, afficere quoq; & inflammare animũ ipſum, ut hoc ma
iore deſiderio ad perfruendæ olim ueritatis bonũ rapiatur, quo præſtan
tior eſt umbrâ ueritas, lux tenebris, deniq; quo eſt maior & melior homi
nibus ipſe Deus. Nouimus ueſtri Senatorij ordinis uiros non paucos, qui
ſe hiſce artibus penè immerſerint, cum alioqui naturalium rerum contem
platione & eſſent & haberentur clariſſimi ab omnibus. Arbitrati ſunt
illi ſapienter quidem, quòd in his ipſis ſtudijs inſumptas in Remp. uires,
recollecturi eſſẽt, ac parum recluſis à ſe publicis curis, quoties in gratiã

redi-

redirent cum literatis literis, lau dem longè ampliſsimam ſeſe conſecutos eſſe cenſebant. Quis enim indecorum putauerit in ea re recreari, refocillariq; animo, à qua neq; naturæ noſtræ Genius abhorret, neq; ipſe opifex rerũ ſubinde offendi poſsit unquã? Et meritò illi in hoc potiſsimũ ſtudiorũ genus incubuerũt. Quia enim liberæ ciuitates aut mari aut terra uictus rationẽ quærere uidẽtur: ut naufragia uitẽt gubernatores, aſtronomiæ cognitio cũ primis ſulcãtib. maria, nõ tam utilis quàm neceſſaria erit futura. quæ hac deinde induſtria importãtur merces, ut rectiſsimè in ſingulos diſpenſentur, numerorũ ſcientia primas ſibi uendicare ſolet. Ne porrò termini rerũ confunderentur, ab Aegyptijs, propter Nili exundationes, noua apud illos iuuẽta eſſe perhibetur dimenſio agrorum, quæ ob eam cauſã Geometriæ nomen ferre iure queat. Excelluiſſe in hiſce diſciplinis Vulcanum illum, Homerus haud obſcurè ſignificauit:

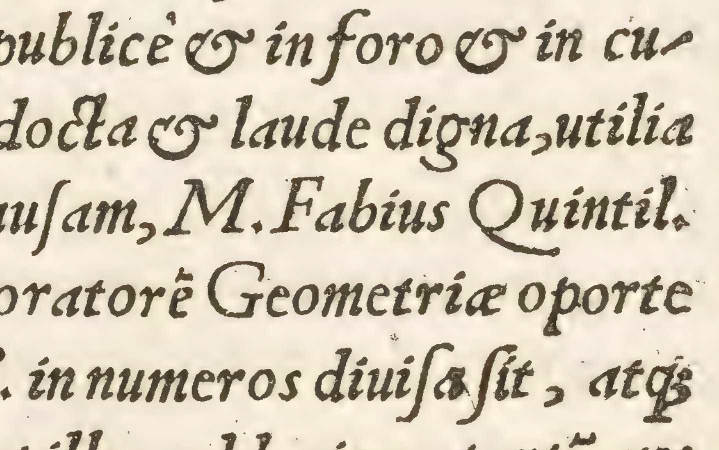
Cum Thetis Idæos (heu nunquam uana parentum
Auguria) expauit uitreo ſub gurgite remos.

Vulcanus itaq; ad Thetidis preces, Achilli clypeum cõfecturus, quid non ſummè, quid non artificioſiſsimè ob oculos lectoris poſuit? Videmus eodem in clypeo non tam uirtutum quàm diſciplinarum ſemina omnium, ac rerum præclariſsimarum perfectiſsimè expreſſa ſimulacra, quibus ille artificioſa compoſitione ſua, dij boni, quantam maieſtatem addere ſolet? Quantum deinde gratiæ & laudis conſecutus eſt, in coniungendis per duas ſubinde ciuitates, cum machinamentis, tum inſtrumentis, tum ornamentis, ut in unius clypei circumferentiam unà ſimul & officia magiſtratus, & ſtudia militum, & uulgi ſpectacula, & agricolarum exercitia, & paſtorum luſus, & alia id genus multa, quæ Geometrica proportione contemplanda doctorum uirorum oculis obiecerit: quæ omnia, qui ſapientiæ nomen daturus eſt, ignorare non debet. Nam uirtutis & iuſtitiæ imaginem in eius clypei deſcriptione propoſitam, facile quiſquis non eſt ingenio præditus obtuſo, diſpicere queat. Quid quod optimus uates & ſphæram imaginum cœli, ſolis dico & lunæ, ſtellarumq; curſus, cum alijs multis, callidiſsime unius clypei planicie eſt complexus? quæ in contemplationem deducta, ut operoſum, ita magnificum abſoluere uidentur ædificium. Tanta eſt gratia rerum bene diſpoſitarũ, ubi illa ſingularum partium ſymmetria ad recte doctos & inculpatos iudices fuerit conuocata. Vidimus nos Romæ cum eſſemus in monte Capitolino (Capitolium hodie uocant eum locum) Comœdiam agi, cumq; à perſonis peragẽda eſſet Pœnulus, ipſa quæ una è uiginti numero eſt comœdia Plauti, per eos

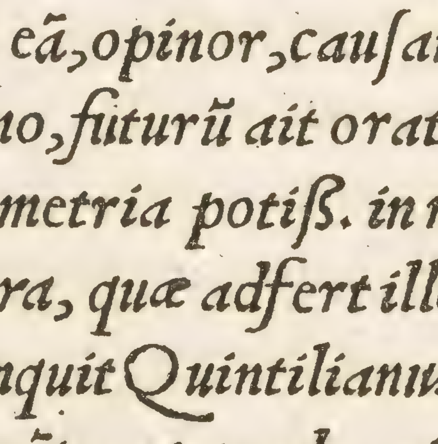
hominès, qui haud ita bene ad illam ſubeundam prouinciam eſſent parati. Neq; enim perſonas, quas referebant (licet Itala proles) ubique fœliciter repræſentabāt: quod cuius uitio factum ſit, equidem nunc non ſum ſcripturus. Erat hic locus nō parum à prima ſui conſtitutione iam factus altiniſsimus. In eo tamen, quia erat capax multitudinis, & quia omnia numero, pondere quoq; & menſura digeſta eſſe uidebantur, facile quod in actoribus fabulæ deſiderabant complures, iuſta illa compoſitæ aulæ ſymmetria, ſpectatores in officio retinebat. Tanta eſt, ut diximus, bene in ordinem digeſtarum rerum gratia.

Hic iuuat auguſtum Romæ uidiſſe theatrum,
Inſtratumq; locum tabulis, nitidisq; columnis,
Qui ter uiginti, ſex atq;, aſcendit in ulnas,
Si in longum reuoces. latè contraxior exit,
Fert uix dimidio, ceu continet area longi.
Bis quoq; quindenis ulnis ſpaciatur in altum.
Hic quia Saturnus latuit, Saturnius olim
Dictus. poſt Cicero cecinit, Tarpeia rupes.
Poſtera deinde ætas tenuit Capitolia dici.
Non ratione tamen ſine, &c.

Hæc ideo retulimus copioſius, ut opinionibus imperitæ multitudinis commodius occurreremus: ac dein ut intelligant hi qui tractabiles adhuc ſeſe præbēt manſuetioribus Muſis, hæc ſtudia non tantum priuatis hominibus ſummam ſæpè adferre uoluptatem, ſed etiam publicè & in foro & in curia, & in ſcholis exercitamēta eſſe honeſta, docta & laude digna, utilia quoq;, & rebuſp. neceſſaria. Ob eā, opinor, cauſam, M. Fabius Quintil. lib. de Inſtitutione oratoria primo, futurū ait oratorē Geometriæ oportere omnino eſſe peritū, quòd Geometria potiſſ. in numeros diuiſa ſit, atq; formas. Nos hic de iugeri mēſura, quæ adfert ille, adducimus tantū, & præterea nihil. Nos facillimū, inquit Quintilianus, et imperitis ſequamur experimentū. Iugeri menſurā ducētos et quadraginta lōgitudinis pedes eſſe, dimidioq; in latitudine patêre, non ferè quiſquā eſt qui ignoret. Huius ſchema nos ita rudibus literarū exprimimus.

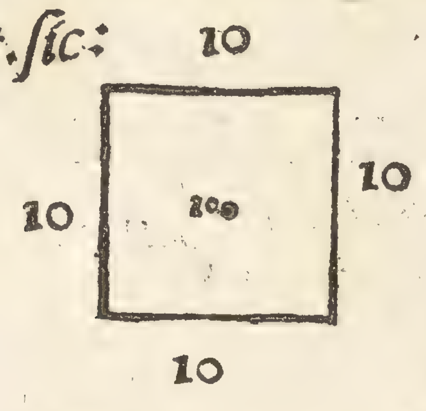


At centeni & octogeni in quamq; partē pedes, idē ſpaciū extremitatis. Sed multo amplius diuiſæ quatuor lineis areæ faciunt. exemplum eſto.

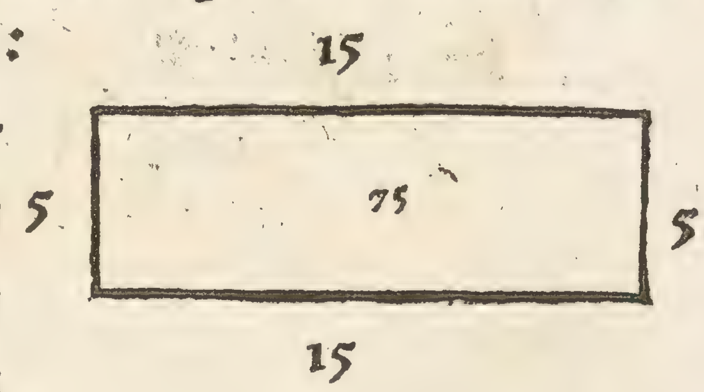


Id ſi computare quē piget, breuioribus numeris idem diſcat.

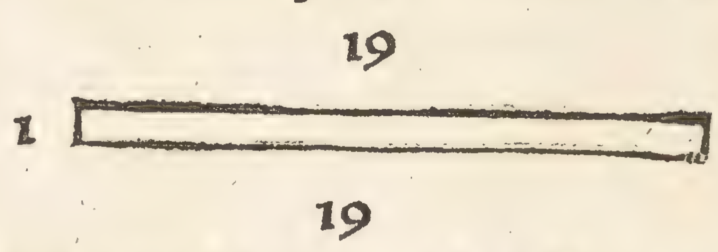
ſcat. Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram intra centum erunt. ſic:



At ſi quini deni per latera, quini in frōte ſint, ex illo amplectuntur quartam partem deducent, eodē circumductu, ſic:



Si uero porrecti utrinq; undeuiceni ſingulis diſtent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot lōgitudo circūducetur: quæ circūibit autē linea, eiuſdem ſpacij erit, cuius ea quæ centum continet. Schema illius ſic formabis. Hunc locum ideo figuris ſuis expoſitū, oculis ſubijcere uolui, quod uiderim quoſdam alioqui non indoctos uiros, qui ipſum aut non intellexerunt: aut quod iuxta eſt, ſimulando præterierunt.



Hæc cum dico, non doctoris partes uſurpo mihi, ſed monitoris tamen perſonā ubi recepero, qui æqui ſunt iudices, nō contēnent. Non hic oſtendā quæ elemēta geometrica, quo nomine à noſtris appellentur. nam quid ſignum ſit, quid linea, quid angulus, circunferentia quoq; & ſuperficies, præter Archimedē noſtrū Euclides quoq; philoſophus et mathematicus Megarenſis, nō utiq; incelebris, admodū copioſe cōſcripſit. In ſolidis corporibus cōficiendis, qualia ſunt pyramides, coni, cylindri, cubi, ſphæræ, & id genus alia corpora, magiſtrū hunc noſtrū Archimedem, nemo non tutiſsime fuerit ſequutus. Hic eſt Archimedes ille, cuius machinationibus M. Marcellus multū ac diu uictoriā ſuā apud Syracuſas inhibitā ſenſit: eximia tamen hominis prudentia delectatus uictor, adeò, ut captis Syracuſis capiti illius parceretur edixerit: penè tantū gloriæ in ſeruato Archimede, quantū in oppreſsis Syracuſis reponens. Quanquā intentū geometricis formis, quas in puluere deſcripſerat, ab ignaro milite, quiſnā eſſet rogatus, cū nomen ſuū non ſtatim indicaret, obtruncatus, ſanguine ſuo artis propriæ lineamēta confudit. Quo factū, ut propter idē ſtudiū modò donaretur uita, modò ſpoliaretur. Aegrè id Marcellum tuliſſe, ſepulturæq; curā habuiſſe, ac propinquis etiā inquiſitis, honori, præſidioq; nomē eius ac memoriam fuiſſe. Atque hæc de Archimede partim ex T. Liuio, partim ex Valerio Max. in præſentia retuliſſe ſit ſatis. Supereſt P. C. ut magno cōſenſu, hiſce præſertim turbulentiſs. temporib. exulātes, nudasq; ac penè iam extinctas illas uerè liberales diſciplinas humaniter colligere atq; fouere ſtudeatis. Decet enim magiſtratus aſſueſcere cū primis nō tantū rebus humi repentib. ſed etiā ſtu-

dijs

dijs Muſarum, ut quæ ſolæ molem illam tractandarum rerum, non raro leuare, frequenter uerò & excutere ab humeris ueſtris, quàm longiſsime & poſsint et ualeant. Valete unà cum florentiſsima Republica ueſtra, diu fœlices. Ex urbe ueſtra, IIII. Calend. Februarij, Anno M.D. XLIIII.

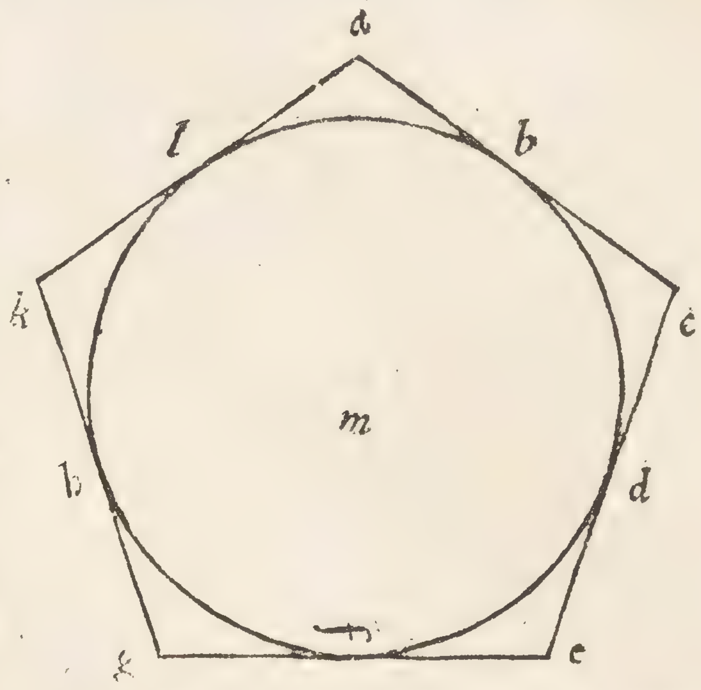
ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER PRIMVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

PRIVS quidem ad te miſi quę à nobis inſpecta eſſent, cõſcribentes eorum demonſtrationes, quod omnis portio contenta à recta, & à coni rectanguli ſectione, ſeſquitertia ſit triangulo habenti baſim cum portione eandem, & altitudinẽ eidem æqualem. Nunc autem quorundam occurrentiũ theorematum, quæ effectu probata uidentur, demonſtrationes conſcripſimus. Ipſa uero huiuſmodi ſunt. Primum quidem, quod omnis ſuperficies ſpheræ quadrupla eſt circulo in ea maximo. Deinde quod ſuperficiei cuiuſcunq; portionis ſphæræ circulus ille æqualis eſt, cuius quæ ex centro æqualis ſit rectæ ductæ à uertice portionis, ad circuli qui baſis eſt portionis circumferentiam. Ad hæc quòd cuiuſq; ſphæræ cylindrus, qui baſem habeat circulum in ſphæra maximum, & altitudinem æqualem ſphæræ diametro ſeſquialter habetur: & ſuperficies eius cum baſibus ſuperficiei ſphærę eſt itidem ſeſquialtera. Hæc autem accidentia natura ipſa inerant prius circa dictas figuras, uerum non fuerant à ſuperioribus cognita, qui ante nos

Scribantur autem prius & dignitates, & ſumpta ad demonſtrationem eorū. Sunt quædam in plano curuæ lineæ terminatæ, quæ rectis iūgentibus terminos earum, aut totæ ſunt in eaſdem partes cauæ, aut nihil habent in alteras. In eaſdem partes cauam uoco lineam talem, in qua ſi duo puncta utcunq; ſumantur, lineæ rectæ inter illa puncta mediæ, aut omnes in eaſdem partes dictæ lineæ cadunt: aut quædam in eaſdem partes, quædam ſecundum eam, nulla uero in alteras partes. Similiter autem & ſuperficies quædam finitæ ſunt ipſæ quidem nō in plano, ſed terminos ſuos in plano habentes: & in eaſdem plani eius in quo earum ſunt termini, partes aut totæ erunt, aut nihil habebunt in alteras partes. In eaſdē partes cauas illas uoco, in quibus ſi ſumantur duo puncta, rectæ inter illa ductæ mediæ, aut omnes in eaſdem partes cadunt ſuperficiei: aut quædam quidem in eaſdem partes, quædam ſecundum eas, nulla autem earum in alteras partes. Fruſtū uero ſolidum uoco, ſi quando ſphæram ſecuerit conus, qui uerticem habeat ad centrum ſphæræ, figuram intra comprenſam, & à ſuperficie coni, & à ſuperficie ſphæræ intra conum comprenſæ. Rhombum autem ſolidum uoco, ubi duo coni in eadem baſe conſtantes, uertices habuerint utrinq; ſitos plano baſis, ita ut axes eorum ſint in directum ſibi inuicem coniuncti, figuram ex utriſq; conis cōpoſitam. Sumo autem hæc: Linearum eoſdem terminos habentium rectam mini mam eſſe. Aliarum uero quæ in plano fuerint, ſi eoſdem habuerint terminos, eas inæquales eſſe. Vbi autem ambæ in eaſdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprendatur ab altera, uel altera earum ab alterius ſuperficie, & recta eoſdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipſius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprenſam eſſe minorem. Similiter autem & ſuperficierum eoſdem terminos habentium, ſi in plano terminos habuerint, minimam eſſe planam. Aliarum uero ſuperficierum, et eoſdem terminos habentium, ſi in plano terminos habeant, eas eſſe inæquales: ubi autem ambæ in partes eaſdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera ſuperficie, & plana eoſdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprendi conſtet, partem uero communem habere, & comprenſam eſſe cōprendente minorem. Amplius autem & inæqualium linearum, ſiue ſuperficierum, ſiue ſolidorum, maius excedere minus tanto, quantum ipſum ſibiipſi totiens complicari poteſt, ut excedat omnem propoſitam ſui generis quātitatem. His autem ſuppoſitis, ſi in circulum figura multiangula inſcribatur, conſtat ambitum figuræ inſcriptæ eſſe circumferentia circuli minorem. Vnumquodq; enim figuræ inſcriptæ latus minus eſt ea circumferentiæ parte, quæ per ipſum abſciſa fuerit.

SI circulo figura plurium angulorum circumſcribatur, linea recta quæ ex omnibus figuræ circumſcriptæ lateribus ſimul in directum coniunctis efficitur, ipſius circuli circũferentia longior eſſe probatur. 1



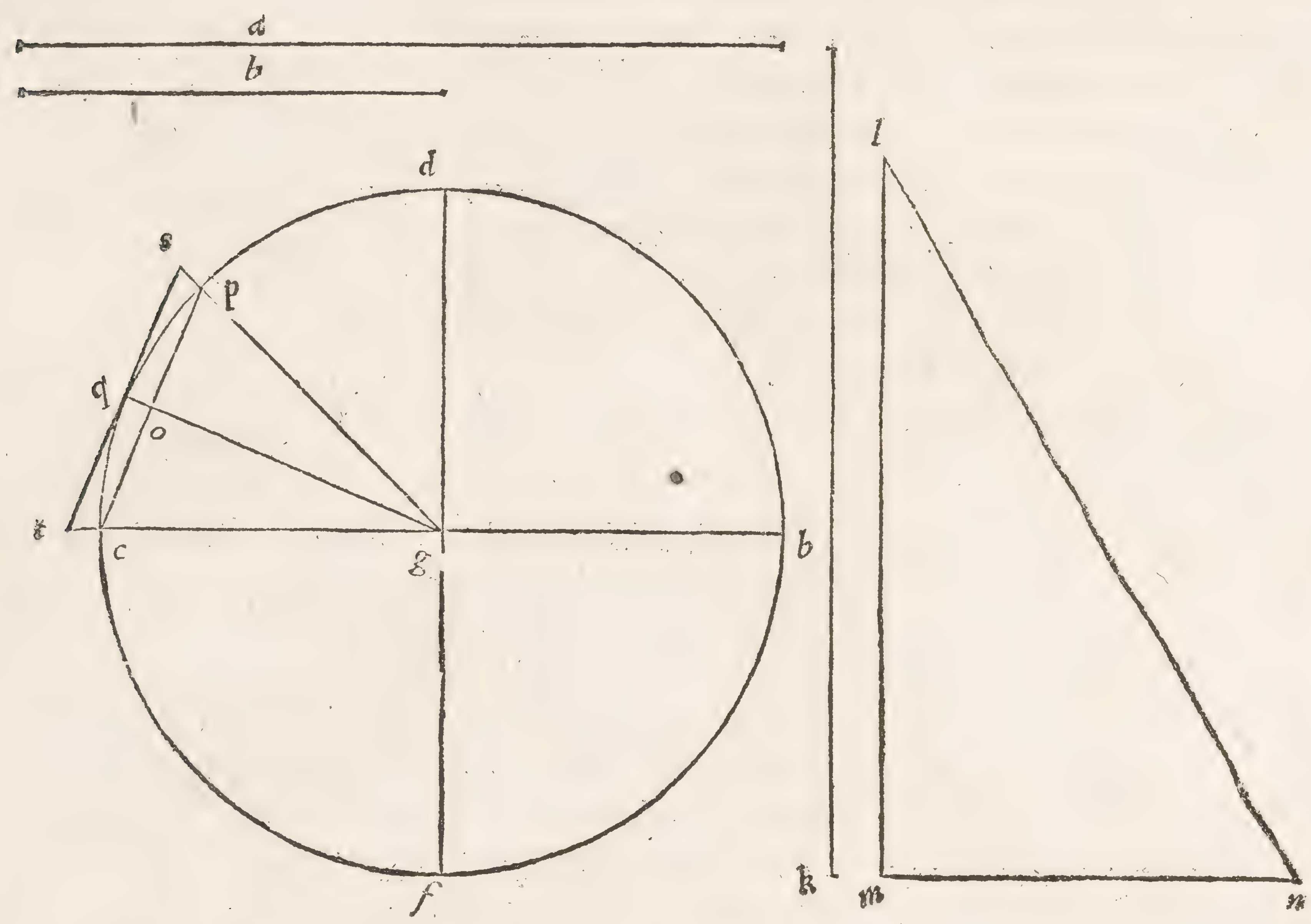
Circulo itaq; cuicunq; figura quæuis pluribus angulis conſtituta circumſcribatur: Dico lineas dictam figuram claudentes, ſi ſimul in directum cõ iungantur, lineam unam rectam conſtituere, circuli dicti circumferentia longiorem. Eſto igitur, exempli gratia, circulus cuius centrum m, quem circa ſit aptata figura a b c d e f g h k l, cuius anguli ſint ad puncta a c e g k notati, contactus uero laterum & circuli ad puncta b d f h l. Quoniam itaque a b, a l, cum arcum b l intra ſe coerceant, ipſo longiores habentur: ſimiliter c b, c d, ſuo arcu b d: item e d, e f, maiores: item f g, g h ſuo, demum k h, k l, quæq; duæ coniunctæ ſuis arcubus maiores ſint. eiſdem enim terminis cum ſuo quæq; duæ arcu prodeuntes ipſum includunt, erit, ut ſi una ex omnibus his recta linea iungatur, circuli circumferentia ſit longior, quæ ex illis arcubus colligitur.

DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, duæ rectæ lineæ poſſunt inueniri, quarum maior ad minorem ſit relata proportione minori, quàm magnitudo poſita maior ad minorem contineatur. Sunto igitur duæ magnitudines datæ a b maior, d minor. Dico duas inueniri poſſe rectas lineas inæquales, quæ ſententiam propoſitionis exæquantur. Statuatur itaq; per ſecundam primi Euclidis b c æqualis ipſi d, ſumatur deinde linea quæuis recta, quæ ſit f g, atq; a c totiens ſibi ipſi coaceruetur & multiplicetur, donec productum excreſcat maius ipſo d, quod uocetur a k. eſto et f g tantundem multiplex ipſius g h. erit itaq; ex hoc, ut quemadmodum a k & a c ſeſe reſpiciunt, ita f g, & g h. & item modo cõuerſo, ſicut a c refertur ad a k, ita quoq; g h ad g f. Aſt quoniam a k eſt maius ipſo d, cui c b poſitus eſt æqualis, referetur igitur a c ad a k minori proportione, quàm idem a c ad c b. quare ex coniuncta proportione c a k ad a k minori, quàm a c b ad c b. eadem ratione h g f ad g f minori, quàm a c b ad c b. Verum c b erat ipſi d ſumpta æqualis, ergo linea h g f ad g f lineam minori proportione habetur, quàm a c b magnitudo ad ipſam d. Inuentæ ſunt igit̃ duæ rectæ inæquales, quæ id quod iuſſum fuerat effecerunt, ut maior ad minorem proportione ſit relata minori, quàm magnitudo maior data ad magnitudinem minorem. 2



DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, & circulo quocunq;, fieri poteſt ut intra circulum datũ plurium angulorũ figura collocetur, at altera huic ipſi ſimilis eidem circulo aptetur extrinſecus, ita ut exterioris latus ad latus interioris proportione minori colligetur, quàm magnitudo data, maior ſcilicet ad minorẽ. Sint duæ datæ magnitudines a b, & circulus quiuis datus. Dico id effici poſſe, quod propoſitio iubet. Inuentæ iam duæ rectæ ſuprà proximè fuerunt, quarum ſit k maior, l m minor, contineantq; minorem proportionem quàm duæ datæ magnitudines. educaturq; à puncto m linea perpendicularis m n, & à puncto l ducatur ad lineam m n recta æqualis k, quod fieri poteſt. ducantur etiam in circulo duæ diametri c b, d f, ſeſe ad angulos rectos ſecantes in centro g. diuidentes igitur in duo æqualia angulum d c g, & huius iterum dimidiũ in duo æqua: ab hac diuiſione nõ deſiſtemus, donec angulum offenderimus quempiam, qui ſit minor 3

duplo anguli m l n, qui ſit p g c. & ducatur linea recta p c, quæ erit latus figuræ plurium angulorum æquilateræ. angulus enim p g c angulum d g c metitur. & p c arcus eadem ratione d c arcum metitur, & circulum totum. quapropter figura quæ-

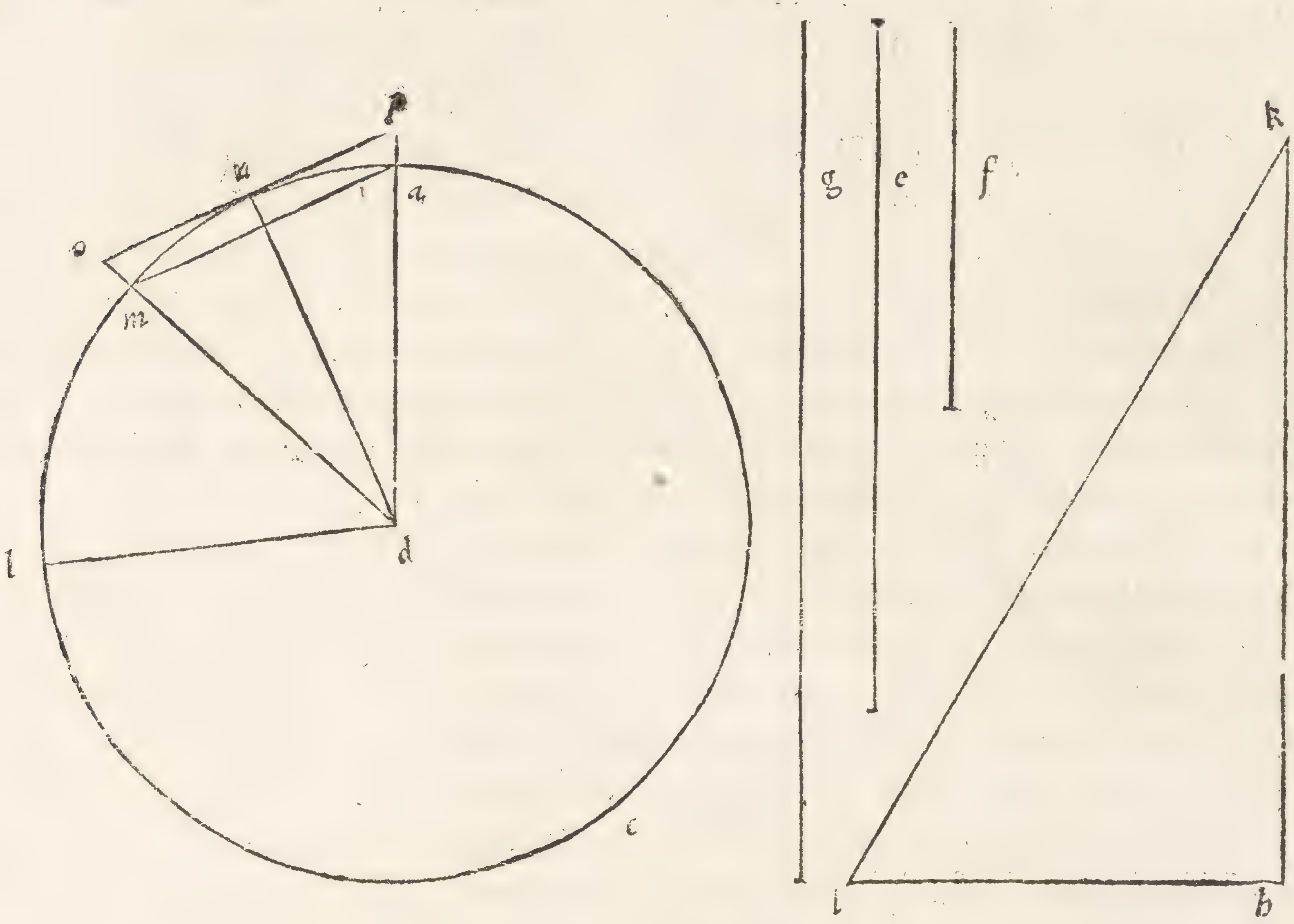


ſita erit circulo inſcripta. Secetur item in duo æqua angulus p g c, ducta g q linea. & à puncto q ducatur una recta contingens circulum ſ q t, occurrens lineæ g p in puncto s, & lineæ g c in pũcto t, extra circulum ductis utriſq; erit igitur s t recta, latus figuræ plurium angulorum æquis lateribus compræhenſæ, quæ circulo ſit circumducta. At uero quoniam p g c angulus minor eſt duplo anguli m l n, duplus autem angulo q g c, minor erit angulus q g c angulo m l n. cumq; o angulus, ubi g q ſecat rectam p c, & angulus m ſint recti: l n recta ad l m rectam maiore proportione referetur, quàm g c recta ad g o rectam. eſt autem g c recta æqualis g q rectæ: ex hoc g q rectam ad g o rectam conſtat minori proportione referri, quàm l n rectam ad l m rectã. preterea l n ad l m minori proportione tenetur, quàm a recta ad b rectam. Eſt igitur s q t latus figuræ plurium angulorũ æquilateræ circulo circumductę, & p o c latus intra circulum collocatæ figuræ: quæ ſic ſe habent, ut propoſitum fuerat inueniri poſſe.

4 DAtis item duabus magnitudinibus inæqualibus, & circuli cuiuſpiam ſectore dato, poteſt altera circa ſectorem, altera intra eundem aptari figura pluriũ angulorũ, ita ut exterioris latus ad latus interioris minorẽ proportionem retineat, quàm magnitudo maior data ad minorem. Sint itẽ duæ magnitudines inæquales datæ, e maior, f minor. Eſto etiam quiuis circulus a b c, cuius centrum d, ſectorque eius ad ipſum d terminatus a d b. iubemur itaq; ipſi ſectori circumaptare, & intra duas figuras plurium angulorum reliqua latera habentes æqualia, exceptis d a & d b, ita effectas ut propoſitio dicit. Eſto inuentas eſſe duas rectas inæquales g h k, maiorem g, atq; ita effectas ut g recta ad h k minorem proportionem habeat, quàm magnitudo maior ad minorem. hoc enim fieri poſſe ſuprà demonſtrauimus. & à puncto h ducatur perpendicularis h l, & à puncto k ducatur ad rectam h l recta æqualis g rectæ. quod fieri poteſt, cum g recta ſit longior h k. diuiſo igitur angulo a d b in duo æqua, & item eius dimidio in duo æqua diſtributo, & hac diuiſione perducta quouſq; occurrat angulus minor duplo anguli h k l, qui

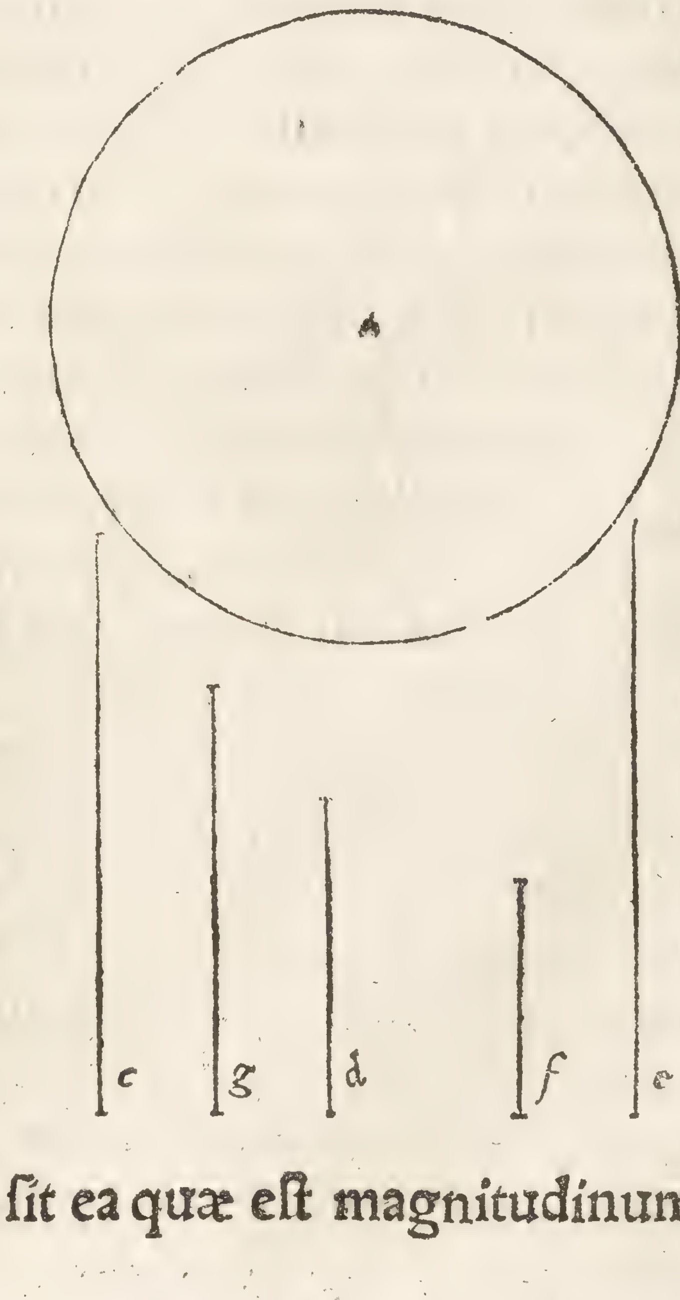
ſit

ſit a d m. erit igitur a m recta latus figuræ plurium angulorum intra ſectorem collocatæ. Si præterea diuidamus in duo æqua angulum a d m, ducta recta d n, & à puncto n eduxerimus rectam p n o, contingentem ſectorem in puncto n, occur-



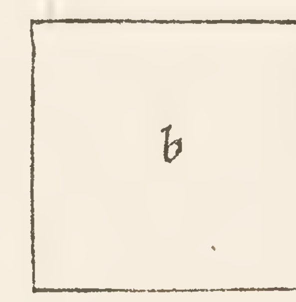
rentem ipſi d a in puncto p, & ipſi d m in puncto o, fecerimus p n o rectam, latus figuræ plurium angulorum ipſi ſectori circumductæ, quod ad latus figuræ iam intra ſectorem deſcriptæ minorem ſeruat proportionem, quàm magnitudo maior e ad minorem f, prout propoſitio dicebat fieri poſſe.

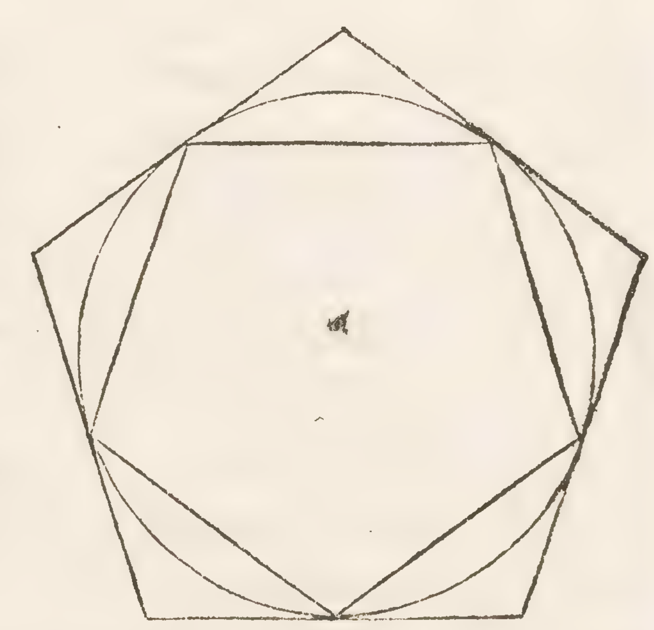
CIrculo dato, & duabus magnitudinibus inæqualibus, ipſi circulo poſſe unã intra eundem, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, quarum exterior ad interiorem ſeruat minorem proportionem, quàm magnitudo maior ad minorẽ. 5 Exponatur circulus a, & duæ magnitudines inæquales, e maior, f minor. Oportet igitur ipſi circulo a alteram intra, alteram extrà aptare figuram plurium angulorum, ita ut fiat quod propoſitum eſt. Conſtituam primo duas rectas inæquales, c maiorem, d minorem, ita ut c minori proportione referat ad ipſam d, quàm e ad ipſam f. accepta media proportionali inter c & d, quæ ſit g, conſtat c ipſa g eſſe maiorem. Circumdetur itaque circulo figura plurium angulorum, & altera ſimilis illi intra eundem ſtatuatur, hoc pacto ut latus exterioris ad latus interioris minorem teneat proportionem, quàm c ad ipſam g, quemadmodũ ſuprà docti fuimus. Quoniam igitur figuræ exterioris ad interiorem eſt ea quæ lateris illius ad latus iſtius duplicata proportio, hæc autem ipſa minor habetur quàm c ad ipſam g duplicata, quæ eſt c ad ipſam d, quæ quidem & ipſa minor eſt cõſtituta quàm ea quæ maioris magnitudinis habetur ad f minorem: colligitur inde, ut figuræ exterioris & figuræ interioris proportio multo minor ſit ea quæ eſt magnitudinum e & f proportione.



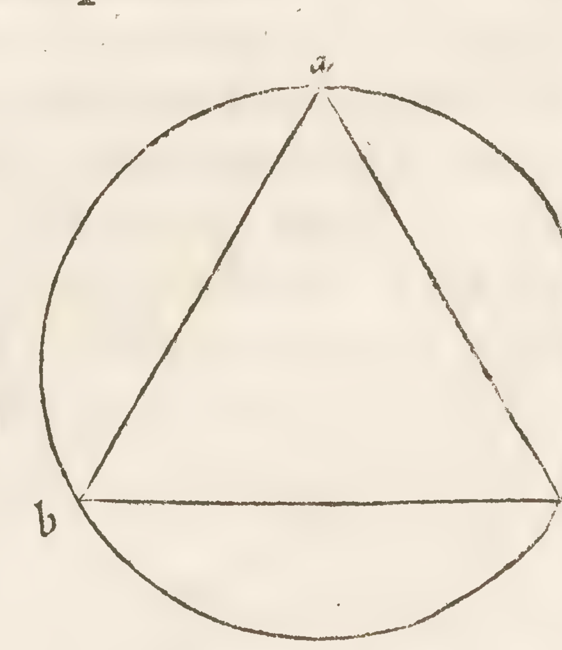
Similem oſtendemus, duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & circuli ſectore dato, poſſe duas, alteram circa ipſum, alteram intra conſtituere figuras plurium angulorum inter ſe ſimiles, quarum exterior ad interiorem minori tenea tur proportione, quàm magnitudo maior ad minorem. Vnde id quoq; manifeſtum eſt, ſi quiuis circulus aut ſector, præterea ſpacium aliquod proponatur, poſſe intra circulum uel ſectorem figuras plurium angulorum æquilateras collocari, & item in reliquis ſemper partibus circuli uel ſectoris eundem figuras inſcribendi modum continuari, donec tandem quæ ex circulo uel ſectore portiones ſupereſſent, dato ſpacio probarentur eſſe minores. hoc autem in elementis datum eſt.

6 DEmonſtrandum autem nunc eſt, quod circulo uel ſectore dato, & aliquo ſpacio ſimiliter dato, fieri poteſt ut circa circulum uel ſectorem figuram plurium angulorum æquilaterã deſcribamus, intra cuius latera & circuli uel ſectoris circumferentiam, partes quæ reſtant dato ſpacio ſint minores. Sit primum conuentum, ut quæ de circulo tradentur, eadem ad ſectorem referantur. Eſto igitur datus circulus a, & ſpacium datum b. Dico fieri poſſe, ut circa circulum figuram plurium angulorum æquilateram componamus hac ratione, ut partes lateribus figuræ & circumferentia circuli compræhenſæ, dato ſpacio minores probentur. Cum igitur duæ ſint magnitudines inæquales, maior ex circulo & ſpacio dato compoſita, minor circulus ipſe, circumſcribatur una altera, inſcribatur circulo figuræ plurium angulorum, ita ut circumſcripta minorem proportionem habeat ad inſcriptam, quàm dicta magnitudo maior ad minorem. Dico hanc figuram circumſcriptam eſſe, cuius partes à lateribus ſuis & circumferentia cõprehenſæ minores ſunt b ſpacio. Si enim circumſcriptæ ad inſcriptã minor ſit proportio, quàm circuli, & ſpacij b ad circulum, inſcripta uero maior eſt circulus, erit circumſcriptæ ad circulum minor quàm circuli, & ſpacij ad circulum. Arguenti igit̃ ex diſiũcta proportione probatur, dictas partes minorem proportionem ad circulum habere, quàm b ſpacium, atq; idcirco minores eſſe b ſpacio dato. Vel etiam hac ratione, cum ſpacij b & circuli ſit ad circulum proportio maior quàm circumſcriptæ ad eundem, atq; idcirco circumſcriptam minorem eſſe circulo & ſpacio b ſimul iunctis probatum eſt, dempto utrinq; circulo: illic ſpacium b maius, iſtic partes dictæ eo minores relinquentur. Eandem rationem in ſectore ſequemur.

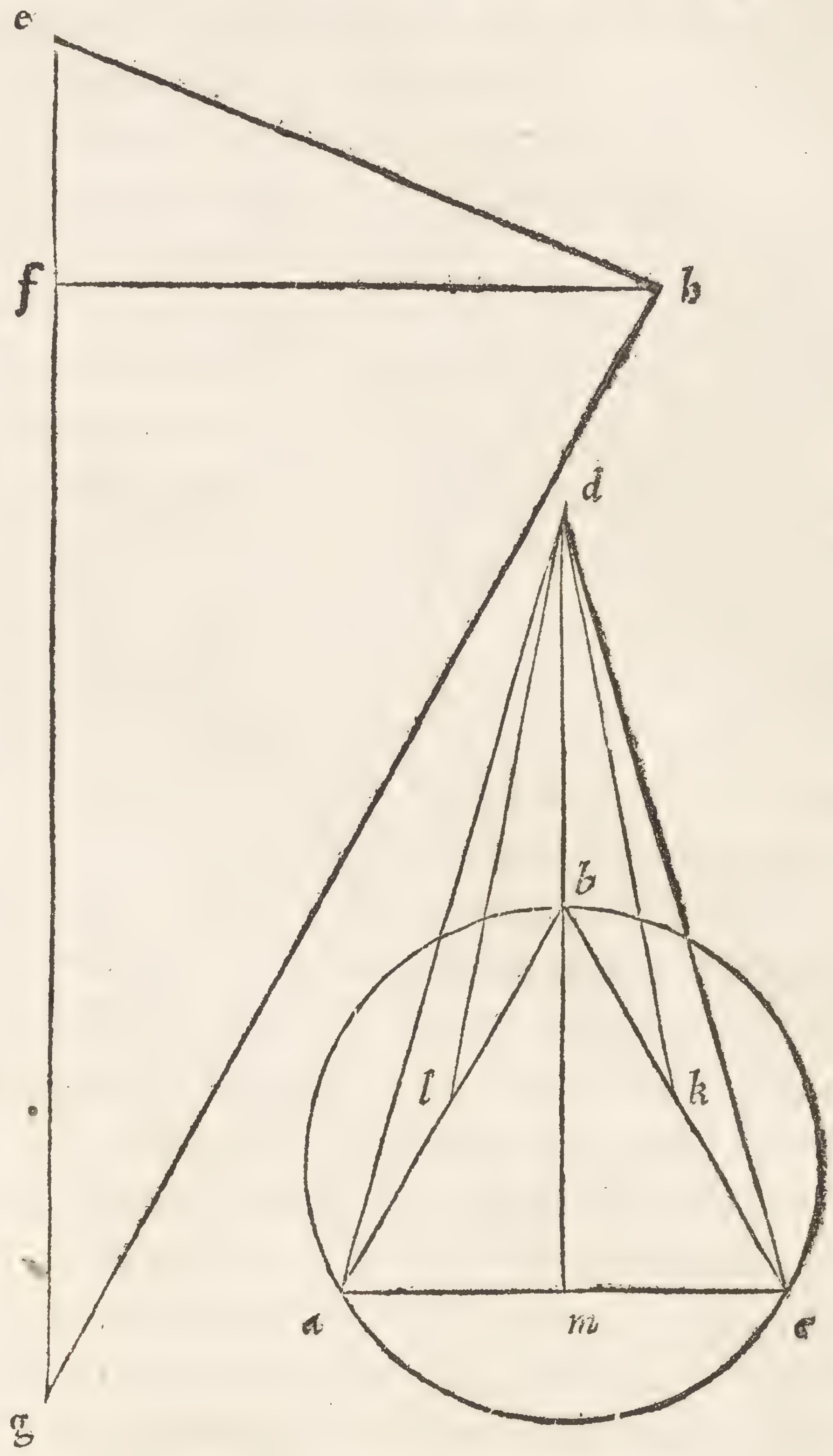




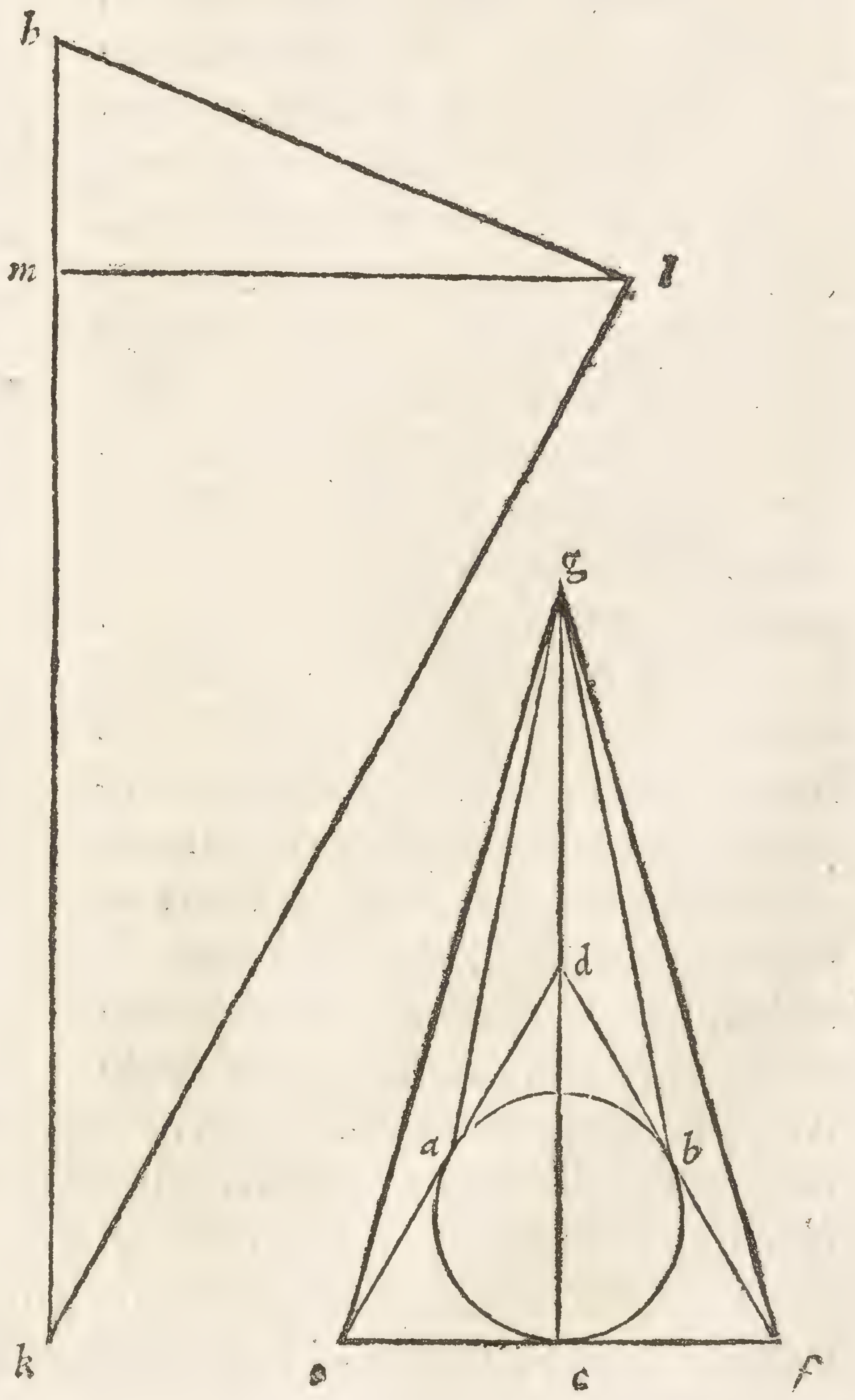
7 SI in cono æquicruri pyramis inſcribatur ęquilateram habens baſim, ſuperficies eius dempta baſe æqualis eſt triãgulo qui habet baſim æqualem lineæ coniunctæ ex omnibus lineis baſim pyramidis claudentibus: & altitudinem habet lineam perpendicularem, æqualem perpendiculari quæ ducta ſit à uertice coni ad unum ex lateribus baſis pyramidis. Sit conus æquicruris, cuius baſis exiſtat circulus a b c, intra quem inſcribatur pyramis æquilaterã baſim habens, quæ ſit a b c. Dico huius ſuperficiẽ, baſi dempta, triãgulo dicto æqualem eſſe. Cum enim conus ſit æquicruris conſtitutus, & baſis pyramidis æquilatera ponatur, altitudines triangulorum



rum baſim pyramidis claudentium perpendiculares inter ſe æquales eſſe oportet, trianguli uero baſim habent a b, b c, c a. altitudinem autem eam quàm diximus perpendicularem: quare triangulos neceſſe eſt eſſe omnes triangulo æquales, qui baſim habeat æqualem a b, b c, c a ſimul iunctis: altitudinem uero eam quæ ſæpe dicta eſt, perpendicularem.



Alia clarior demonſtratio. Eſto conus æquicruris, cuius baſis circulus a b c, uertex aũt punctũ d. & in eũ pyramis inſcribatur, baſim habens a b c æquilateram, & ducantur lineæ rectæ d a, d b. Dico quod a d b, a d c, b d c trianguli æquales ſunt triangulo rectangulo, cuius baſis ęqua ſit trib. lineis trianguli a b c: perpẽdicularis uero, quæ à uertice coni ad baſis latus ducitur, æqualis perpendiculari trianguli rectanguli quem ponimus. Ducantur itaq; perpendiculares d k, d l, d m. has palàm eſt æquales eſſe inter ſe. ponatur deinde triangulus e g h, qui e g baſim habeat æqualem lineis a b, b c, c a ſimul iunctis: e h perpendicularẽ ipſi d l perpendiculari æquam. Quoniam igitur quadrangulus rectangulus qui b c, d l lineis continetur, duplus eſt triangulo d b c: ſimiliter qui continetur lineis a b, d k, triangulo a b d duplus: itẽ qui a c, d m lineis clauditur, duplus & ipſe triangulo a d c: fit ut quadrangulus rectangulus qui clauditur linea cõſtituta ex lineis a b, b c, c a, claudentibus baſim ſimul iunctis, & linea d l perpendiculari à uertice ducta, duplus habeatur triangulus a d b, b d c, c d a. Eſt autem idem quadrangulus e g h f, duplus triangulo e g h. quare e g h triangulum æqualem eſſe triangulis a d b, d b c, c d a neceſſariò demonſtratum eſt.

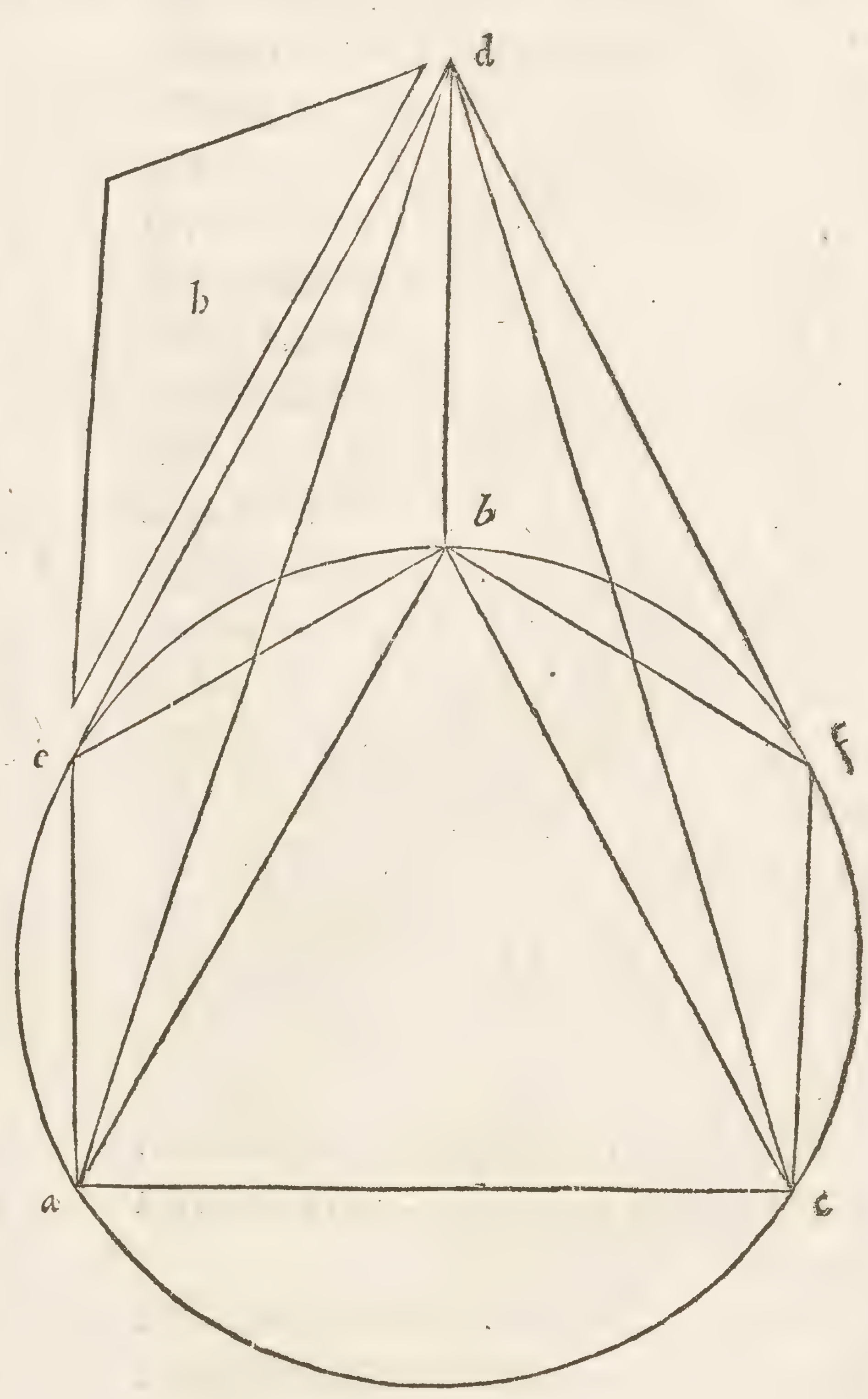


SI cono ęquicruri pyramis circũſcribatur, ſuperficies pyramidis excepta baſe æquatur triangulo rectãgulo, qui baſim habeat æqualem lineis baſim pyramidis cõtinentibus ſimul iunctis, altitudinem uero lateri ipſius coni æqualem. Eſto conus, cuius baſis circulus a b c. huic pyramis circũſcribatur, ita ut latera eius baſis d e f 8

circum-

circulum contingant. Dico igitur ſuperficiem huius pyramidis, excepta baſe, triangulo dicto probari æqualem. Quoniam igitur ipſius coni axis ſupra baſim a b c perpendiculariter erectus habetur, uidelicet ſuprà circulum a b c. & quæ ab eius centro rectæ ad contactus ducuntur, perpendiculares ſunt ipſis d e, e f, f d contingentibus: erunt etiam quæ à g uertice coni ad eoſdem contactus deductæ fuerint rectæ, g a, g b, g c, eiſdem d e, e f, f d perpendiculares, quas inter ſe æquas eſſe poſitum eſt, cum ſint latera coni. Ponatur itaq; triangulus h k l, qui habeat h k latus æquum lineis d e, e f, f d claudentibus baſim pyramidis, & habeat m l perpendicularem æquam g a. Quoniam itaq; quadrangulus rectangulus qui continetur d e, a g lineis, duplus eſt e d g trianguli: & qui continetur d f, g b, duplus trianguli d f g: item qui continetur e f, e g, duplus trianguli e g f: erit igitur qui h k, & a g, quæ æquatur m l lineis continetur quadrangulus, duplus e d g, f d g, e g f triãgulis. Eſt autem & qui h k, l m lineis clauditur quadrangulus, duplus triangulo h k l. quare colligitur, ſuperficiem pyramidis excepta baſe æquam eſſe triãgulo, qui baſim habeat æquam lineis claudentibus baſim pyramidis ſimul iunctis: altitudinem uero lateri coni æqualem.

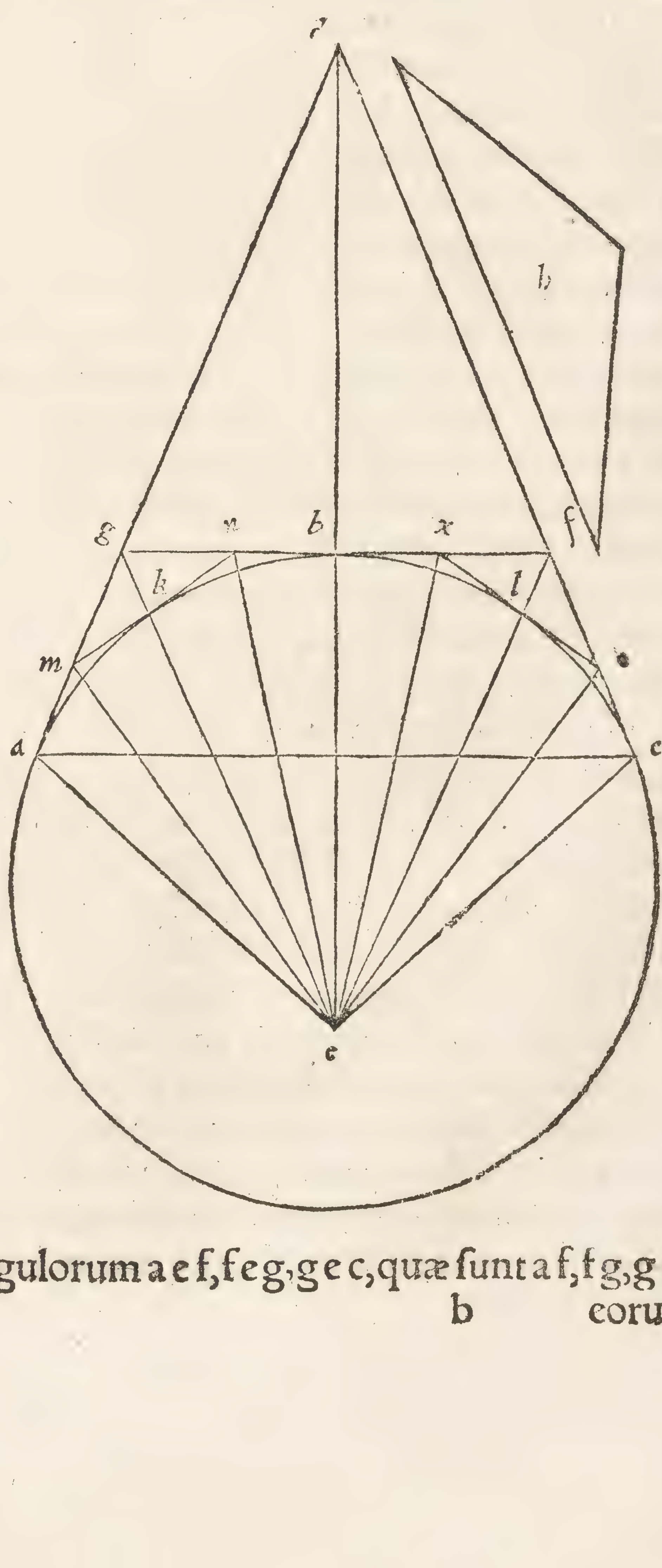
9 SI cono quouis expoſito æquicruri, intra circulum, qui eſt baſis ipſius coni, linea recta inciderit, & ab ipſius rectæ terminis duæ rectæ ad coni uerticem educantur: triangulus qui ab incidente & ab eductis ad uerticem comprehendit, minor eſt ea coni ſuperficie quæ inter rectas ad uerticem ductas continetur. Eſto coni æquicruris baſim eſſe a b c circulum, uerticem uero d, & recta quędam ducatur intra baſim quæ ſit a c: & à uertice d, ducantur ad a c pũcta, d a, d c rectæ duæ. Dico a d c triangulum minorem eſſe ea coni ſuperficie, quæ intra a d c comprehenditur. Diuidatur itaq; a b c circumferentia in duo æqua puncto b, & ducantur rectæ a b, c b, d b. trianguli ergo a b d, b c d maiores erunt triangulo a d c. quantum uero dicti trianguli ſuperant triãgulum a d c, eſto illud h: aut igitur h ſectionib. a b, b c minus eſt, aut non. Ponatur primò nõ minus. Quoniam igitur duæ ſunt ſuperficies, & conica, uidelicet inter a b d cõprehenſa, cum ſectione a e b, & triangularis a d b quæ terminis eiſdẽ clauduntur, lineis uidelicet a d b trianguli, erit ut complectens ſit maior complexa. Superficies igit̃ conica inter a b d comprehenſa, cum ſectione a e b, triangulo a b d maior habetur. ſimiliter & quæ inter d b c comprehẽditur, cum ſectione b f c, triangulo d b c probatur maior eſſe. Tota igitur conica ſuperficies dicta, cum h ſpacio, erit dictis triangulis maior. Sed trianguli dicti æquantur triangulo a d c, & h ſpacio: ipſo h ſpacio quod commune eſt ſublato, relinquitur, ſuperficiem conicam inter a d c comprehenſam, triangulo a d c eſſe maiorem. Ponatur ſecundò, h ſpacium ſectionibus a b, b c minus eſſe. Diuidentes igitur a b, b c arcus in duo æqualia, &



eorum

eorum dimidia rurſus in duo æqualia, ſumemus tandem ſectiones quæ ſint h ſpacio minores, ſintq; illæ a e, e b, b f, f c lineis contentæ. & ducãtur rectæ d e, d f. Rurſus eadem prorſus argumentatione, ſuperficies coni inter a e d contenta, cum ſectione a e, triangulo a d e probatur eſſe maior. & ea quæ inter e d b, cum ſectione e b, triangulo e d b maior. Superficies igitur conica inter a d b compræhenſa, cum ſectionibus a e, e b, maior erit a d e, e b d triangulis. Cum autem a d e, e d b trianguli, ſint a d b maiores, uti demonſtratum eſt, multo magis erit ſuperficies coni inter a d b comprehenſa, cum ſectionibus a e, e b, maior triangulo a d b. atq; eadem ratione ſuperficies conica quæ inter b d c compræhendit, cum ſectionibus b f, f c, triangulo b d c maior eſſe oſtenditur. quare tota ſuperficies conica, quæ inter a d c cõprehenditur, cum ſectionibus a e, e b, b f, f c dictis, maior eſſe colligitur triangulis a b d, b d c. ipſi autem æquales ſunt triangulo a d c, & ſpacio h. atq; horum ſectiones dictæ h ſpacio ſunt poſitæ minores. reliquum eſt igitur, ut ſuperficies conica inter a d c compræhenſa, neceſſariò maior eſſe dicatur triangulo a d c: quod erat oſtendendum.

SI rectæ ductæ circulum, qui ſit coni baſis, contingant, in eodem plano cum circulo conſtitutæ, atq; inuicem concurrant, & à punctis contactuum atq; cõcurſu rectæ ducantur ad uerticem coni trianguli à rectis circulum contingentibus, & ab his quæ à uertice ad dicta puncta deſcendunt comprehenſi, ſunt maiores ea ſuperficie coni quam dicti trianguli complectuntur. Eſto conus, cuius baſis circulus a b c, uertex autem punctum e, & circulum a b c contingentes ducãtur in eodem plano cum circulo quæ ſint a d, c d. & à puncto e, qui eſt uertex coni, ad puncta a d c rectæ ducantur, quæ ſint e a, e d, e c. Dico triangulos a e d, d e c maiores eſſe ea coni ſuperficie, quæ rectis e a, e c, & arcu a b c continet. Diuiſo enim arcu a b c per æqua in puncto b, ab ipſo puncto ducatur in utramq; partem recta, cõtingens circulum in dicto puncto, quæ ſit f b g, eritq; lineæ a c intra circulum æquediſtans. & f ſit punctũ quo ipſa incidit lineæ a d, punctum uero ubi incidit lineæ c d ſit g. deinde ab e uertice deducantur deorſum lineæ e f, e g. Quoniam igitur lineæ f d, & g d maiores ſunt ſimul iũctæ, quàm linea f g, ſi ſimul ſumantur communes a f & c g, erũt totæ a d, d c lineæ maiores a f, f g, g c. & quia e a, e b, e c ſunt latera coni, idcirco ſunt inter ſe æquales, cum conus ſit poſitus æquicruris. Sunt etiam perpendiculares lineis a d & c d, quia anguli e a f, e c g ſunt recti. Cum igitur triangulorum a e d, d e c baſes, ſcilicet a d, d c, ſint maiores baſibus triangulorum a e f, f e g, g e c, quæ ſunt a f, f g, g e: 10

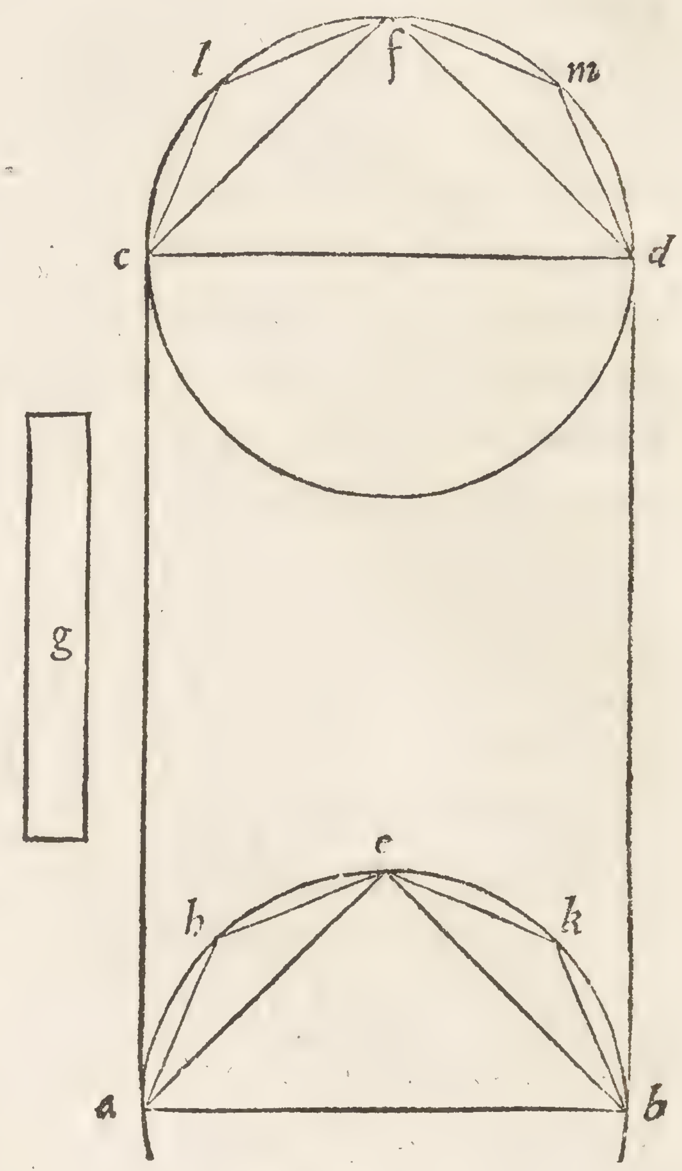


eorum uero altitudines, id eſt perpendiculares, ſunt inter ſe æquales, uidelicet e a, e b, e c. propter hoc erunt trianguli a e d, d e c, maiores triãgulis a e f, f e g, g e c. Quã tum igitur trianguli a e d, d e c excedunt triangulos a e f, f e g, g e c, ſit æquale ſpacio quod uocetur h. aut igitur h minus eſt eis plani particulis, quæ lineis rectis a f, f g, g c, & arcubus a b, b c circa circumferentiam compræhenduntur: aut non minus eiſdem. Eſto primum h non minus. Quoniam igitur duas ſuperficies coniũctas habemus, unam pyramidis eius quæ baſim habet f a g c quadrãgulam ſuperficiẽ, quæq; uerticem habet e: alteram conicam, quæ inter a e c includitur, cum ſectione a b c, hæq; ambæ eiſdem terminis inſiſtunt, uidelicet trianguli a e c lineis. manifeſtum eſt ex hoc, ſuperficiem pyramidis excepto triangulo a e c, maiorem eſſe conica ſuperficie, unà cum ſectione circuli a b c. Hac igitur ſectione, quæ utriſq; ſuperficiebus ſumitur communis, remota ab utriſque, relinquentur trianguli a e f, f e g, g e c, unà cum plani particulis, quæ circa circumferentiam lineis rectis continentur: relinquetur etiam ſuperficies conica a b c arcu, & e uertice comprehenſa, quæ dictis triangulis unà cum particulis dictis oſtenſa eſt minor eſſe. Verum quoniam h ſpacium fuit poſitum non minus particulis illis: erunt idcirco dicti trianguli a e f, f e g, g e c unà cũ ſpacio h prædicta ſuperficie conica maiores. ipſi uero trianguli unà cum h ſpacio æquãtur triangulis a e d, d e c. Erũt igitur a e d, d e c trianguli, dicta ſuperficie conica ampliores. Eſto ſecundò ſpaciũ h minus particulis dictis, tunc aſſidue circa circumferentiam a b c deſcribemus figuras plurium angulorũ, ſemper diuidendo arcus in duo æqua, & à punctis ſectionum lineas rectas educẽdo, quæ circulum contingant: nec ab iſta opera deſiſtemus, donec particulas circa circumferentiam lineis dictis & arcubus contentas, ſimul omnes habuerimus ipſo h ſpacio minores. Eſto igitur ut ſumptę ſint a m k, k n b, b x l, l o c, quæ h ſpacio minores habentur. & à ſingulis punctis ſingulæ lineæ rectæ ad uerticem e erigãtur. Rurſus patet, triangulos a e f, f e g, g e c, maiores eſſe triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. nam baſes illorum ſimul iunctæ, ſunt maiores baſibus horum ſimul iũctis: altitudines uero omnium ſunt æquales. Vnde rurſus ſequitur, quod pyramis cuius baſis eſt figura plurium angulorũ, uidelicet a m n, x o c, uertex uero e maiorem habeat ſuperficiem, excepto triangulo a e c, ſuperficie conica quæ inter a e c cõtinetur, unà cum ſectione a b c. Sublata igitur a b c, ſectione utriſq; communi, reliquum pyramidis quod cõſtat ex triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c, & particulis a m k, k n b, b x l, l o c, maius eſſe neceſſe eſt reliquo, ſcilicet ſuperficie conica quæ inter a e c continetur. Verũ prædictis particulis ſpacium h poſitũ eſt maius. Præterea triãguli a e f, f e g, g e c demõſtrati ſunt eſſe maiores triãgulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. igitur multo magis trianguli a e f, f e g, g e c, unà cũ ſpacio h, qui ſcilicet æquantur triãgulis a e d, d e c, ſunt maiores conica ſuperficie ſæpe dicta. quare triangulos a d c, d e c, eadẽ quoq; ſuperficie maiores eſſe, neceſſariò probatũ eſt.

11 SI in ſuperficie cylindri recti duæ lineæ rectæ fuerint ab eius capite ad baſim ductæ, ea cylindri ſuperficies quæ dictis lineis includetur, maior erit ſuperficie quadrangula & æquediſtantium laterum, quæ quidem ſuperficies dictis lineis & alijs duabus rectis continetur, quæ duæ extrema prædictarum duarum puncta utrinque connectunt. Eſto cylindrus rectus, cuius baſis ſit circulus a b, eius caput c d. ducantur duæ rectæ a c, b d: item duæ aliæ rectæ a b in baſi, c d in capite, ſecantes circulos baſis & capitis. Dico itaque, quod ea cylindri ſuperficies quæ lineis rectis a c, b d cõprehenditur, maior eſt ſuperficie a b c d plana, & laterum æquediſtantium. Diuidantur enim a b, & c d arcus in duo æqua ad e f puncta. & ducant rectæ a e, e b: item c f, f d. hoc facto, quoniam a e, b e rectæ ipſa a b recta ſunt maiores, & in ipſis ſtant duæ ſuperficies quadrangulæ laterum æquediſtantium, & æquè altæ ipſi cylindro & ſuperficiei a b c d quadrangulæ, fit ut dictæ duæ ſuperficies planę, quarum baſes ſunt a e, e b, ſuperficie a b c d quadrã

gula

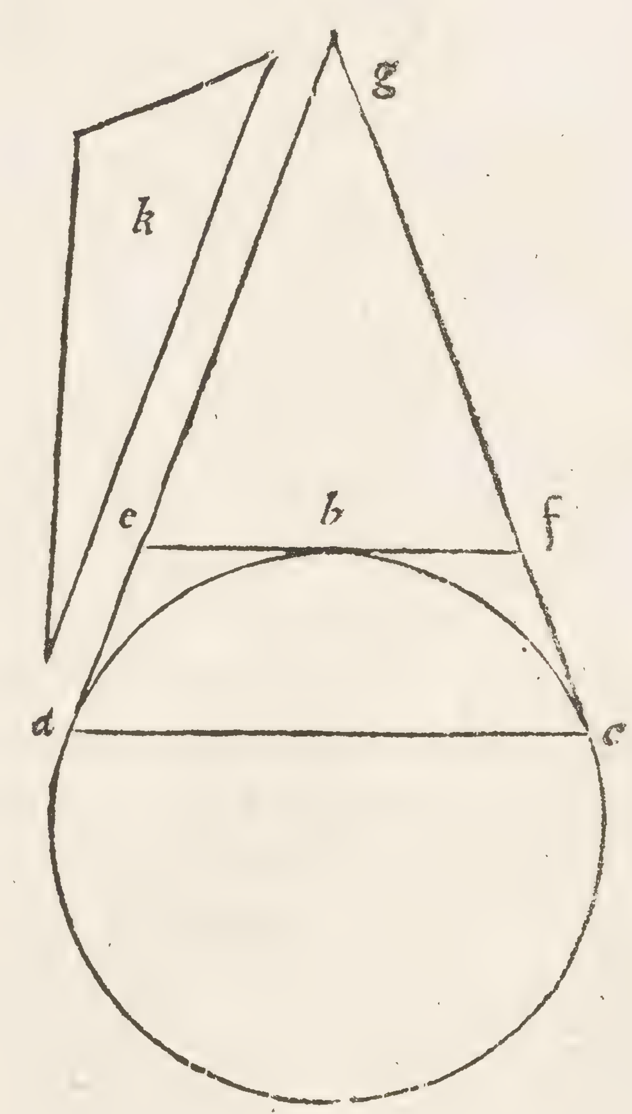
gula plana maiores habeantur. Eſto igitur g ſpaciũ æquale ei, quo illæ inueniuntur illa maiores. aut igitur g ſpacium minus eſt partibus plani, quæ continentur ab arcubus & rectis a e, e b, c f, f d, aut non minus eſt. Ponatur igitur primò non minus eis, tunc quoniam ſuperficies cylindrica à lineis rectis a c b d abſciſa, & ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrãgulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uerò eadem cum cylindro & triangulis a e b, c f d terminum habent eundem, ſcilicet ſuperficiem planam a b, c d rectis cõpræhenſam, & ambæ ſunt uerſus eandem concauitatem collocatæ, colligitur ſuperficiem cylindricam rectis lineis a b c d abſciſam, ſimul cum portionibus circulorum a b, c d maiorem eſſe ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro. & ex triangulis a e b, c f d: ſublatis utrinq; triangulis a e b, c f d, qui ſunt communes utriſq;: relinquet̃ ſuperficies cylindrica abſciſa rectis a b, c d, unà cũ



ſectionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d: quæ ſunt maiores ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes a e, e b ſunt: altitudo uero eadem cum cylindro. Dictæ autem ſuperficies, quarum baſes ſunt a e, e b, æquantur ſuperficiei a c b d quadrangulæ, & æquediſtantium laterũ, unà cum g ſpacio. Reliquum eſt igitur, ut cylindrica ſuperficies rectis lineis a c, b d compræhenſa, maior eſſe dicatur ſuperficie quadrangula æquediſtantium laterũ, quæ a c, b d rectis lineis cõtinetur. Eſto igitur ſecundò, ut g ſpacium ſectionib. circulorum planis a e, e b, c f, f d minus ſit: tunc ſcindantur in duo æqua ſinguli arcus a e, e b, c f, f d, per puncta h k l m. & ducantur rectæ a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Hoc facto, perſpiciemus à portionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d, non minus dimidio unicuique ſuo ablatum eſſe per triangulos rectilineas a h e, e k b, c l f, f m d. quo diuidendi & auferendi modo ſeruato, neceſſe eſt tandem ad portiones circulorum deuenire, quæ ſint g ſpacio minores. Eſto igitur ut ſumptæ ſint dicto g ſpacio minores a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Similiter demõſtrabimus quod ſuperficies quadrangulæ æquediſtantium laterum, quarũ baſes ſunt a h, h e, e k, k b, & altitudo æqualis cylindro maiores ſunt ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b, & altitudo æqualis cylindro. Cum igitur cylindrica ſuperficies abſciſa rectis lineis a c, b d, unà cum ſectionibus circulorum planis a c b, c f d terminum habeant ſuperficiem planam rectis lineis a c, b d contentam: præterea eundem terminum habeat ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a h, h e, e k, k b: altitudo uerò cũ cylindro eſt eadẽ, & ex rectilineis plani portionibus a h e k b, c l f m d: cumq; ſint utręque in eandem concauitatis partem collocatæ, & cylindrica complectatur rectilineam, erit complectens maior cõplexa. Si igitur rectilineæ plani portiones a h e k b, c l f m d, quæ utriſq; communes ſunt, auferantur, reſtabit ſuperficies cylindrica rectis a c, b d compræhenſa, unà cum ſectiunculis circulorũ planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d: quæ maior eſſe concluditur ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantiũ laterum, quę ſimiliter ſunt relictæ: quarum baſes habentur a h, h e, e k, k b: altitudo eadem cum cylindro. Hæ autem ſuperficies nuper dictæ maiores ſunt ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum

baſes ſunt a e,e b. & altitudo eadem cum cylindro. Item iſtæ impropriè dictæ ſuperficies quadrangulæ, ſunt æquales ſuperficiei quadrangulæ æquediſtantium laterum a c,b d, unà cum ſpacio g. Superficies igitur cylindrica rectis lineis compræhenſa a c,b d, unà cum ſectiunculis circulorum planis a h,h e,e k, k b,c l,l f, f m, m d, maior erit ſuperficie a c,b d quadrangula æquediſtantium laterũ, unà cũ g ſpacio, quod ſpacium poſitum eſt maius dictis ſectiunculis. Hoc igitur ſpacio g à dicta ſuperficie quadrangula ſublato, dictis etiam ſectiũculis a h,h e,e k,k b,c l,l f, f m,m d, à cylindrica ſubtractis, cum maius de minori, & minus de maiore ſit ablatum, relinquetur ſuperficies cylindrica rectis a c,b d compræhenſa, maior ſuperficie a c, b d plana quadrangula.

12 SI in ſuperficie cuiuſpiam cylindri recti duæ rectæ lineæ ductæ ſint, & ab earũ terminis aliæ rectæ ducantur contingentes circulum, qui quidem circulus dicti cylindri ſit baſis, ſitq; idem cum lineis rectis eum contingentibus in eodem plano conſtitutus, dictæ inſuper contingentes ad unum concurrant: tunc ſuperficies quadrangulæ planæ æquediſtantium laterum ab ipſis contingentibus & cylindri lateribus compræhenſæ, maiores erunt ea ſuperficie cylindri quæ intra duas lineas rectas in cylindro ductas continetur. Eſto itaq; cuiuſcunq; cylindri baſis circulus a b c, ſintq; in eiuſdem ſuperficie duæ rectæ lineæ, quarum termini ſint a c. à quibus terminis ducantur duæ rectæ circulum contingentes, atq; in eodem plano cum circulo cõſtitutæ, & itẽ concurrentes in puncto g. notentur & in capite cylindri aliæ duæ à terminis ductarũ in cylindro linearum ductæ, & in eodem plano cum circulo capitis conſtitutæ, & ipſum capitis circulum contingentes, & uerſus eandem partem concurrẽtes in quam lineæ circulum baſis contingentes concurrerunt. Hoc facto, oſtendendum eſt ſuperficies planas quadrangulares æquediſtantibus lateribus contentas, quæ uidelicet ſuperficies cõpræhenduntur à prædictis lineis contingentibus, & à lateribus cylindri, maiores eſſe ſuperficie cylindri quæ ſecundum a b c arcum baſis eſt compræhenſa. Diuiſo enim a b c arcu in duo æqua in pũcto b, ab ipſo b puncto ducatur in utramque partem recta contingens circulum baſis, & applicãs extremitates ſuas lineis baſim contingentibus in punctis e f. & ab ipſis punctis e f erigantur duæ



rectæ uſq; ad ſuperficiem capitis, quæ ſint æquediſtantes axi cylindri. tunc ſuperficies quadrangulares æquediſtantium laterum, quæ continentur lineis rectis a g & g c, & à lateribus cylindri, maiores ſunt eis ſuperficiebus quadrangularibus æquediſtantium laterum, quæ ſub rectis a e,e f,f c, & ſub laterib. cylindri ſunt cõpræhenſæ. Cum enim e g & g f maiores ſint e f, ſi poſuerimus a e,f c communes, ſequetur totas ſimul a g,g c ſumptas maiores eſſe a e,e f, f c. & ideo ſuperficies a g,g c, ſuperficiebus a e,e f,f c ſimul ſumptis eſſe maiores. Quo autẽ ſunt maiores illis, ſit æquale ſpacio k. dimidium igitur ſpacij k, aut eſt maius portionibus plani compræhenſis ab a e,e f,f c rectis lineis & ab arcubus a d,d b,b h, h c, aut non eſt maius. Eſto primò maius. eius itaq; ſuperficiei quæ componitur ex quadrangularib. & æquilateris ſuperficiebus, quarum baſes ſunt a e,e f,f c, & ex quadrãgula plana a e,f c, in baſe cylindri, & alio quadrangulo ei ſimili in capite eiuſdem cylindri conſtituto, termini ſunt lineæ rectæ claudentes ſuperficiem quadrangularem, cuius

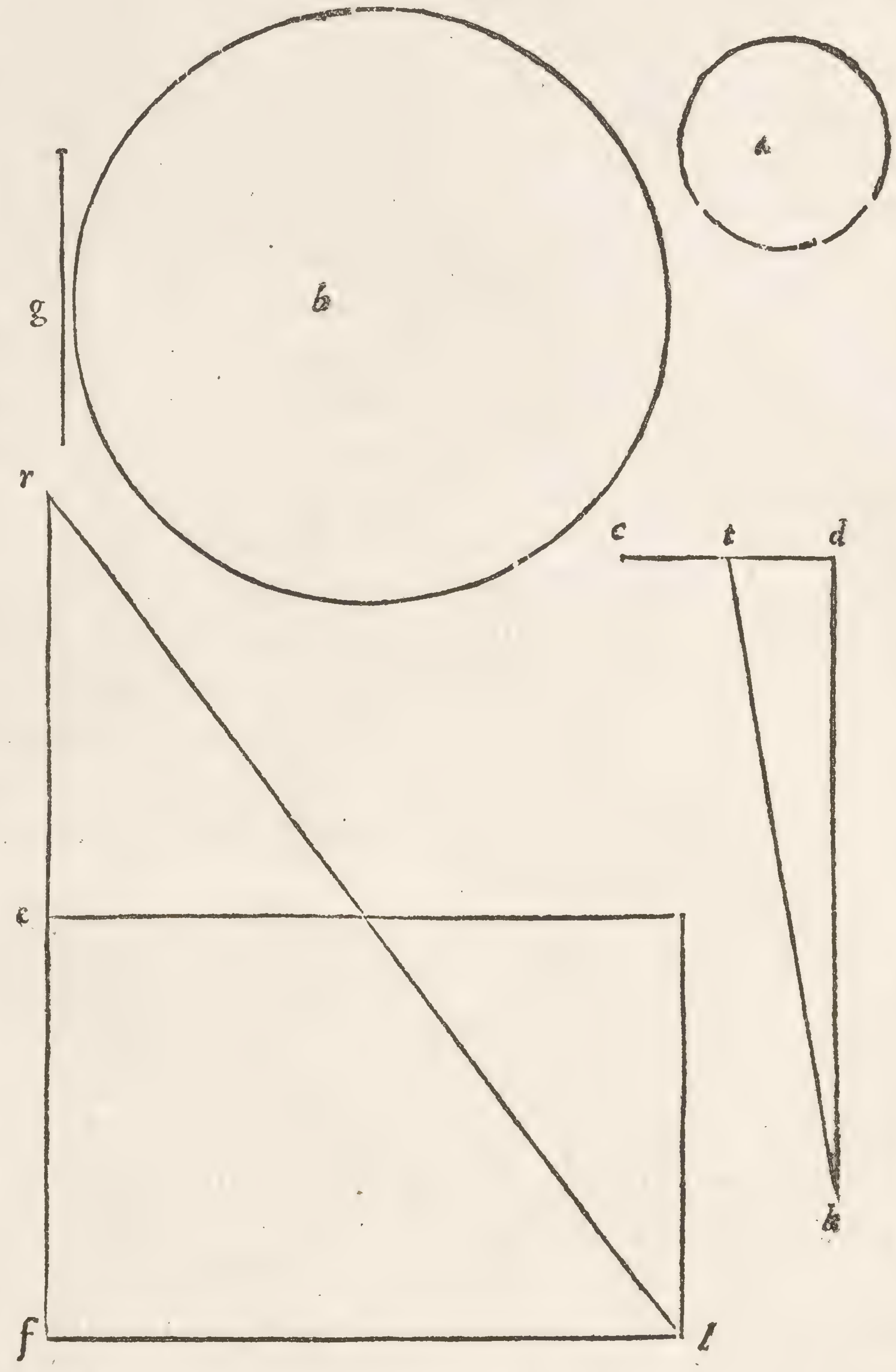
baſis

baſis eſt linea recta a c. Sunt etiam prædictæ lineæ termini eius ſuperficiei, quæ cõponitur ex cylindri ſuperficie illa quæ ſecundum a b c arcum ſumpta eſt, & ex ſectionibus a b c in baſe, & altera in capite, quæ ſimilis eſt illi. Duæ igitur dictę ſuperficies quas compoſitas diximus eidem termino, plano inſiſtunt, & ſunt in eandem partem conuolutæ. & quædam pars unius complectitur quandam partem alterius, reliquum commune habent. Complexa itaq; minor erit complectente. Igitur ſublatis cõmunibus, ſcilicet ſectione a b c in baſe, & ea quæ ſibi ſimilis eſt in capite relinquet̃ ſuperficies cylindri quæ eſt ſecundũ a b c ſumpta, quam cõſtat minorem eſſe reliqua ſuperficie cõpoſita ex quadrangularib. ſuperficiebus, quarum baſes ſunt a e, e f, f c: & ex portionibus plani contentis ab arcubus & lineis rectis a e, e b, b f, f c in baſe, et ex totidem his ſimilib. in capite. Sed ſuperficies nuper dictę cũ portionibus dictis, ſimul minores ſunt ſuperficie compoſita ex quadrangularibus ſuperficiebus, quarũ baſes ſunt a g, g c. nam ipſæ cum k ſpacio fuerant poſitæ æquales eidem. & portiones dictæ ſumptæ ſunt ipſo k ſpacio minores. quare concluditur neceſſariò, ſuperficies quadrangulares quæ lineis rectis a g, g c, & laterib. cylindri continentur, ea cylindri ſuperficie maiores eſſe, quæ ſecundum a b c arcũ ſumpta fuit. Eſto ſecundò, ſi dimidium ſpacium k nõ fuerit maius portionibus dictis, ducentur rectæ lineæ contingentes circulum, ut ſuprà factum eſt, donec portiones rectis lineis & arcubus compræhenſæ dimidio k ſpacio ſimul ſumptæ ſint minores. & reliqua deinceps eodem ordine & eadem arguendi ratione conficiemus, qua ſuprà uſi ſumus.

His igitur ita demonſtratis, manifeſtum ex dictis fit, quod ſi conò æquicruri pyramis inſcribat̃, ipſius pyramidis ſuperficies excepta baſe, minor eſt conica ſuperficie. Vnuſquiſq; enim eorum triangulorum qui pyramidem comprehendunt, ea coni ſuperficie minor exiſtit, quæ ipſius trianguli lateribus inſiſtit. quare tota ſimul pyramidis ſuperficies excepta baſe minor eſſe probatur tota coni ſuperficie, excepta ſimiliter baſe. Item ſi circa conũ æquicrurem pyramis aptetur, ſuperficies pyramidis excepta baſe, maior eſt coni ſuperficie, excepta ſimiliter baſe eadem rationis continuatione. Item ex demonſtratione conſtat, ſi in cylindro recto figura multis ſuperficiebus planis & æquilateris conſtituta inſcribatur, quod ſuperficies ex omnibus dictæ figuræ ſuperficiebus excepta baſe collecta, minor neceſſariò exiſtit ſuperficie cylindri excepta baſe. nam unaquæq; ſuperficies dictæ figuræ parallelis lateribus conſtans, minor eſt ea cylindri ſuperficie quæ ſibi incumbit. Item ſi circa cylindrum figura multis ſuperficiebus planis & parallelis lateribus conſtituta circumponatur, ſuperficies dictæ figuræ ex omnibus ſuis ſuperficiebus excepta baſe collecta, maior eſt ſuperficie cylindri excepta ſimiliter baſe.

CViuslibet cylindri recti ſuperficies, excepta baſe, illi circulo æqualis eſſe probatur, cuius quidem circuli ſemidiameter inter latus cylindri & diametrum 13
baſis eius media ſecundum proportionem exiſtat. Eſto cuiuſpiam cylindri recti baſis circulus à diametro, cuius æqualis ponatur linea c d, lateri uero cylindri linea e f æquetur. linea uero g ſtatuatur inter e f lineam, & c d lineam, media ſecundum proportionem. deſcribatur etiã circulus b, cuius ſemidiameter ſit æqualis lineæ g. his conſtitutis, demonſtrandum eſt b circulum dicti cylindri ſuperficiei eſſe æqualem, excepta cylindri baſe. Et ſi non ſit ei æqualis, aut maior erit, aut minor neceſſariò. Eſto primũ, ſi fieri poteſt, minor. tunc cum duas magnitudines inæquales habeamus, circulum b, & ſuperficiem cylindri dictam, poſſumus intra circulum b unam figuram rectilineam multorũ angulorum & æqualium laterum inſcribere, & alteram illi ſimilem eidem circulo circumſcribere hoc pacto, ut circumſcriptę ad inſcriptam minor proportio habeatur, quàm ſuperficiei cylindri dicti ad circulũ. Intelligamus igitur ita circũſcriptam & inſcriptam dicto circulo eſſe, ut poſuimus, dictam figuram. deinde circa circulum a circumſcribatur rectilinea figura, ſimilis

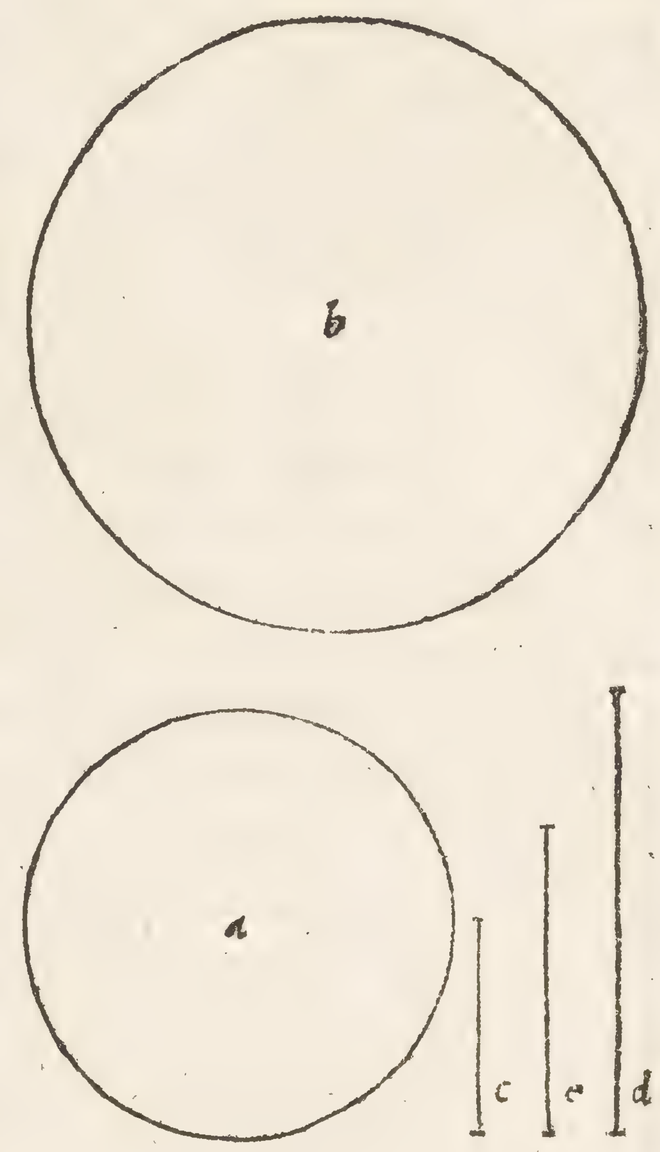
uidelicet illi quæ circa b circulum intelligitur circumſcripta. & ab angulis & punctis dictæ figurę rectilineæ circulo a circumſcriptæ erigantur lineæ rectæ uerſus caput cylindri, quæ cõcludent figuram plurium laterum & æqualium circa ipſum cylindrum deſcriptam. Eſto etiam perimetro eius figuræ rectilineæ circa a circulum conſtitutæ, æqualis k d linea. iterũ ipſi k d ſit æqualis l f. ſit aũt dimidiũ ipſius c d linea c t, & fiat triangulus rectãgulus k d t, ita quòd angulus rectus ſit ad punctũ d. erit igit̃ triangulus k d t, æqualis figuræ rectilineæ, quam circa a circulum ſuprà deſcripſimus: quoniã dictus k d t triangulus baſem habet æqualem perimetro illius figuræ, & altitudinem æqualem lineæ ex centro a ad circumferentiam ductæ. Super e f conſtituatur figura lineis quatuor parallelis contenta, & rectis angulis. Huius figuræ ſuperficies probatur eſſe æqualis ſuperficiei figuræ rectilineæ circa cylindrum ſuprà deſcriptæ, quoniam continetur linea e f æquali lateri cylindri, & linea f l æquali baſi perimetræ dictæ figuræ circa cylindrum conſtitutæ. Ponatur item e r linea æqualis e f lineæ, & ducatur linea r l, erit confectus triangulus f r l æqualis ſuperficiei e l parallelogrãmæ: quare & idem triangulus ęqualis erit ſuperficiei figuræ circa cylindrum ſtantis. & quoniam rectilinea figura circa b circulum deſcripta, ſimilis eſt figuræ rectilineæ circa ipſum a circulũ deſcriptę, habebũt iſtæ duæ figuræ inter ſe proportionem illam, quam habent ſemidiametri dictorum circulorum a & b, ſecundum potentiam. igitur triangulus k d t, habebit eandem proportionem ad figuram rectilineam circa b circulum deſcriptam, quam habet t d linea ad lineam g ſecundum potentiam. nam t d, g lineæ æquantur lineis quæ ex centris ducuntur ad circumferentias. Sed quam proportionem habet linea t d ad lineam g poteſtate, hanc habet t d linea ad lineam r f longitudine. nam g linea inter t d & r f lineas, media eſt ſecundum proportionem. Propterea quòd etiam inter e d & e f lineas media eſt ſecundum proportionem. Quomodo autem hoc ſit, declaratur ſic. Quoniã enim d t linea æquatur t c lineæ, & r e linea e f lineæ eſt æqualis: linea igitur c d dupla eſt lineæ t d, & linea r f dupla r e. Ergo ſicut ſe habet linea d c ad lineam d t, ſic linea r f ad f e. Id igitur quod fit ex c d in e f, æquatur ei quod producitur ex t d in r f. Quod autem ex c d in e f producitur, æquale eſt ei quod fit ex g linea in ſe ducta. igitur quod fit ex t d in r f, æqua-



æquatur ei quod fit ex g in ſe. Eſt ergo ſicut t d ad g, ita g ad r f. quare ſicut t d ſe habet ad r f, ſic quadratum t d ad quadratum g. Nam ſi tres lineæ ponãtur continuæ proportionales, ſicut ſe habet prima ad tertiam, ita figura æquilatera ſuper primã conſtituta, ad figuram conſtitutam ſuper ſecundam, ſi fuerit ſimilis dictæ figuræ, & ſimiliter deſcriptæ. Quam proportionem habet t d ad r f longitudine, eandem habet k d t triangulus ad r l f triangulum, cum k d & l f ſint æquales. Eandem igitur proportionem habet k t d triangulus ad rectilineam figuram circa b circulum ſuprà conſtitutam, quam habet t k d triangulus ad r f l triangulum. Triangulus ergo f l r æquatur rectilineæ figuræ circa b circulum deſcriptæ. quare & ſuperficies figuræ rectilineæ circa cylindrum ſuprà deſcriptæ æqualis erit ſuperficiei figuræ rectilineæ circa b circulum conſtitutæ. At uero quoniam rectilinea ſuperficies circa b circulum conſtans minorem proportionem habet ad ſuperficiem rectilineã ſibi ſimilem, intra b circulum inſcriptam, quàm habeat ſuperficies rectilinea circa cylindrum aptata ad circulum b: propter hoc minorẽ habebit proportionem ſuperficies dicta circa cylindrum conſtans, ad ſuperficiem rectilineam intra b circulum inſcriptam, quàm ſuperficies cylindri ad circulum b. & permutatim quoque: quod eſſe non poteſt omnino. nam ſuperficies figuræ rectilineæ circa cylindrum conſtitutæ, demonſtrata eſt eſſe maior ſuperficie cylindri. rectilinea uero figura circulo b inſcripta, ipſo b circulo minor exiſtit. Nõ eſt igit̃ b circulus minor ſuperficie cylindri. Eſto ſi poteſt eſſe, quod ponatur maior. Rurſus intelligatur in b circulo figura rectilinea inſcripta, & eidem altera circumſcripta ſimilis inſcriptæ, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio, ꝙ circuli b ad ſuperficiem cylindri. et inſcribat̃ in a circulo figura polygonia, ſimilis ei quę b circulo fuit inſcripta: & erigatur, ut ſuprà, figura rectilinea ex angulis figuræ circulo a nuper inſcriptæ, & rurſus k d linea ſit æqualis perimetro figuræ rectilineæ in a circulo inſcriptæ. Sit etiam l f linea æqualis eidem. Iſtis ſic poſitis, cætera ut ſuprà teneantur, erit triangulus k t d maior figura rectilinea circulo a inſcripta: quoniam baſis ipſius trianguli æqualis eſt perimetro dictæ figuræ: altitudo uero maior ea linea quæ à centro a ducitur perpendiculariter ad unũ latus dictæ figuræ. At uero e l ſuperficies quadrilatera æquatur ſuperficiei quæ ſit cõpoſita ex quadrilateris ſuperficieb. omnib. figuræ rectilineæ cylindro ſuprà inſcriptæ: quoniã dicta e l ſuperficies cõtinetur à latere cylindri, & à linea quæ æqualis eſt poſita perimetro figuræ dicto circulo a inſcriptæ, quæ eſt baſis figuræ rectilineæ quæ cylindro fuit inſcripta. Quare etiam l r f triangulus, eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ cylindro inſcriptæ. Et quoniam ſimiles ſunt rectilineæ figuræ in circulo a b inſcriptæ, proportionem inter ſe eandẽ habebunt, quam habent ſuæ inter ſe diametri in potentia: trianguli quoqꝫ k t d & f r l inter ſe habẽt proportionem, quam habẽt dictorũ circulorum ſemidiametri in potentia. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea ſuperficies circulo a inſcripta, ad rectilineam circulo b inſcriptam, quam habet triangulus k t d ad triãgulum l f r. Rectilinea uero ſuperficies circulo a inſcripta, minor eſt k d t triangulo. quare & eandem minorem eſſe oportet ſuperficie figuræ rectilineæ cylindro inſcriptæ: quod ſanè eſſe non poteſt. quoniam minorem habet proportionem figura rectilinea circulo b circumſcripta, ad figuram ſibi ſimilem eidem b inſcriptam, quã circulus b ad ſuperficiem cylindri: & permutatim. Maior autem eſt figura rectilinea circulo b circumſcripta, quàm ipſe b circulus. maior igitur eſt figura rectilinea circulo b inſcripta, quàm ſit cylindri ſuperficies: quare et quàm ſit ſuperficies figuræ rectilineæ cylindro inſcriptæ. non erit igitur maior circulus b ſuperficie cylindri. Et demonſtratum eſt quod minor eſſe nõ poteſt. igitur neceſſe eſt eidem eſſe æqualem.

CViuslibet coni æquicruris ſuperficies excepta baſe æqualis eſt circulo, cuius 14
ſemidiameter media eſt ſecundum proportionem inter latus coni & ſemidiametrum

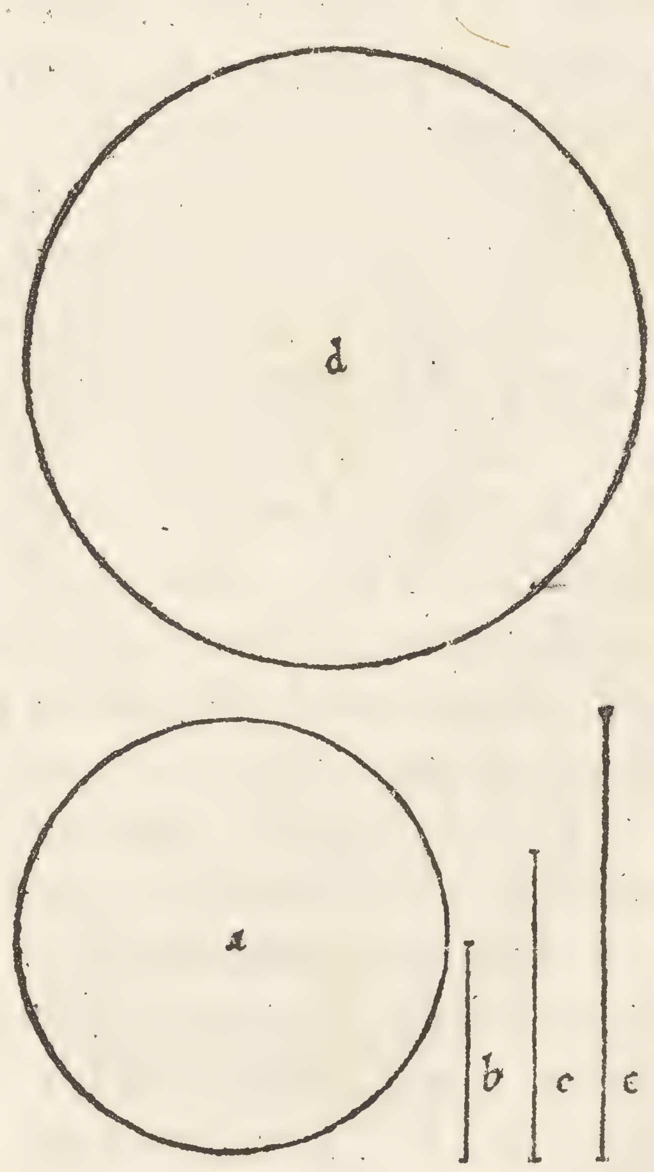
metrum circuli,qui quidem circulus dicti coni baſis exiſtat. Eſto conus æquicru ris, cuius baſis ſit circulus a, eius circuli ſemidiameter ſit c: lateri uero coni eſto d æqualis. media autem inter d & c, ſecundum proportionem eſto e. ponat̃ deinde b circulus, cuius ſemidiameter ſit æqualis e lineæ. Aſſero igitur, b circulum æquū eſſe ſuperficiei dicti coni, excepta baſe. Et ſi non concedatur æqualis ei, eſto aut maior ea, aut minor dicetur. Primum igitur ponatur minor, ſi fieri poteſt. habebimus itaq; duas magnitudines inæquales, ſuperficiem uidelicet coni, & circulum b. & coni ſuperficies ponatur maior. Poteſt igitur intra circulū b, figura una polygonia inſcribi, & æquilatera: & altera eidem circumſcribi ſimilis inſcriptæ, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio, quàm ſuperficiei coni ad b circulū. Intelligatur itaq; ſic factum eſſe. deinde circa circulum a, figura polygonia circūſcribatur ſimilis ei quæ b circulo intelligitur circumſcripta: & ab ea quæ circulo a circumſcripta eſt erigatur pyramis ad uerticem coni dicti, quæ eūdem uerticem cum cono habebit. Quoniam igitur figuræ polygoniæ circulis a & b circumſcriptæ ſimiles ſunt effectæ, eandem inter ſe habebūt proportionem, quam habent ſemidiametri dictorum circulorum in potentia. Quam uero habet ſemidiameter c ad ſemidiametrum e, eandem habet c ad ipſum d in longitudine: & quam habet c ad d in longitudine, eandem habet figura polygonia circulo a circumſcripta, ad ſuperficiem pyramidis circa conum erectæ. nã c æqualis eſt perpendiculari, quæ à centro a circuli ducitur ad unum latus figuræ polygoniæ, linea uero d lateri coni eſt æqualis. Cõmunis uero eſt altitudo, linea æqualis perimetro dictæ polygoniæ figuræ. & ſuperficies pyramidis, excepta baſe, æquatur dimidio ſuperficiei quæ producitur ex d latere coni in lineam æquam perimetro dictæ figuræ polygoniæ. & ſuperficies eiuſdem figuræ polygoniæ æquat̃ dimidio ſuperficiei, quæ producitur ex c linea in eandem lineam dicto perimetro æqualem. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea figura circulo a circūſcripta, ad rectilineam figuram circulo b circumſcriptam, quam habet eadem ſuperficies ad ſuperficiem pyramidis cono circumſcriptæ. atque idcirco ſuperficies pyramidis dictæ, æqualis erit figuræ rectilineæ circulo b circūſcriptæ. At uero quoniam dicta figura circulo b circūſcripta, ad eã ſibi ſimilem quæ ipſi b fuit inſcripta minorem habet proportionẽ quàm ſuperficies coni ad circulū b, ſequitur ut ſuperficies pyramidis circa conum aptatæ, ad figuram rectilineam circulo b inſcriptam minorem habeat proportionem, quàm ſuperficies coni ad circulum b: quod quidem eſſe non poteſt. nam ſuperficies pyramidis oſtenſa eſt maior eſſe ſuperficie coni. Figura uero rectilinea circulo b inſcripta, ipſo b minor exiſtit. non eſt igitur b circulus minor ſuperficie coni. Dico præterea, quod neq; maior eſſe poteſt. Quod ſi poteſt, eſto maior. & rurſus intelligatur b circulo figura una pluriū angulorum inſcripta, & altera illi ſimilis circumſcripta, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor proportio habeatur, quàm b circuli ad ſuperficiem coni. & ipſi circulo a intelligatur inſcriptam eſſe figuram multorū angulorum, ſimilem illi quæ b circulo fuit inſcripta. & ab hac figura erigatur pyramis intra conum inſcripta, quæ eundem uerticem cum ipſo cono habeat. Quoniam igitur figuræ polygoniæ ipſis a & b circulis inſcriptæ poſitæ fuerunt ſimiles, eandem inter ſe proportionem retinebunt,



quam

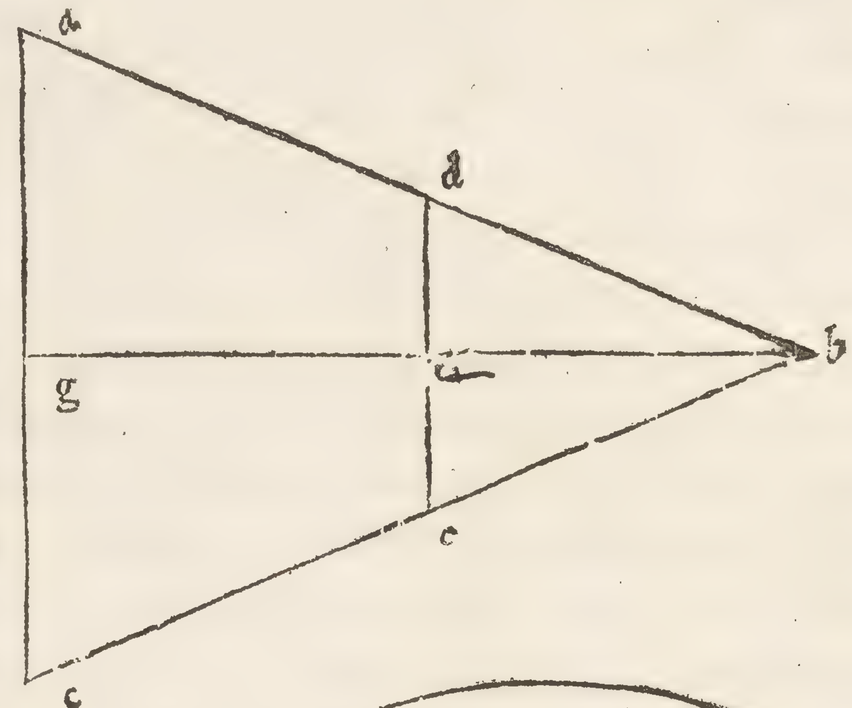
quam habeat dictorum circulorum ſemidiametri inter ſe potentia. Eandem igitur habet figura polygonia, ad figuram polygoniam proportionem, quam habet c ad lineam d, in longitudine. c autem ad ipſam d maiorem habet proportionē, quàm figura polygonia ipſi a circulo inſcripta, ad ſuperficiem pyramidis cono inſcriptæ. nam ſemidiameter a circuli ad latus coni maiorē proportionem habet, quàm perpendicularis, quæ à centro ad unum ex lateribus figuræ polygoniæ ducitur, habeat ad perpendicularem ductam à uertice coni ad idem latus. Quare maiorem proportionem habet figura polygonia circulo a inſcripta, ad poligoniam figuram b circulo inſcriptam, quàm ipſa eadem figura polygonia habeat ad ſuperficiem pyramidis. Maior igitur eſt pyramidis ſuperficies, quàm figura polygonia circulo b inſcripta. Figura autem polygonia circulo b circumſcripta, minorem habet proportionem ad figuram eidem inſcriptam, quàm b circulus ad ſuperficiē coni. Multo igitur magis figura polygonia circulo b circumſcripta, ad ſuperficiem pyramidis cono inſcriptæ minorē proportionem habebit, quàm ipſe b circulus ad ſuperficiem coni: quod eſſe non poteſt. nam figura polygonia b circulo circumſcripta, maior eſt eo circulo: ſuperficies uero pyramidis cono inſcriptæ, minor eſt ſuperficie coni. Oſtenſum itaq; eſt, quod b circulus neq; coni ſuperficie maior, neque minor eſſe poteſt. relinquitur ergo, ut neceſſariò ſit ei æqualis.

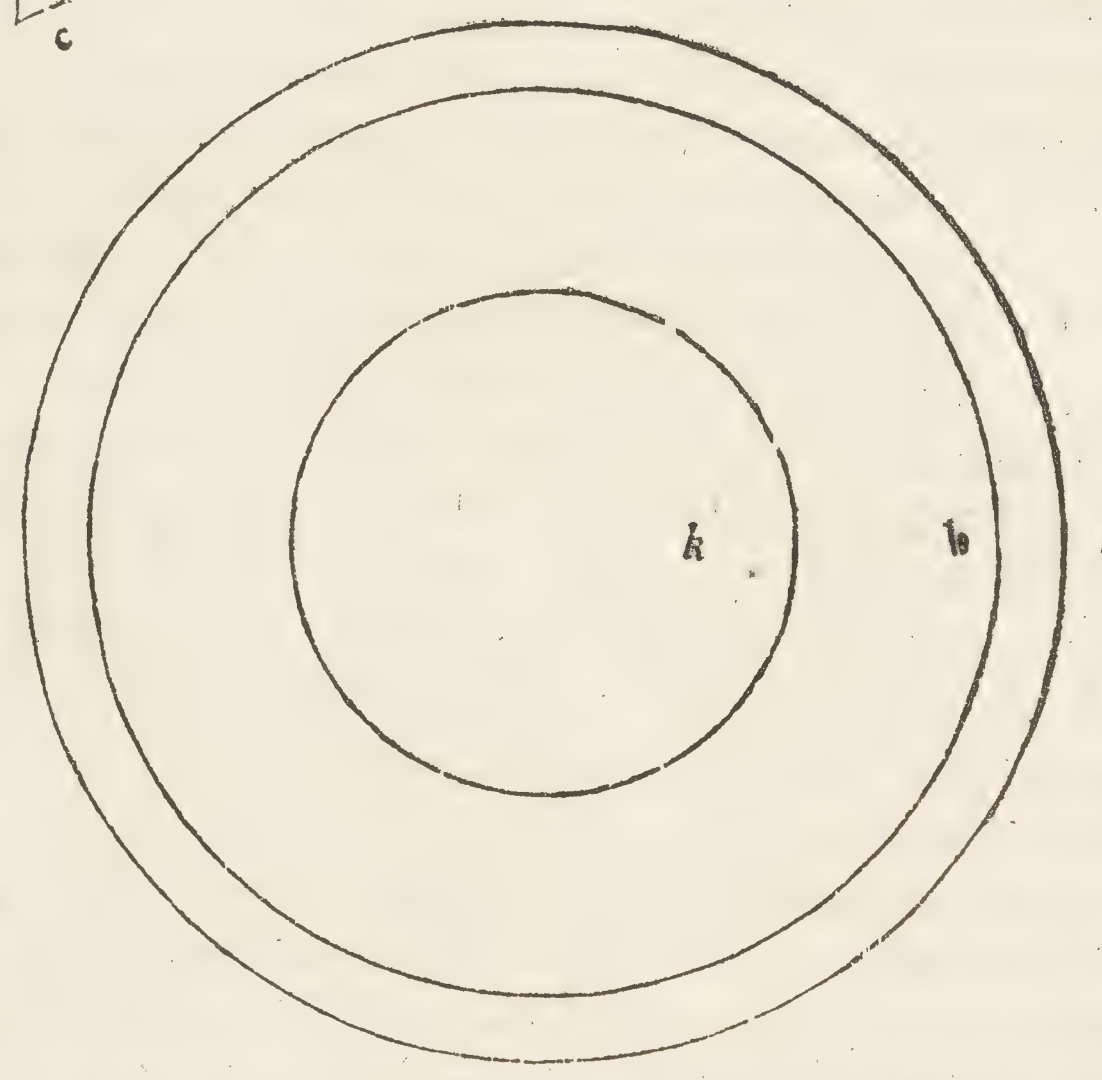
CVIuslibet coni æquicruris ſuperficies ad baſim ſuam, eandem habet proportionem, quàm latus ipſius coni habet ad lineam eductam à centro baſis coni ad eiuſdem circumferentiam. 15 Eſto conus æquicruris, cuius baſis ſit circulus a, eſto b linea æqualis ſemidiametro circuli a, & linea c ſit æqualis lateri coni. Demonſtrandū itaq; eſt, quod ſuperficies coni eandē habeat proportionem ad a circulum, quam c habet ad ipſam b. Sumatur enim media inter b & c, ſecundum proportionē, quæ ſit e. & ponatur circulus d, cuius ſemidiameter ſit æqualis e. circulus igitur d eſt æqualis ſuperficiei coni. Per præmiſſam demonſtratū etiam eſt, quod circulus d ad circulum a eandem habet proportionē, quam c ad b habet in longitudine. Vtraq; enim proportio eadē eſt proportioni e ad b, in potentia: quoniam circuli ad circulū ea eſt proportio, quę eſt quadrati diametri ad quadratum diametri: & ſimiliter ſe habent quadrata ſemidiametrorum. ſicut enim diametri totæ, ita earum dimidia. Semidiametris uero ſunt æquales lineæ b & e. Igitur manifeſtum eſt, ſuperficiem coni eandem habere proportionem ad a circulum, quam habet c linea ad b lineam, in longitudine.



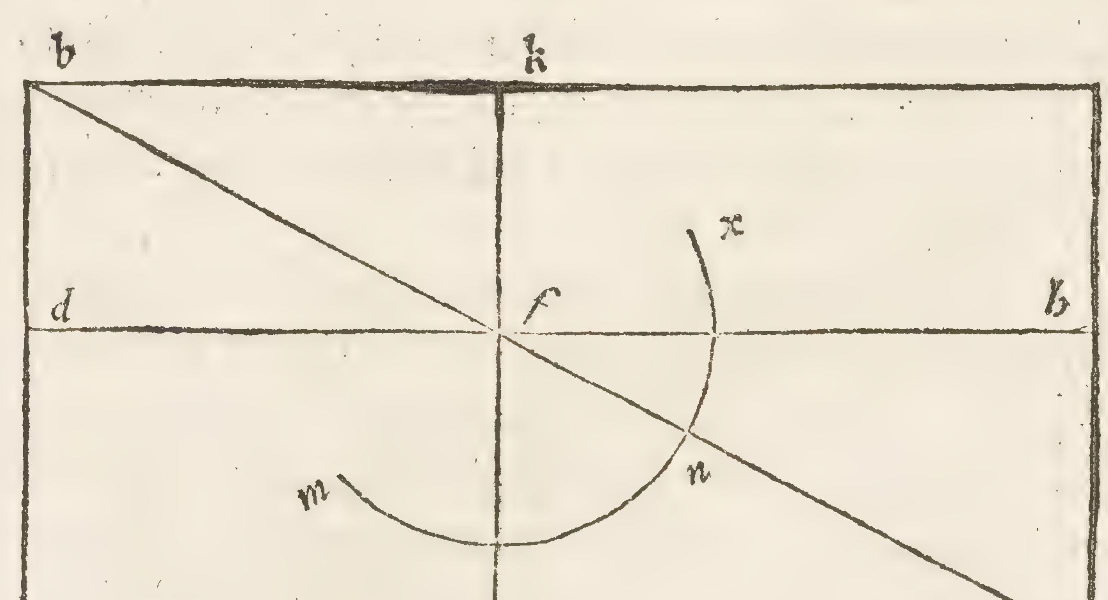
SI conus æquicruris ſecetur ſuperficie plana, quæ quidem ſuperficies baſi ipſius coni ſit æquediſtans: ea coni ſuperficies, quæ à ſecante & à baſe concluditur, ei circulo æqualis eſſe probatur, cuius circuli ſemidiameter ſit media ſecundū proportionem inter latus ſuperficiei conicæ, eius ſcilicet quæ inter baſim & ſecantem continetur, et inter lineam æqualem duabus ſemidiametris ſimul iunctis duorum circulorum, eorum ſcilicet qui in baſe & ſecante notatur. 16 Eſto conus cuius triangulus qui ab axe conſtituitur, ſit æqualis triangulo a b c, qui a b c à linea quadam ſecetur, quæ linea ſit baſi eius æquediſtans, & uocetur d e. axis uero coni ſit b g, & exponatur circulus aliquis, cuius ſemidiameter ſit media ſecundum proportionem inter a d latus, & inter compoſitam ex d f, & a g: ſemidiametri uero huius

circulus ſit h. Dico igit̃, quod circulus h ęqualis eſt ei ſuperficiei coni quæ inter d e & a c compræhẽditur. Igitur ſtatuantur duo circuli k, l, & ſemidiameter circuli k tantũ poſſit quantum continetur ſub b d, d f. ſemidiameter uero circuli l tantum poſſit quã tum continet̃ ſub b a, a g. Circulus igitur l æqualis ſuperficiei a b c coni, circulus uero k æquatur ſuperficiei a d e. Et quoniam id quod ex a b in a g fit, ęquatur his: ei quod fit ex b d in d f, & ei quod fit ex a d in utrãq; d f & a g: quoniam æquediſtantes ſunt d f, & a g. At uero quod ex a b in a g producitur, æquatur quadrato ſemidiametri circuli l. et quod ex b d in d f naſcitur, ęquatur quadrato ſemidiametri circuli k: quod ex d a in utranq; ſimul d f, a g æquatur quadrato ſemidiametri h. quadratũ igitur ſemidiametri circuli l, æquat̃ duob. quadratis ex ſemidiametro circuli k, & ex ſemidiametro circuli h productis ſimul iunctis. Verũ circulus l æquat̃ ſuperficiei coni a b c: circulus autem k æquatur ſuperficiei coni d b e. relinquitur ergo, ut ſuperficies compræhenſa inter ſecantem d e, & baſem a c, ſit æqualis circulo h. nam circuli quicunq; ſic ſe habent ad inuicem comparati, ſicut quadrata ſuarum diametrorum.





Eſto figura rectilinea quadrilatera rectangula b a g, cuius diameter ſit b g, diuidatur b a latus utcunque in puncto d, à quo ducatur æquediſtans a g, quæ ſit d h, ſecans diametrum b g in puncto f, à quo puncto ducat̃ æquediſtãs lateri b a quæ ſit k l. Dico quod id quod fit ex b a in a g, æquatur ei quod fit ex b d in d f, & ex d a in utrãq; ſimul d f, a g. quoniã igit̃ id quod fit ex b a in a g totã, eſt b g ſuperficies: quod aũt fit ex b d in d f, eſt b f: & quod ex d a, in utramq; ſimul d f, a g, eſt gnomõ m n x. Quod enim ex d a in a g, æquatur k g, quia ſupplementũ k h æquatur ſupplemento d l. quod fit ex d a in d f, æquatur d l. Tota igitur ſuperficies b g, quæ fit ex b a in a g. æquat̃ ei quod



ei quod fit ex b d in d f, & gnomoni n m x, qui æquatur ei quod fit ex d a in utrã-que ſimul a g, d f.

Coni qui altitudines habuerint æquales, ſuis baſibus ſunt proportionales. qui uero baſes æquas habuerint, ſuis altitudinibus proportionales erunt.

Si cylindrus plana ſuperficie ſecetur, quæ æquediſtet baſi ſuæ, erit totius ad quãcunq; partem ſuam, uel etiam partis ad partem, ſicut axis ad axem proportio.

Coni in eiſdem baſibus cum cylindris conſtituti, eadem proportione qua cy-lindri referuntur.

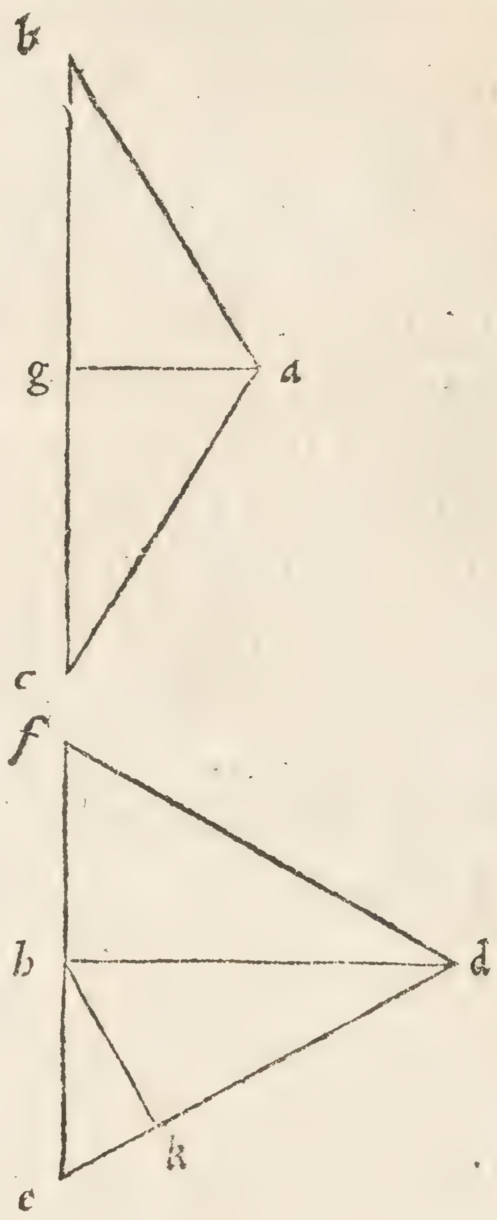
Altitudines conorum æqualiũ, mutuam ſuis baſibus proportionẽ ſequuntur.

Coni quorum altitudines mutuam ſuis baſibus proportionem ſequũtur, ſunt inter ſe æquales.

Coni, quorum diametri baſium eãdem cum ſuis axibus proportionem habue-rint, ſeruant inter ſe proportionem, quæ inter diametros ſuarum baſium habetur triplicatam. Hęc autem omnia à ſuperioribus ſunt demonſtrata.

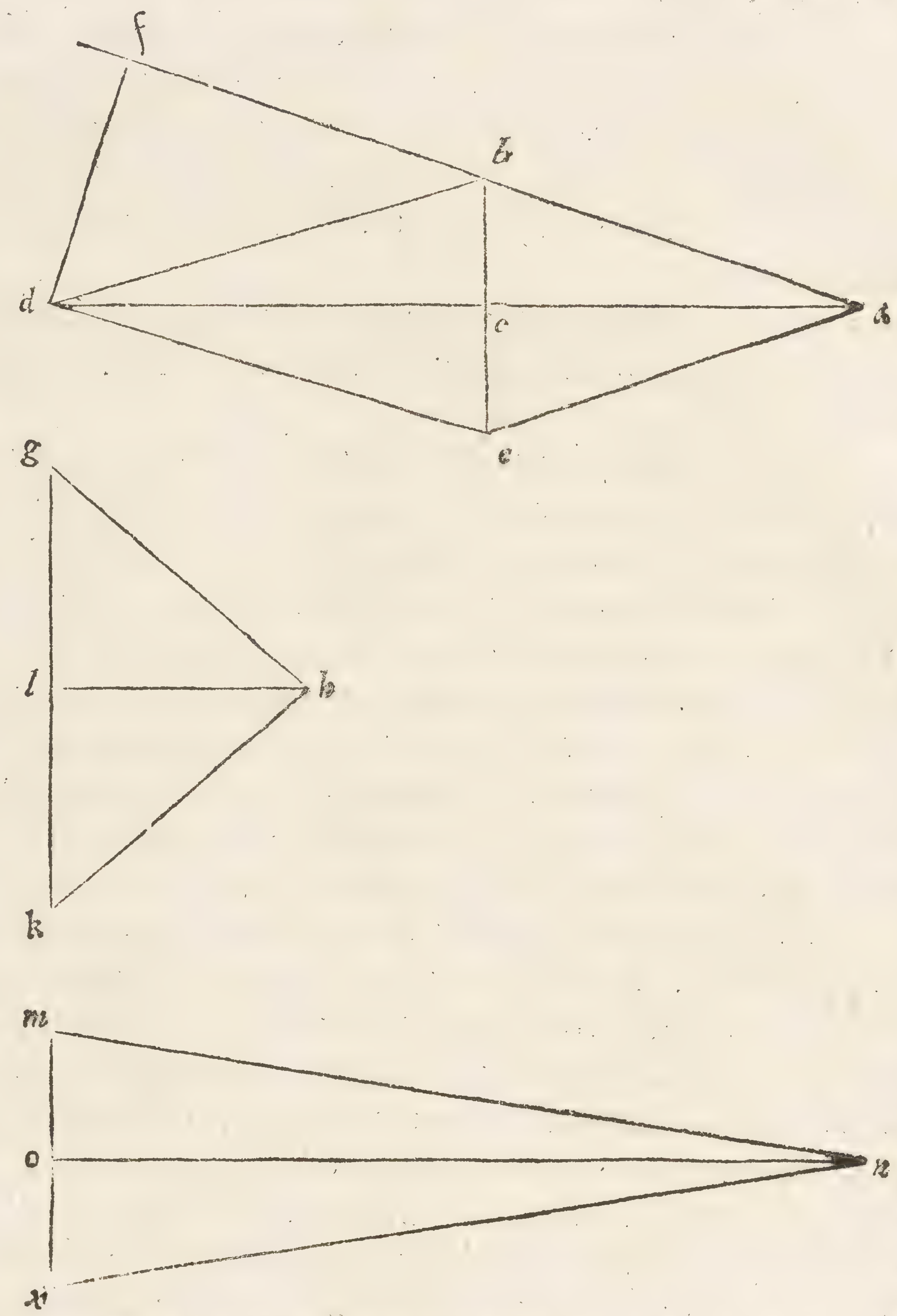
SI fuerint duo coni æquicrures, fueritq; alterius ſuperficies baſi alterius æ- 17
qualis, fuerit item linea recta quæ à centro dictæ baſis ducta ſit ad latus coni perpẽdiculariter æqualis altitudini alterius coni, illos conos æquos eſſe neceſſe eſt.

Eſto duo coni æquicrures a b c, d e f. & ponatur baſis ipſius a b c, æqualis ſuperficiei d e f. altitudo uero a g eſto æqualis lineæ quæ à centro baſis ducta ſit perpẽ-dic ulariter ad unum latus coni d e f, quæ linea uocet h k. centrum à quo ducitur ſit h. latus uero ad quod ducta eſt, d k e. Dico igitur hos duos conos æquales eſ ſe. Quoniã igitur baſis coni a b c, æquatur ſuperficiei coni d e f, æqualia uero ad unum & idem relata ean-dem ad illud proportionem retinent: fiet ut ſicut baſis b a c, ad baſim d e f: ita ſuperficies d e f, ad baſim d e f. At uero ſicut ſuperficies ad propriã baſim, ſic linea d h ad lineã h k. Demonſtratũ namq; eſt hoc, quod cuiuſ libet coni æquicruris ſuperficies ad ſuam baſim habet eandem proportionem, quam latus ipſius coni ad ſe-midiametrũ baſis, ſicut uidelicet d e ad e h: ſed ſicut d e ad e h, ita d h ad h k. ſunt enim trianguli æquiãguli. eſt autem h k æqualis a g. igitur ſicut baſis a b c coni ad baſim d e f coni, ita altitudo d e f ad altitudinem a b c. Horum igitur conorum altitudines mutuam ſuis ba-ſibus habent proportionem. Ex quo ſequitur, eos eſſe æquales.

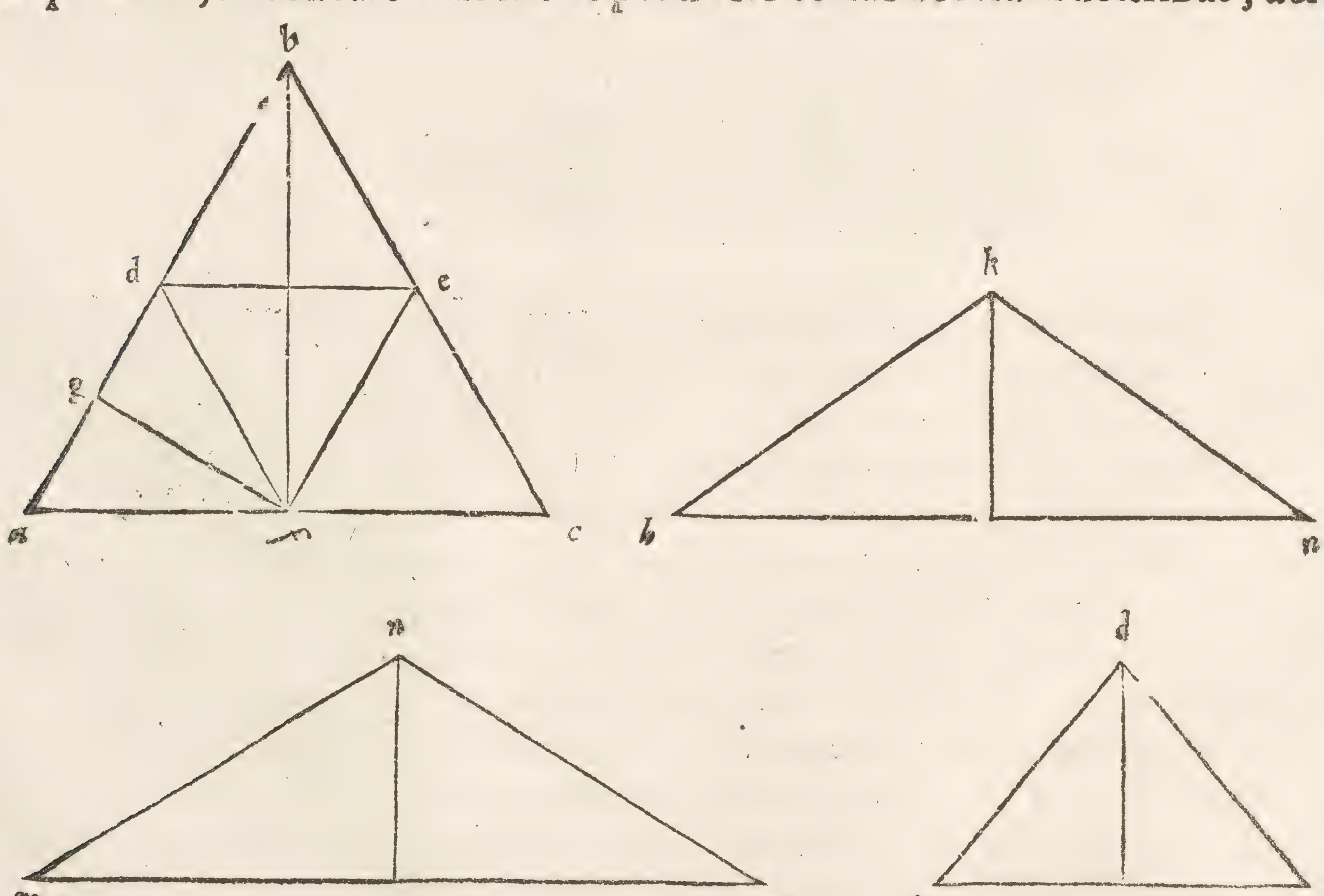


CVilibet rhõbo ex conis æquicruribus compoſito, æquatur conus ille qui ba- 18
ſem æquam habeat ſuperficiei alterius conorum, qui rhõbum comprendũt: altitudinem uero æqualem lineæ, quæ quidem linea ducta ſit ab alterius coni uer-tice ad unumquoduis latus alterius perpendiculariter. Eſto rhõbus ex æquicruri-bus conis collectus a b c d, cuius baſis ſit circulus circa diametrũ b c deſcriptus, alti tudo uero a d. Exponatur etiam alter conus g h k, qui baſim habeat ſuperficiei a b c coni æqualem, altitudinem uero æquam lineæ quæ ab ipſo d puncto ducta ſit ad latus a b perpẽdiculariter, quæ ſit d f. altitudo uero g h k coni, ſit h l. & eſto h l æqualis d f. Dico tunc quod etiam conus rhõbo æquatur. Exponatur & alter co-nus m n x, baſim habens æqualem baſi a b c coni, altitudinem uero ipſi a d: ſitq; eius altitudo n o. Quoniam igitur n o ipſi a d æquatur, erit idcirco ſicut n o ad ip-ſum d e, ita a d ad d e. At uero ſicut a d ad d e, ſic a b c d rhombus ad b c d conum. Sicut autem n o ad d e, ita m n x conus ad b c d conum; propterea quod eorum

baſes ſunt æquales. Ergo ſicut m n x conus ad b c d conum, ſic a b c d rhombus ad b c d conum. Conus igit̃ m n x eſt æqualis rhombo a b c d. item quia ſuperficies a b c æquatur baſi g h k. ſicut ergo ſuperficies a b c ad propriã baſim, ſic baſis g h k ad baſim m n x. At uero ſicut ſuperficies a b c ad propriam baſim, ſic a b ad b e, quod idẽ eſt a d ad d f. nam trianguli ſunt ſimiles. quare ſicut baſis ipſius g h k ad baſim n m x, ſic a d ad d f. Eſt aũt a d æqualis n o per ſuppoſitum: d f uero æqualis h l. quare ſicut baſis g h k ad baſim m n x, ita n o altitudo ad h l. Conorum igitur g h k, & m n x baſes altitudinibus mutuam habent proportionem. Sunt igitur hi coni æquales. Oſtẽſum eſt autem, m n x eſſe rhombo a b c d æqualem. quare & g h k conum, dicto a b c d rhombo æqualem eſſe, neceſſariò colligitur.



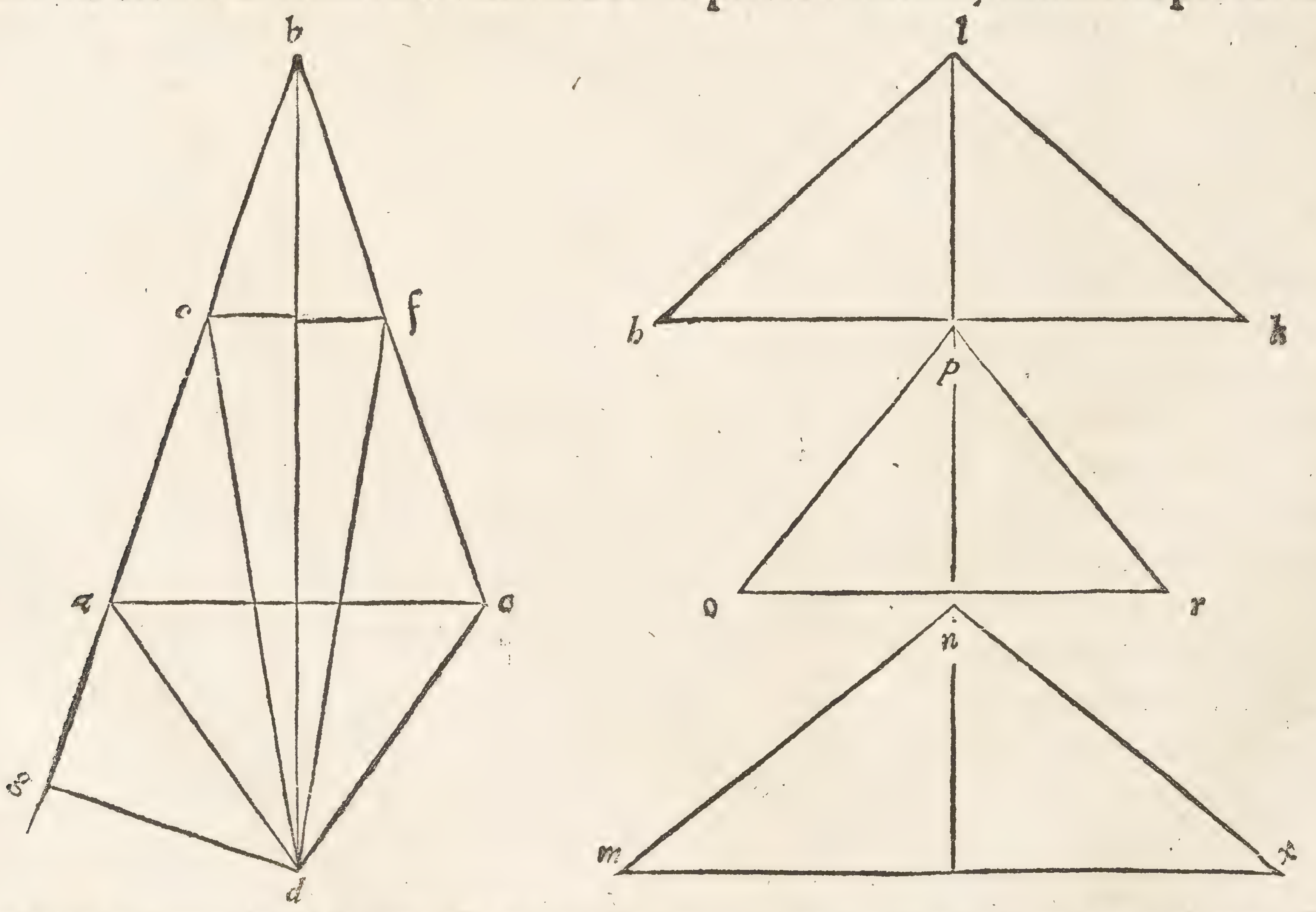
19 SI conus æquicruris ſuperficie plana ſecetur, quæ quidem ſuperficies baſi coni æquediſtet, & à circulo in ſectione producto conus deorſum deſcribat̃, uerti-



cem

cem defigens in centrum baſis prioris coni, rhombũ cum coni parte ſuperiori efficiet, qui quidem rhõbus ſi à toto priore cono auferatur, ei quod relinquitur conus ille probatur æqualis: cuius quidem coni baſis ſit æqualis ei ſuperficiei coni qui ſectus ponitur, quæ ſuperficies intra ſecantem & baſem concluditur. altitudo prætерea prædicti coni ſit æqualis lineæ à centro baſis primi coni ductæ perpendiculariter, ad unumquodvis latus primi coni. Eſto conus æquicruris a b c, qui ſecetur à plana ſuperficie quæ baſi ipſius æquediſtet. Eſto hæc ſectio d e, centrum uero baſis f. & à circulo, cuius diameter eſt d e, deſcribatur conus, cuius uertex ſit f. & ſic habemus rhombũ ex duobus conis æquicruribus conſtitutum, qui eſt b d f e. Exponatur etiam quidam conus k h l, cuius baſis eſto æqualis ſuperficiei, quæ inter a c, d e continetur: altitudo uero æqualis lineæ quæ à centro f ducta ſit perpendiculariter ad latus a b, quæ ducta ſit f g. Dico itaq;, quod ſi à cono a b c intelligatur ablatus rhombus b d f e, ei quod relinquetur æqualis erit conus h k l. Exponãtur itẽ duo coni m n x, o p r, ita ut baſis ipſius m n x ſuperficiei coni a b c ſit æqualis, & altitudo æqualis f g. Propter hoc itaq; m n x conus eſt æqualis a b c cono. Nã ſi duo coni æquicrures ita ſtatuantur, ut ſuperficies alterius coni ſit æqualis baſi alterius: præterea linea à centro ducta perpendiculariter ad unum latus alterius, ſit æqualis altitudini alterius, conos illos æquos eſſe demonſtratum eſt. Propter id uero quod coni o p r baſis eſt poſita æqualis ſuperficiei d e b coni, & altitudo ipſi f g, conus o p r æquatur rhombo b d f e. hoc enim ſuprà demonſtratum fuit. Quoniã autem ſuperficies coni a b c componitur ex b d e, & ea quæ inter d e & a c continetur: præterea ſuperficies a b c coni: æquatur baſi m n x coni: ſuperficies uerò d b e coni æquatur baſi o p r coni, quæ uero media eſt inter d e & a c æquatur baſi h k l: ſequitur, ut baſis m n x ſit æqualis baſibus conorum h k l, o p r. Cum que ſint hi coni altitudine æqua erecti, erit conus m n x, æqualis conis ſimul h k l, o p r. Verũ conus m n x, æqualis eſt cono a b c: conus uero o p r, æqualis rhombo b d e f. Reliquum eſt igitur, ut h k l conus, æqualis ſit ei quod ſublato rhombo relinquitur.

SI ex his conis æquicruribus, quib. rhombus compoſitus ſit, alter plana ſuperficie ſecetur, quæ ſit baſi æquediſtans: & à producto in ſectione circulo conus erigatur ad uerticẽ alterius coni: deinde à toto priore rhombo, rhõbus nuper factus 20

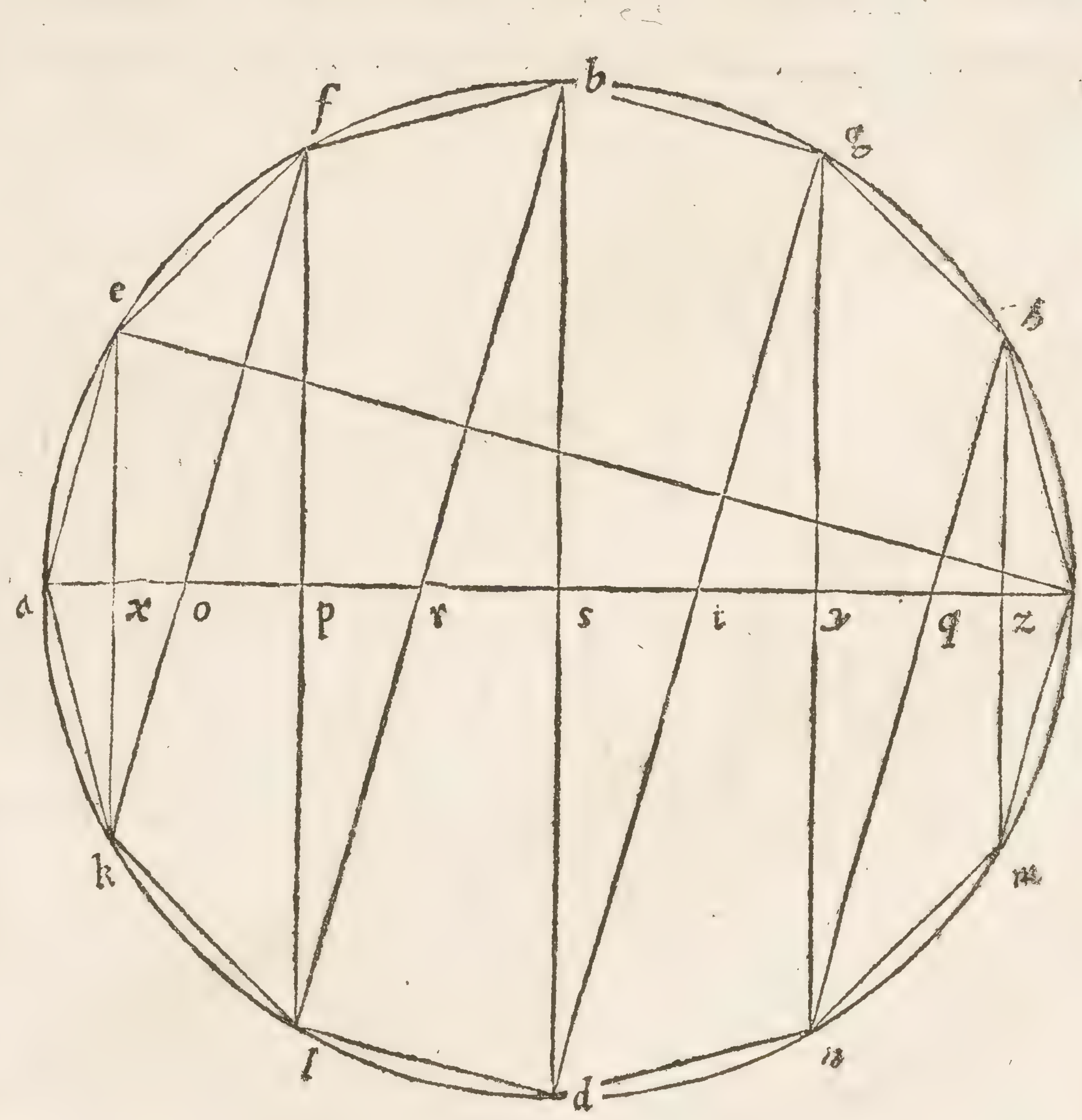


auferatur: ei quod reſiduum eſt æquatur conus, qui baſim habeat æqualem ei ſuperficiei coni, quæ inter ſecantem & baſem continetur: altitudinem uero æqualẽ

 lineæ,

lineæ, quæ à uertice alterius coni, ad unum latus alterius coni perpendiculariter ducta ſit. Eſto rhombus, ex conis æquicruribus compoſitus a b c d, & alter illorum conorum ſecetur plana ſuperficie, quæ baſi æquediſtans ſit, & fiat ſectio e f. à circulo uero cuius diameter eſt e f, erigatur conus habẽs uerticem d punctũ, iãqꝫ factus eſt rhombus e b d f, qui intelligatur ablatus à toto rhombo. Exponatur autem quidem conus h k l, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei coni, quæ à ſecante & baſe concluditur a c e f: altitudinem uero ei lineæ quæ à puncto d ducitur, perpendiculariter ad latus b a. Dico itaqꝫ, quod h k l conus æqualis eſt dicto reſiduo. Expoſiti autem ſint duo coni iſti, uidelicet m n x, o p r. & baſis m n x coni æqualis ponatur ſuperficiei a b c: altitudo uero æqualis d g. Propter illa erga quæ demonſtrata ſunt, conus m n x æquatur rhombo a b c d. coni uero o p r baſis, cũ ponatur æqualis ſuperficiei e b f coni, & altitudo æqualis lineæ d g: ſimiliter o p r conus æquatur rhombo e b d f. Quoniam igitur ſuperficies a b c coni, ſimiliter componatur ex ſuperficie coni e b f, & ex ea quæ media eſt inter e f, a c. Inſuper coni a b c ſuperficies æquatur baſi m n x, ſuperficies uero e b f æquatur baſi coni p o r. quæ autem media eſt inter e f, a c, æquatur baſi h k l. Baſis igitur m n x, æquatur baſibus conorum o p r, h k l. & ſunt hi coni ſub eadem altitudine. quare m n x conus æquabitur h k l, o p r conis. Verũ conus m n x æquatur rhombo a b c d, conus aũt o p r rhombo e b d f eſt æqualis. reliquus igit̃ conus h k l ęqualis reſiduo erit neceſſariò.

21 SI intra circulum quemcunqꝫ inſcribatur figura rectilinea, quæ multis angulis conſtet, quæqꝫ latera inter ſe æqualia & numero paria habeat, inſuper ducantur lineæ rectæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ latera ipſius coniũgentes, ſitqꝫ ut hæ ductæ ſint æquediſtantes uni ex earum numero: illi ſcilicet, quæ duobus dictæ figuræ lateribus ſubtenditur: tunc iſtæ quæ latera dicta coniungunt, omnes ad diametrum circuli eandem habent proportionem, quam habet illa linea recta ad latus dictæ figuræ, quæ quidem linea ipſi diametro & lateri dictæ figuræ quod diametro ſit applicatum ſubtenditur. Eſto circulus a b c d, & ſibi inſcribatur figura rectilinea multis angulis conſtans, quæ ſit a e f b g h c m n d l k: & iungantur e k, f l, b d, g n, h m, ductis lineis e k, f l, &c. manifeſtum eſt, quod æquediſtantes ſunt illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ ſubtenſa eſt, quæ eſt uel e k, uel h m. Dico itaque, quod hæ omnes ad circuli diametrum quæ eſt a c, eãdem proportionẽ habent, quam habet linea ducta à pũcto c ad punctũ e, uidelicet linea c e ad lineã a e. ducantur itaque lineæ f k, l b, g d, h n. Igitur æquediſtans erit f k ipſi e a, deinde b l ipſi f k, etiã d g ipſi b l, demum h n ipſi d g, & m c ipſi h n. quare ſicut e x ad x a, ita k x ad x o. & ſicut k x ad x o, ita f p ad p o.

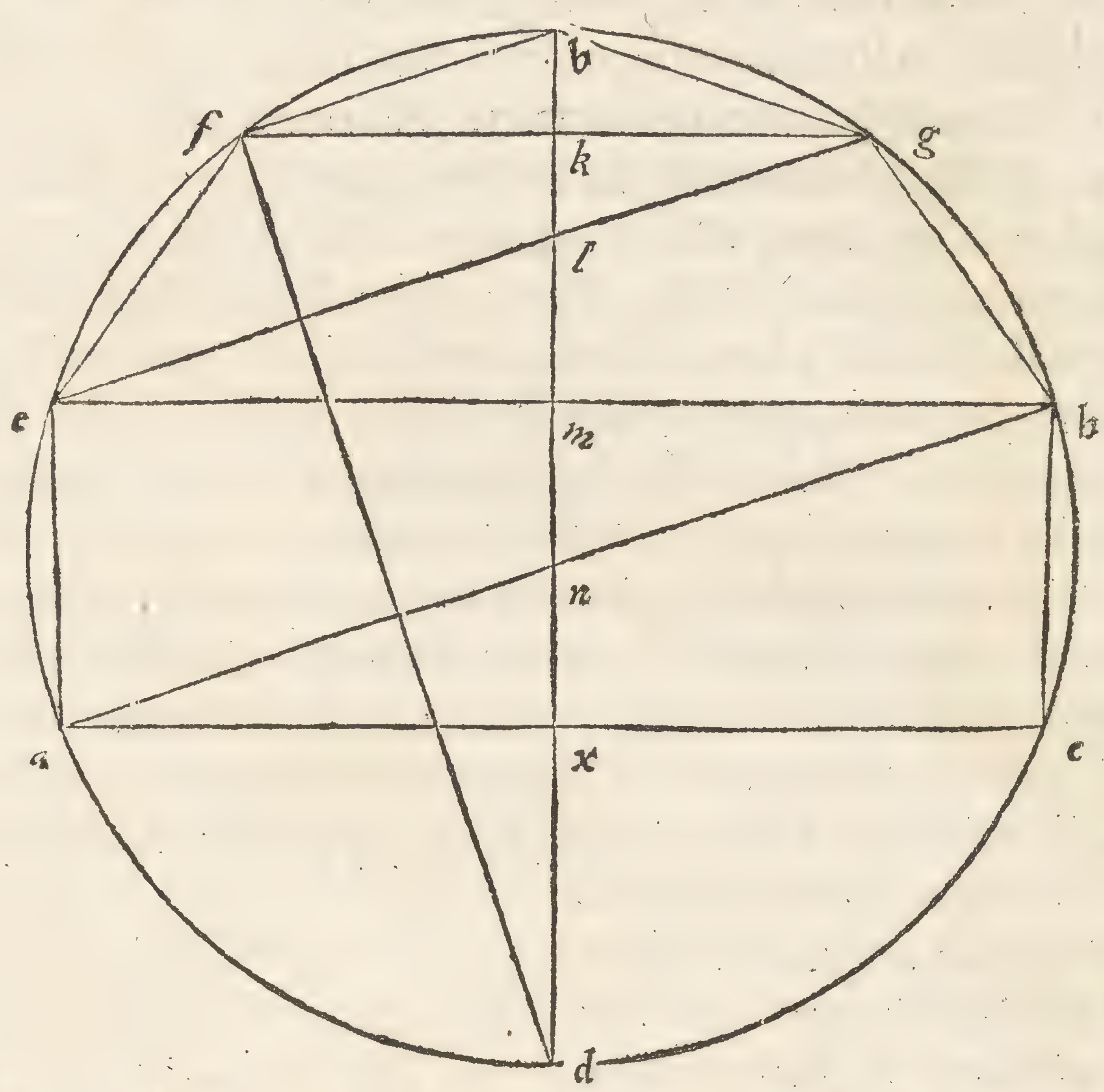


ſicut autem f p ad p o, ita l p ad p r. Deinde ſicut l p ad p r, ſic b s ad s r. & ſicut b s ad r s, ita d s ad s t. & ſicut d s ad s t, ita g y ad y t. & ſicut g y ad y t, ita n y ad y q. & ſicut

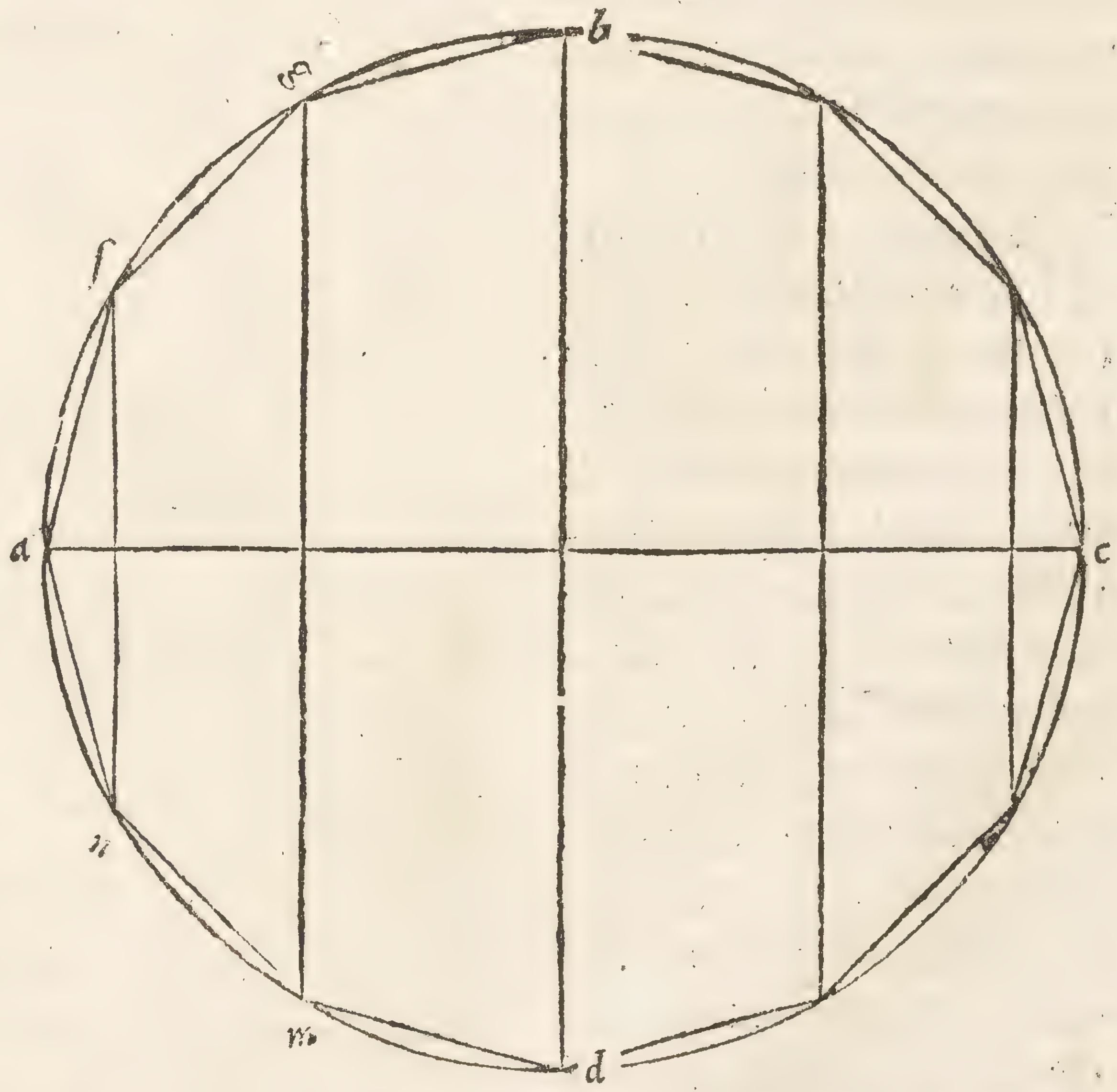
n y ad

n y ad y q, ita h z ad z q. & ſicut h z ad z q, ita m z ad z c. & demum ſicut una ad unam, ita omnes ſimul collectæ ad omnes ſimul collectas ſe habent. quare ſicut e x ad x a, ita e k, f l, b d, g n, h m ad ipſam a c diametrum. At uero ſicut e x ad x a, ita c e ad e a. unde ſicut c e ad e a, ita omnes e k, f l, b d, g n, h m ad a c diametrum.

SI in circuli cuiuſpiam portione figura multorum angulorum inſcribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta baſe inter ſe ęqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducant æquediſtantes baſi portionis, & quæ latera dictæ figurę coniungant: tunc hę omnes ductæ ſimul, cũ dimidio baſis portionis, habebũt ad altitudinem portionis eandem proportionẽ, quã habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipſi diametro applicatum ducta ſit. Intra circulum a b c, quædã linea recta ducatur, quæ ſit a c. & ſuper baſe a c inſcribatur in a b c circuli portione, multorum angulorum figura, æqualibus & numero paribus lateribus, excepta baſe, a c conſtãs. Dico igitur, quod ſicut f g, e h, a x ad b x, ita d f ad b f. Ducantur rurſus g e, a h lineæ, quæ quidem æquediſtantes erũt ipſi b f. atq; idcirco ſicut k f ad k b, ita g k ad k l, & ita e m ad l m, & m h ad m n, & x a ad x n, & omnes ſimul ad omnes, ut una ad unam. igitur ſicut f g, e h, a x ad b x, ita f k ad k b. At uero ſicut f k ad k b, ita d f ad f b. ſicut ergo d f ad f b, ita f g, e h, a x ad b x. 22

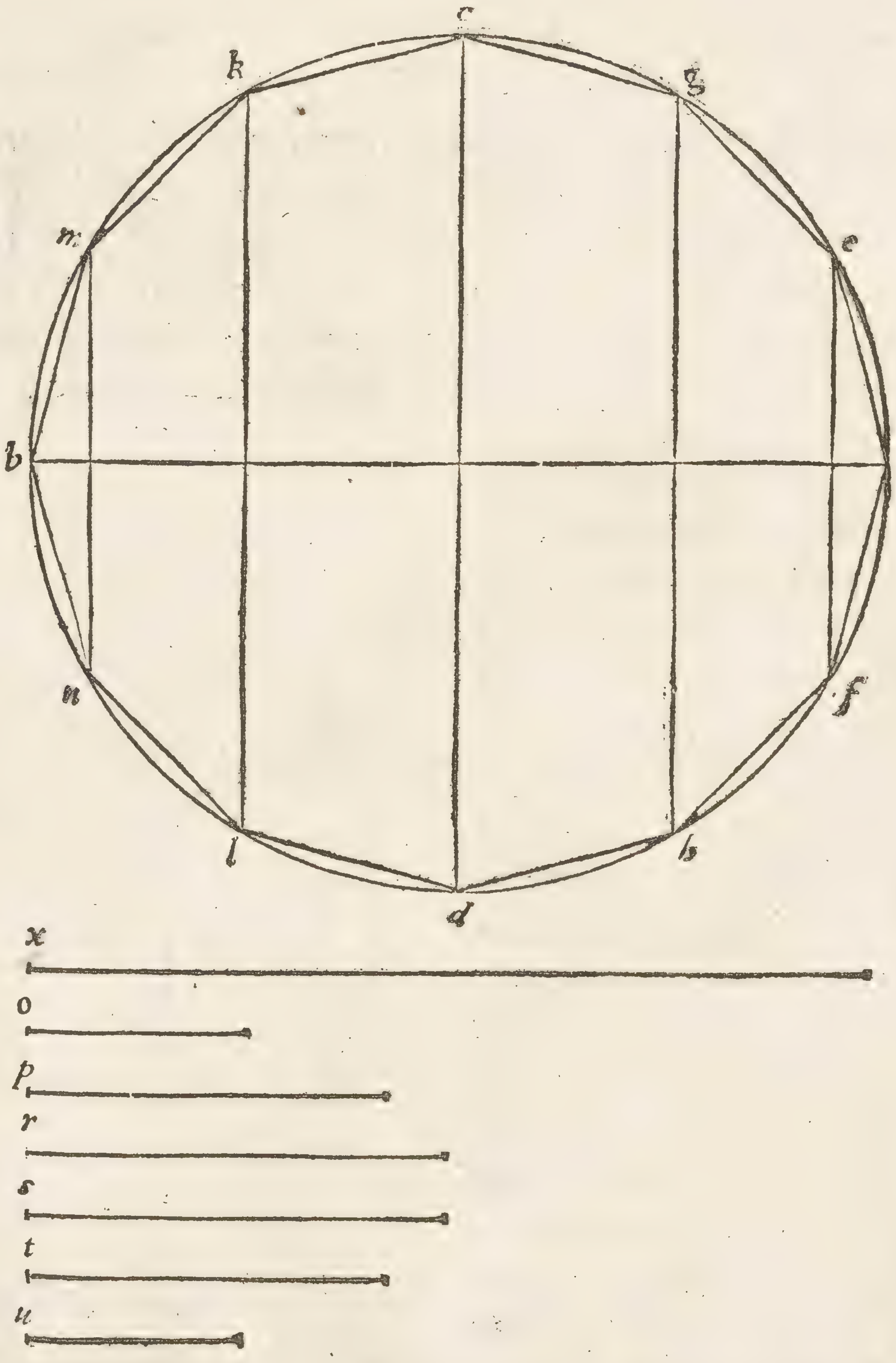


Eſto in quacunq; ſphæra maximus circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura rectilinea multorum angulorum & æqualium laterum: multitudo uero laterum eius à quaternario menſuretur, & ſint diametri circuli a c, b d. eſto item manente & quietante diametro a c, circa eam uoluatur circulus in quo figura dicta fuit inſcripta, ſcilicet a b c d: manifeſtum eſt, quod eius circumferentia ſecus ſphæræ ſuperficiem feretur. anguli uero inſcriptæ circulo figuræ, circulari circumferentia mouebũtur in ſuperficie ſphæræ; exceptis tamen illis, qui ad puncta a et c inſiſtũt, quotq;



ipſi

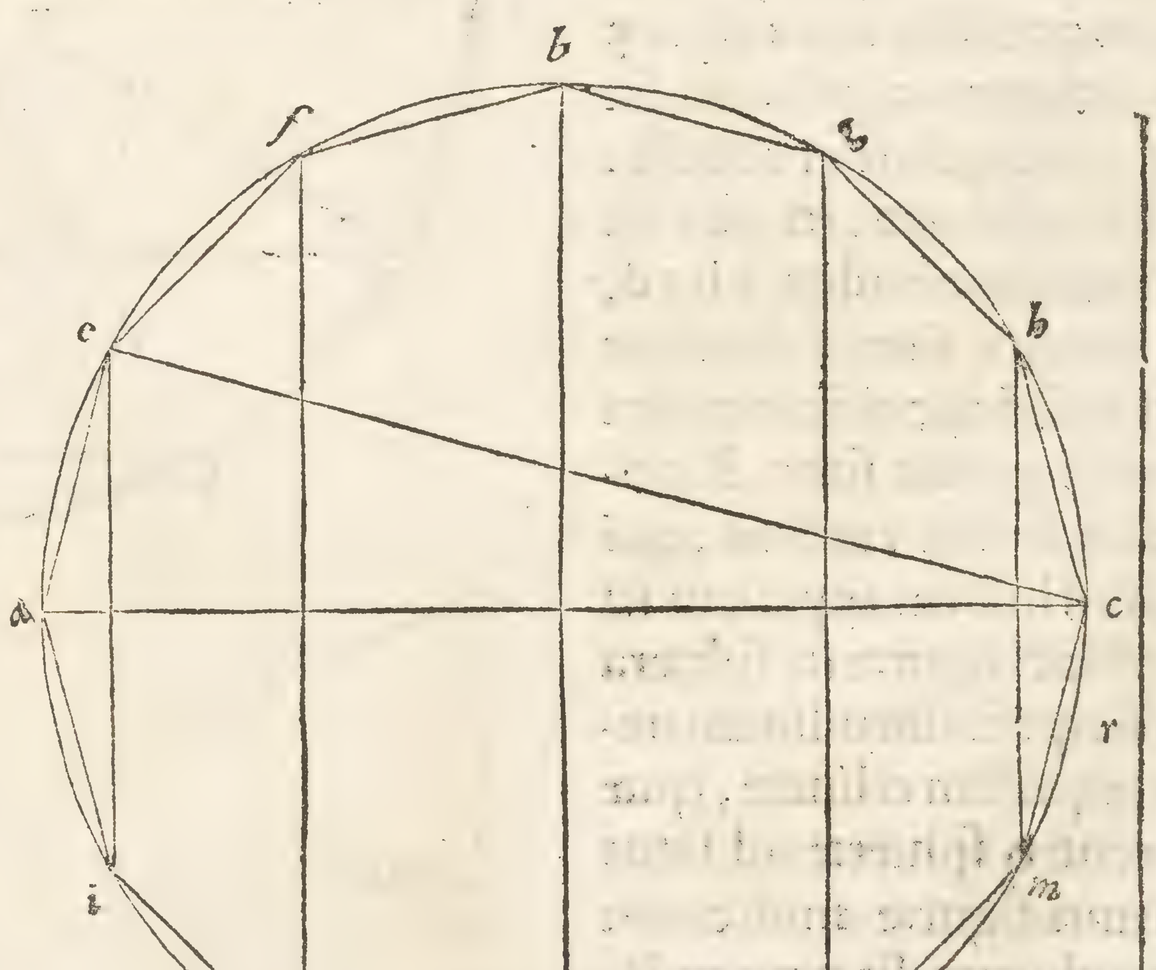
ipſi fuerint qui moti ſunt, totidem circulos intra ſphæram deſcribent qui erunt ſupra a b c d circulum erecti,& eorum diametri erunt lineæ illæ quæ figuræ inſcriptæ latera coniungebant: eruntq; omnes ipſi b d æquediſtantes. latera uero figuræ inſcriptæ eodem modo circumuoluta, quaſdam conicas ſuperficies intra ſphæram deſcribunt: ſed a f & a n conum perficient, cuius baſis erit circulus ille qui habet lineam f n diametrum, uerticem uero punctum a. Lineæ autem f g, m n ſecundum quandam ſuperficiem conicam ferentur, cuius baſis circulus eſt, qui habet diametrum lineam m g, uertex uero ad punctum illud, ad quod f g & m n lineæ concurrent, inter ſe ſi educantur, & cum linea a c: lineæ uero b g, m d ſecundum conicam ſuperficiem & ipſæ feretur, quæ habet baſim, circulum cuius diameter b d, qui circulus ſuper a b c d circulum eſt erectus. coni autem uertex ad punctum illud ad quod concurrent b g, d m inter ſe, & cum linea a c ſi educantur. Similiter quoq; accidit & in alia ſemicirculi parte: latera figuræ inſcriptæ ſecundum conicas ſuperficies ferentur, quæ conuerſo modo ſupra deſcriptis, in ſphæra figuras deſcriptas habebunt. His ita diſpoſitis, habemus intra ſphæram figuram corpoream deſcriptam, conicis ſuperficiebus contentam, cuius ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie eſſe probatur. nam ſi diuiſam ſphæram intelligamus à circulo b d plano, qui eſt erectus ſuper a b c d, ſuperficies unius hemiſphærij, & ſuperficies figuræ dictæ in ipſo hemiſphęrio inſcriptę, eoſdem terminos habent in eodem plano. nam utrarūq; ſuperficierum terminus eſt circuli circumferētia, cuius diameter eſt b d, qui eſt erectus ſuper a b c d circulum, & utrę q; ſunt in eādem partem eductæ & conuolutæ, & altera earum alterā cōplectitur ſuperficiē: hoc eſt ſphæræ ſuperficies ſuperficiem figuræ eiſdem terminis cum ea contentam. Similiter etiam in alio hemiſphærio figuræ ſuperficies, concluditur minor eſſe ſuperficie hemiſphærij: quare totam ſuperficiem figuræ dictæ in ſphæra deſcriptæ, minorem eſſe ſphæræ ſuperficie probatum eſt.



23 Figuræ in ſphæra inſcriptę ſuperficies, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter tantum poſſit, quantum eſt id quod continetur ſub uno latere dictæ figuræ, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus illis lineis ſimul iūctis, quæ lineæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ ita ſunt ductę, ut quęque duæ cum lateribus, quæ per ipſas iungūtur, quadrangularem figurā efficiāt; & ei quæ duob.

late-

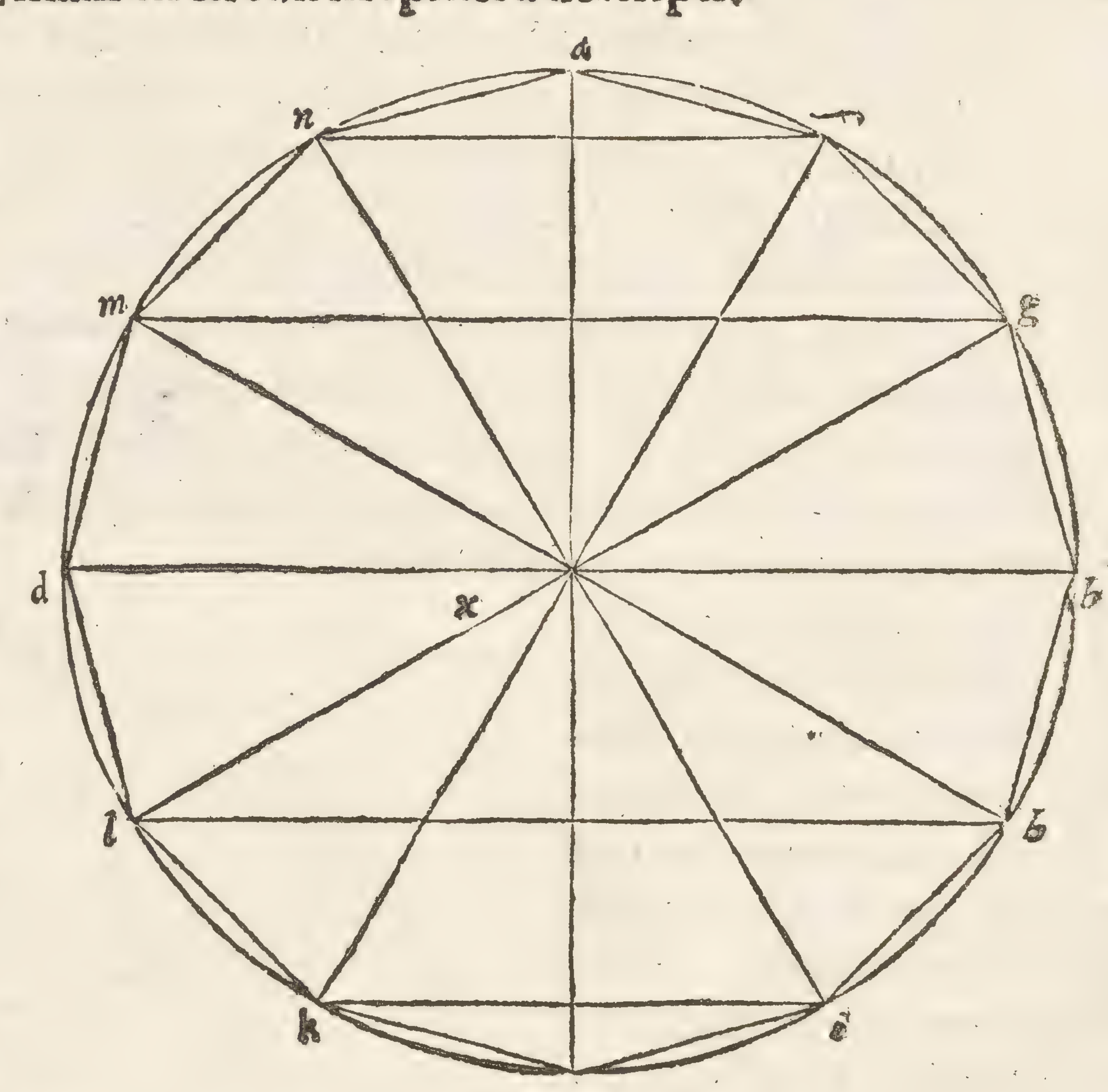
lateribus ſubtenditur, ſint æquediſtantes. Eſto in ſphæra maximus circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterum, cuius multitudo laterū numeretur à quaternario, & ab hac figura intelligatur figuram corpoream eſſe in ſphęra deſcriptā: & ducātur e f, g h, c d, k l, m n lineæ, quæ ſint æquediſtātes illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ ſubtenſa eſt. Exponatur item quidam circulus qui ſit x, cuius ſemidiametros tantū poſſit, quantū eſt quod continetur ſub a e latere dictæ figuræ, & ſub linea quæ ſit æqualis e f, g h, c d, k l, m n, lineis ſimul iunctis. Dico igitur, quod hic circulus x, æquatur ſuperficie figuræ in ſphæra deſcriptæ. Exponantur item circuli o p r s t u, & ipſius o ſemidiametros poſſit tantum quantum continetur ſub e a, & dimidio e f. & diameter p poſſit id quod continetur ſub e a, & dimidijs e f, g h. ſemidiametros uero ipſius r poſſit id quod continetur ſub e a, & dimidijs g h, c d. ſemidiametros ipſius s poſſit id quod ſub e a, & dimidijs c d, k l continetur. ſemidiametros ipſius t, poſſit id quod continetur ſub a e, & dimidijs k l, m n. ſemidiametros demum u, poſſit id quod continetur ſub a e, & dimidia m n. Ex his igitur quæ poſita ſunt, circulus o æquatur ſuperficiei a e f coni. circulus p æquatur ſuperficiei conicæ quæ inter e f & g h lineas comprenditur. circulus r æquatur ſuperficiei conicæ à lineis g h, c d comprenſæ. circulus s æquatur ſuperficiei conicæ à lineis c d, k l contentæ. præterea circulus t ſuperficiei conicæ, inter k l, m n concluſæ. demum circulus u ſuperficiei coni m b n, eſt æqualis. Hi igitur circuli omnes ęquales ſunt ſuperficiei figuræ, quæ ſphæræ inſcripta fuit. Et palàm eſt quòd ſemidiametri circulorum o p r s t u poſſunt id quod continetur ſub a e latere, & ſub linea dupla cōpoſitæ ex dimidijs e f, g h, c d, k l, m n, quæ eſt æqualis lineæ compoſitæ ex ipſis integris. quare ſemidiametri circulorum o p r s t u poſſunt id quod cōtinetur ſub a e, & omnibus e f, g h, c d, k l, m n ſimul iunctis. Verum & ſemidiametros circuli x poteſt idem quod continetur ſub a e, & ſub linea compoſita ex omnibus illis e f, g h, c d, k l, m n. quare ſemidiametros circuli x tantum ſola poteſt, quantum ſemidiametrorum ſimul o p r s t u circulorum quadrata componunt. Igitur circulus x, æquatur omnibus ſimul circulis o p r s t u. ipſos aūt circulos oſtenſum eſt æquales eſſe ſuperficiei dictæ figurę. ex quo ſequitur, ipſum x circulum ſuperficiei dictæ figuræ eſſe æqualem, ut propoſitum fuerat.

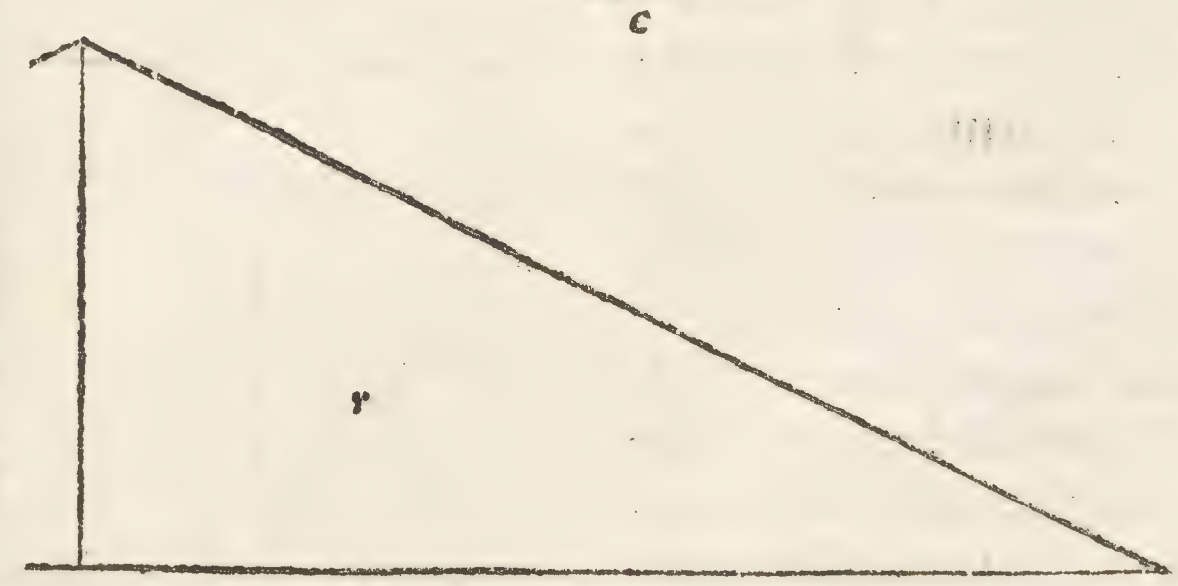


Figuræ in ſphæra inſcriptæ ſuperficies, ex ſuperficiebus conicis conſtituta, minor eſt ꝙ quadrupla, ad circulum maximū omniū qui in ſphæra eſſe poſſunt circulorū. 24 Eſto maximus in ſphæra circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura pariū angulorum & æqualium laterū, et eius latera menſurentur à quaternario, & ex huius circumuolutione intelligatur ſuperficies ex conicis ſuperficiebus conſtituta, in ſphera eſſe deſcripta. Dico igitur, quod iſtius figuræ ſuperficies minor eſt quàm quadrupla ad circulum maximum omnium qui in ſphæra eſſe poſſunt circulorum.

culorum. Ducantur itaq; duæ lineæ, quæ ſubtendantur ſingulæ duobus laterib. figuræ prædictæ, quorum hæc duo quib. una ſubtenditur, ſint oppoſita reliquis duobus quibus altera ſubtenſa eſt. ſintq; hæ ductæ e t, h m: & reliquæ iſtis æquediſtãtes f k, d b, g l. Exponatur item circulus r, cuius ſemidiametros poſſit id quod ſub a e, & ſub linea æquali compoſitæ ex omnibus illis e t, f k, b d, g l, h m. Ex his igitur quæ ſuperius demonſtrata ſunt, circulus r æquatur ſuperficiei dictæ figuræ. & quoniam inſuper demonſtratum eſt, quod ſicut linea æqualis omnibus ſimul illis e t, f k, b d, g l, h m ſe habet ad diametrum circuli a c, ſic linea c e ad lineam e a. Quod igitur ſub illa quæ æquatur omnibus ſimul dictis, & ſub ea cõtinet̃, quod idẽ eſt ei quod à ſemidiametro circuli r, in ſe ducto producitur, æquale eſt ei quod ſub a c & c e comprenditur. uerũ id quod ſub a c & c e cõprenditur, minus eſt quadrato a c. quadratum igitur ſemidiametri r circuli minus eſt quadrato lineæ a c, ſequitur ergo, diametrũ r circuli minorem eſſe quàm duplam diametri a b c d circuli. Duæ igitur diametri a b c d circuli, diametro r circuli ſunt maiores. & quod fit, à diametro circuli a b c d, hoc eſt a c linea quater in ſe ducta, maius eſt quadrato diametri circuli r. At uero ſicut eius quod fit ab a c linea, quater in ſe ducta, ad quadratum diametri circuli r, ita quatuor circuli æquales a b c d ad circulum r. quatuor itaq; circuli ęquales a b c d circulo, ſunt maiores circulo r. Igitur circulus r minor eſt quadruplo a b c d circulo in ſphæra maximo. Circulus autem r demonſtratus eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ. quare colligitur, ſuperficiem dictæ figuræ minorem eſſe, quàm quadruplam maximi circuli in ſphæra deſcripti.

25 Figuræ in ſphęra deſcriptæ, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, ille conus æqualis eſſe probatur, cuius coni baſis ſit circulus, qui æquatur ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudo uero eius æqualis ſit lineæ illi, quæ à centro ſphęræ ad unumquoduis latus figurę multorum angulorum ſit perpendiculariter educta.



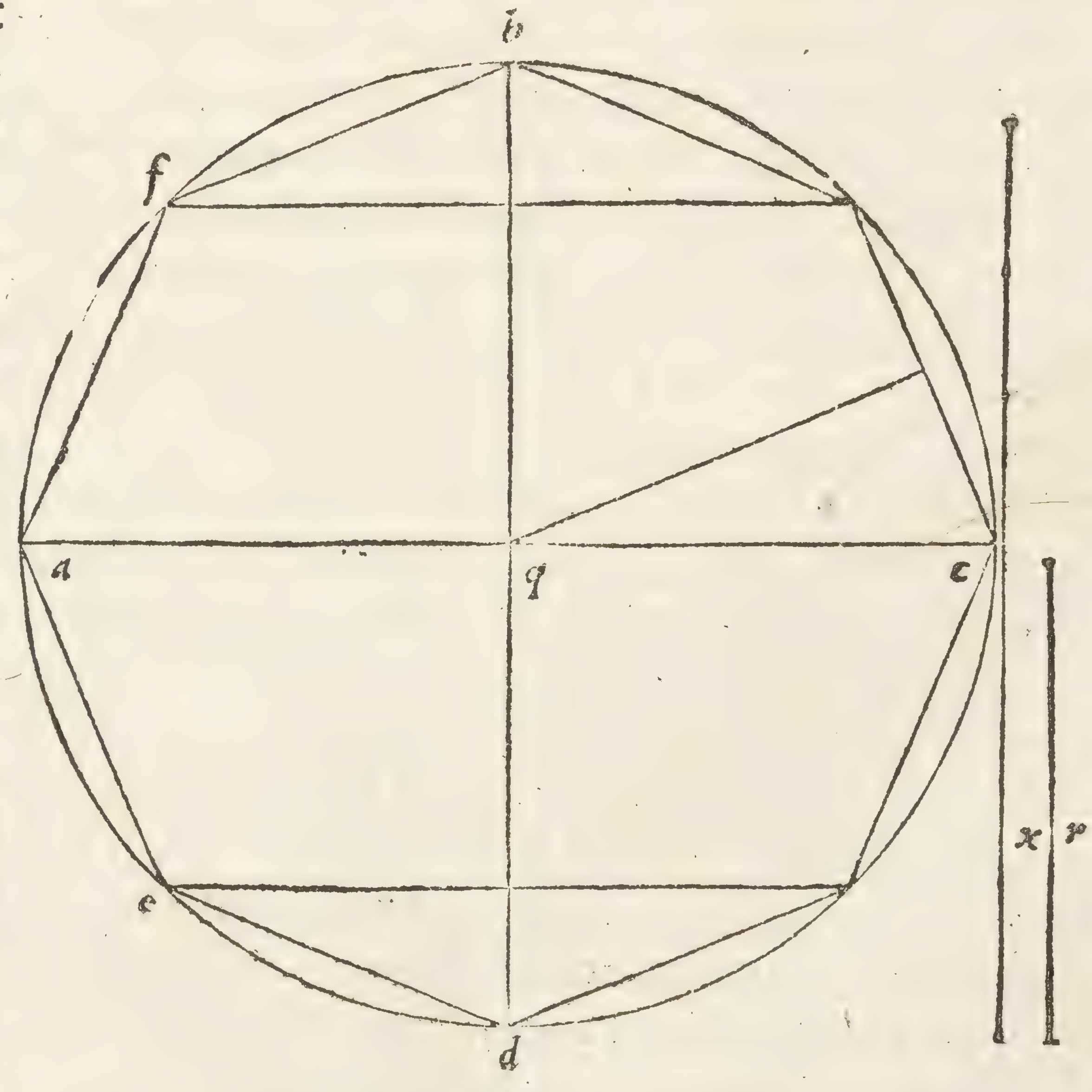


Eſto ſphæra, in qua ſit maximus circulus a b c d, & reliqua ſumãt̃ ſimiliter uti in ſuperiori demonſtratione figurata ſunt. & ponatur conus r rectus, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudinem uero æqualem ei lineæ, quæ à centro ſphæræ ad latus unum figuræ multorum angulorum ſit perpendiculariter educta. Eſt igitur demõſtrandum, quod conus r æqualis eſt figuræ in ſphæra deſcriptæ, nam deſcribantur coni à circulis, quorum diametri ſunt f n, g m,

h l,

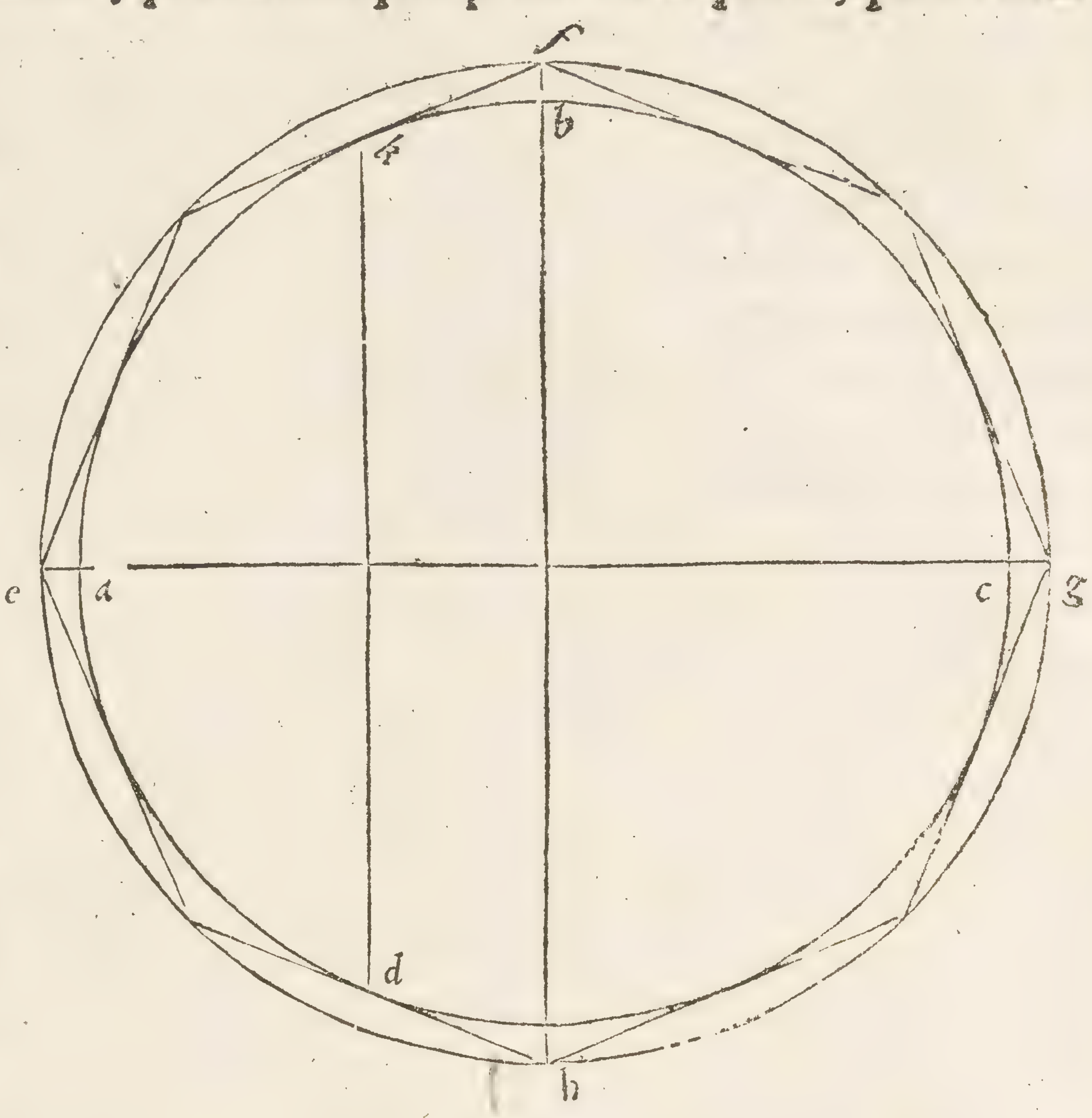
h l, i k, quorum conorum baſes ſint dicti circuli e, uertices uero ad x centrum ſphæ
ræ deducti. Habemus rhombum ſolidū, qui conficitur ex cono, cuius baſis eſt cir
culus, qui circa f n diametrum conſtat, uertex uero punctum a: & ex cono, cuius
baſis eſt idem circulus, uertex uero punctum x. qui quidem rhombus eſt æqualis
cono qui baſim habeat ſuperficiem coni n a f, altitudinem uero æqualem lineæ à
centro x perpendiculariter ad unum latus ductæ. Rurſus reſiduum à rhombo di-
cto relictū, quod continetur à ſuperficie coni, illa ſcilicet quæ inter æquediſtātes
planas ſuperficies f n, g m cōprehēditur, & inter ſuperficies conorū f n x, & g m x
æquale eſt cono habenti baſem æqualem ſuperficiei conicæ, illi uidelicet quæ in-
ter planas ſuperficies f n, g m continetur. altitudo uero, lineæ ab x centro ad f g la-
tus perpendiculariter eductæ. Hæc autem ſuprà ſunt demonſtrata. item reſiduum
coni illius qui continetur à conica ſuperficie, quæ includitur à planis æquediſtan-
tibus g m, b d, & à ſuperficie coni m g x, & circulo cuius diameter b d ęqualis eſt co
no baſim habenti æqualem ei coni ſuperficiei, quæ inter g m, b d planas contine-
tur: altitudinem uero æqualem lineæ à centro x ad latus b g perpendiculariter du-
ctæ. Similiter quoque in alio hemiſphærio rhombus x k c l, & reſidua conorū æ-
qualia eſſe probabuntur talibus & tantis conis, ut ſuprà dictum eſt. Manifeſtum
itaq; eſt, quod tota ſimul figura ſphæræ inſcripta æqualis erit omnib. ſimul conis
dictis. coni uero ipſi æquales ſunt ipſi r cono, cum conus r altitudinem quidem
habeat unicuiq; illorum æqualem, & baſim omnibus ſimul illorū baſibus æqua-
lem. Conſtat igitur, inſcriptam ſphæræ figuram expoſito cono eſſe æqualē.

Figura ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficieb. contineatur, minor eſt quàm 26
quadrupla eius coni qui baſim habeat æqualem circulo, qui in ſphæra ſit ma-
ximus, altitudinē uero æqualem ſemidiametro ſphæræ. Eſto deſcriptus ſit conus
æqualis figuræ inſcriptæ ſphę
ræ, qui conus baſim habeat
æqualem ſuperficiei dictæ fi-
guræ inſcriptæ ſphęræ, altitu
dinem æqualem lineæ à cen-
tro circuli ad unum latus figu
ræ multorum angulorū, quæ
circulo ſit inſcripta, perpendi
culariter ductæ. ſitque hic co
nus r. ſit alter conus x, qui ba-
ſim habeat æqualem circulo
a b c d, altitudinem uero ſemi
diametro a b c d circuli. Quo-
niam igitur conus r, baſim
habet æqualem ſuperficiei fi-
guræ inſcriptæ in ſphæra, al
titudinem autem æqualem
lineæ à centro, ad latus a f,
perpendiculariter ductæ. o-
ſtenſum eſt autem, ſuperfici-
em figuræ inſcriptæ minorem



eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. eſt igitur coni ipſius r baſis mi-
nor, quàm quadrupla baſis x coni. Eſt etiā coni r altitudo minor altitudine x coni.
Cū igitur conus r minorē habeat baſim quàm quadruplam ad baſim x, altitudinē
etiā minorem illius altitudine, manifeſtum eſt quod ipſe r conus minor eſt quàm
quadruplus ad conum x. Verum conus r æqualis eſt figuræ inſcriptæ, figura igit̄
inſcripta minor eſt quàm quadrupla ad conū x, quod principio propoſitū fuerat.

27 ESto in ſphæra maximus circulus a b c d, circa quem deſcribatur figura multorum angulorum & æqualium, quæ latera quoq; habeat æqualia, quorũ multitudo à quaternario menſuret. Huic aũt figuræ circumſcribatur circulus, cõprendẽs eam, circa idem centrum con uolutus circa quod a b c d exiſtit. Deinde quieſcẽte e g diametro, circũuoluatur plana ſuperficies e f g h, in qua multorum angulorum figura & circulus a b c d continetur. Perſpicuũ eſt, quod circumferentia circuli a b c d, ſecundum ſphæræ ſuperficiẽ feretur. circumferentia uero circuli e f g h, ſecundum alterius ſphæræ ſuperficiem ducetur, quæ idem centrum cũ minori ſphæra habebit. puncta uero in quibus latera figuræ inſcriptæ contingunt

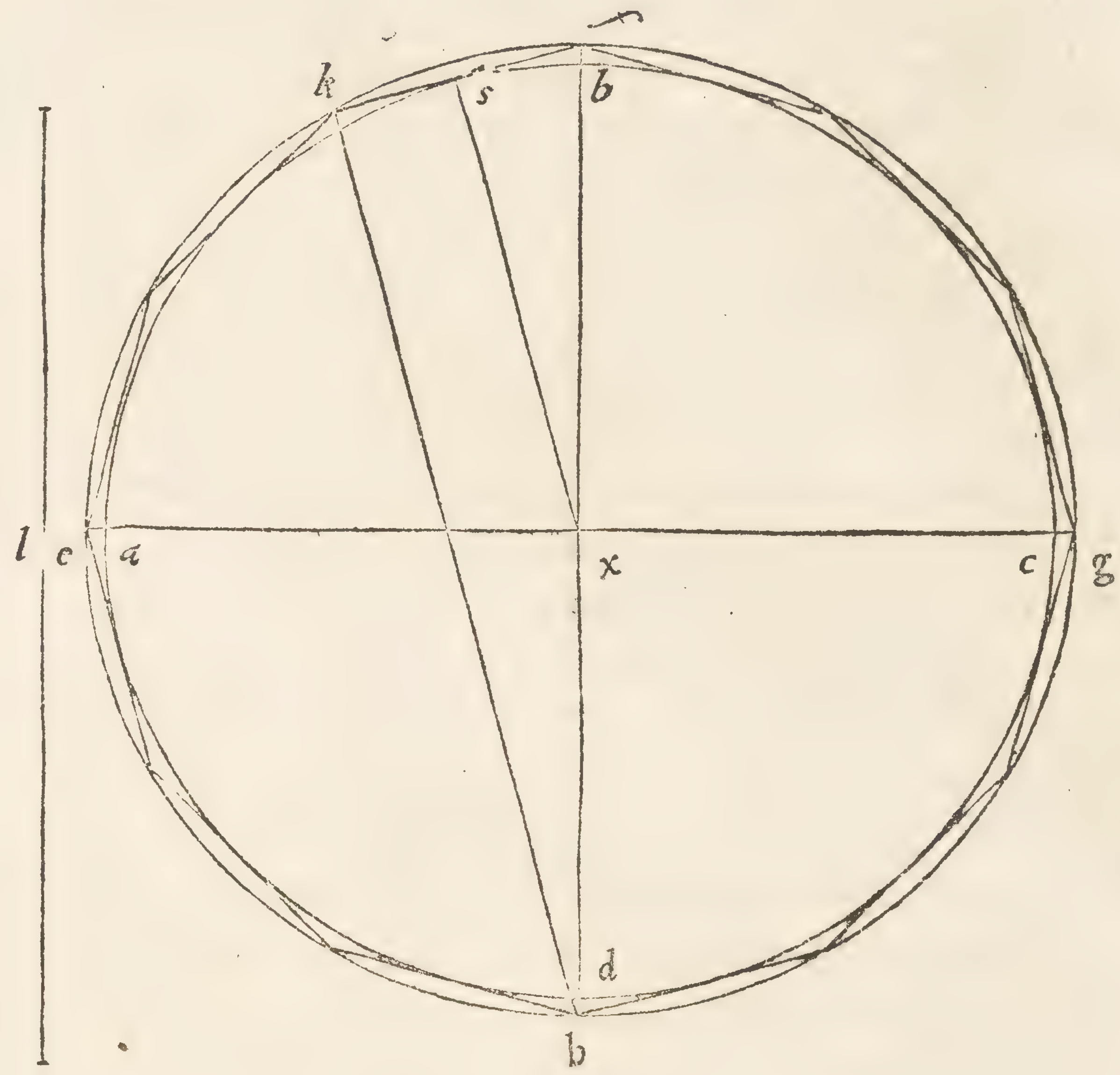


circulum a b c d, in circumuolutione, deſcribent circulos qui ſunt erecti ſupra circulum a b c d in ſphæra minori. anguli uero dictæ figuræ ſecundum circuli circũferentias ferentur, illis duobus exceptis, qui ſunt alter ad e, alter ad g puncta collocati: deſcribentq; in ſuperficie ſphæræ maioris ſinguli ſingulos circulos, qui ſunt erecti ſuper circulum e f g h. Latera uero dictæ figuræ conicas ſuperficies circumuoluta deſignabunt, quemadmodum in ſuperiori proxima figuratione conſpectum eſt. atq; ipſa figura conicis ſuperficiebus compræhenſa minori quidem ſphæræ erit circumſcripta, maiori uero inſcripta. Quod aũt ipſius figuræ ſuperficies maior ſit ſuperficie ſphæræ cui eſt circũſcripta, hac ratione demonſtrabitur. Eſto k d diametrus cuiuſpiã circuli in ſphera minori: puncta k d ſint, in quibus duo latera dictæ figuræ contingant circulum a b c d. ſi igitur ſphæra intelligatur ſecta à plano k d, circulo ſuper a b c d erecto, ſuperficies quoq; figurę ſibi circumſcriptæ ſimul ſecta eſſe intelligetur ab eodem plano. Vnde manifeſtum erit, utraſq; ſuperficies ſectas eiſdẽ terminis in illo plano compræhenſas eſſe. nam utrarũq; terminus eſt circuli circumferentia, cuius diametrus eſt k d, erecti ſuper circulum a b c d: & ambæ ſunt in eandem partem conglobatæ, & altera earum ab altera complectitur: ſphærica ſcilicet à planę figuræ ſuperficie, quæ illi finitima eſt. Minor igitur illa eſt, quæ compræhenſa eſt, ſcilicet ſphęrica illius ſectionis ſuperficies, quàm ſuperficies figuræ circũſcriptæ ſibi. Similiter probabitur, reſidui ſuperficiem ſphæricam minorem eſſe ſuperficie reſidui figuræ ſibi circũſcriptę. Manifeſtũ igitur eſt quod tota quoq; ſimul ſphęræ ſuperficies minor eſt ſuperficie figurę ſibi circumſcriptæ.

28 SVperficiei figuræ circa ſphęram deſcriptę circulus ille æqualis eſt, cuius quidem circuli ſemidiametrus tantum poteſt quantũ quod continetur ſub uno latere figuræ circumſcriptę, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ latera dictę figuræ ita continuent, ut omnes ſint uni earum æquediſtantes, quæ una duobus dictę figurę lateribus ſit ſubtenſa. Figura enim quæ circũſcribitur ſphęræ minori, inſcribitur ſphæræ maiori. eius uero figuræ quæ ſphæræ inſcribitur, quæ ue ſuperficiebus conicis cõtineatur, ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros tantũ poteſt quantum eſt quod continetur ſub uno latere dictæ figuræ,

ræ, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ dictæ figuræ angulos ita coniungant, ut ſint æquediſtantes uni earum, quæ duobus dictæ figuræ lateri bus ſubtenditur. Quare manifeſtum eſt, id quod propoſitum fuerat.

Figuræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies maior eſt, quàm quadrupla ad ma- 29
ximum circulum in ſphæra collocatũ. Eſto itaq; & ſphæra, & circulus, & cætera ſumantur eadem & eodem modo, ut ſuprà in proximis fuit poſitum: et ponatur l circulus æqualis ſuperficiei figurę propoſitæ, quæ circa ſphęrã minorem ſit circũſcripta. Quoniam igitur in circulo e f g h, figura multorũ angulorum & parium angulorum inſcripta fuit, & lineæ, quæ latera dictæ figurę iungebant æquediſtantes lineę h f, ad ipſam eãdem h f proportionem habẽt, quam h k ad k f habet. figura igitur comprehenſa ſub uno latere dictę figuræ, et ſub omnib. ſimul lineis angulos dictę figuræ continuãtibus, æ-

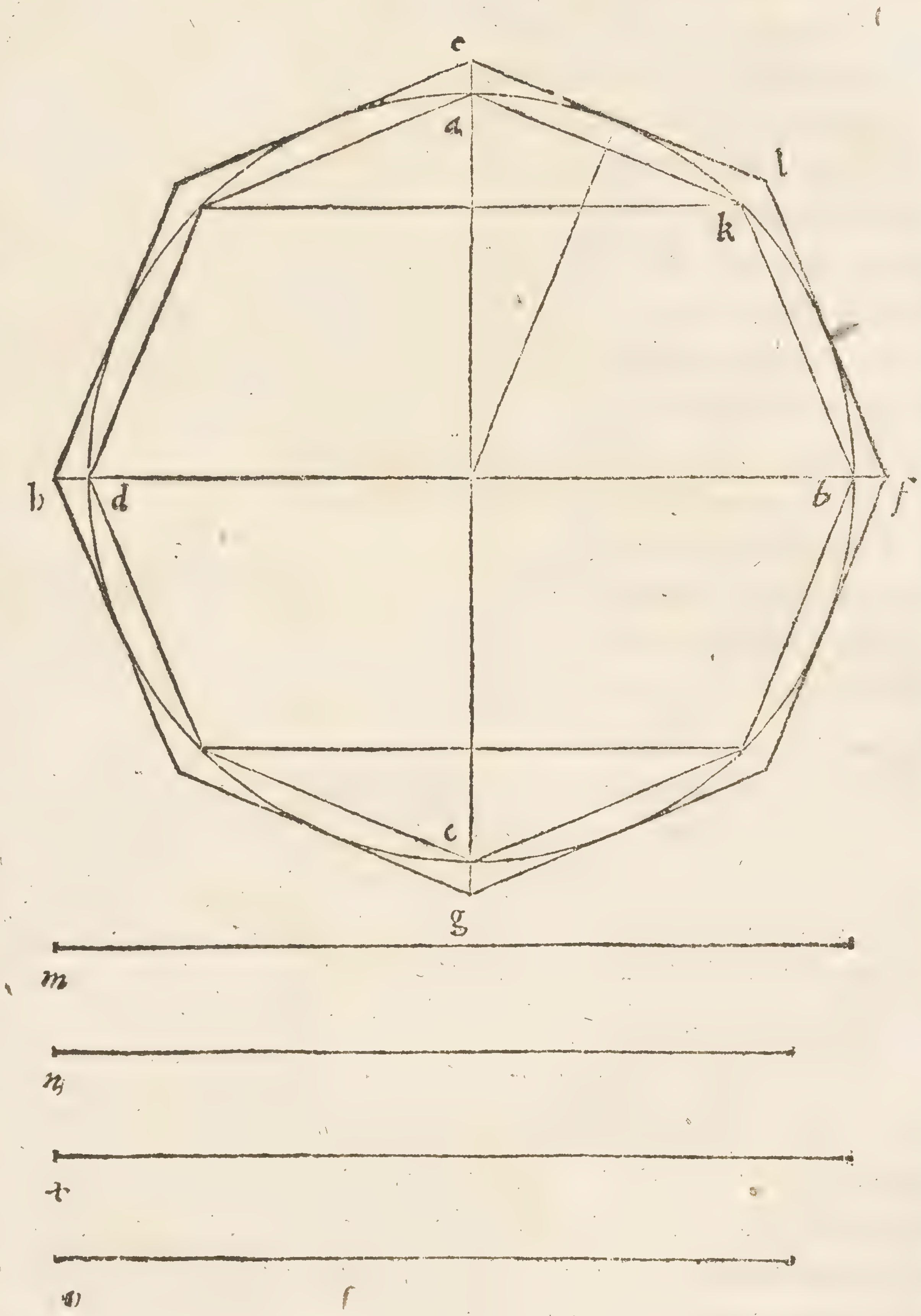


qualis eſt illi quę continetur ſub f h k. quare ſemidiametros circuli l tãtum poteſt, quantum quod continetur ſub f h k. maior igitur eſt ſemidiametros circuli l, quàm h k. At uero h k ęqualis eſt diametro a b c d circuli. nam dupla eſt lineæ ſ x, quæ ſemidiametros eſt circuli a b c d. Manifeſtum eſt, quod maior eſt quàm quadruplus circulus l, qui idem eſt quod ſuperficies dictę figuræ ad ſuperficiem maximi circuli in ſphęra collocati.

Figuræ circa ſphęram minorem circumſcriptæ conus ille ęqualis eſſe probatur, qui conus baſim habeat circulum qui æqualis ſit ſuperficiei dictæ figurę, altitudinem uero habeat æqualem ſemidiametro ſphęrę. Figura enim quę minori ſphęrę circumſcribitur, eſt inſcripta maiori ſphęræ. Figuræ autem inſcriptæ quæ conicis ſuperficiebus cõtineatur, conus ille oſtenſus eſt ęqualis eſſe, qui baſim habeat circulum ęqualem ſuperficiei dictę figurę: altitudinem uero, lineam lineę illi ęqualem, quę quidem linea à centro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter educta. Hęc eadem uero æqualis eſt ſemidiametro minoris ſphęrę. quare conſtat id quod propoſitum fuerat. Ex his igitur quæ ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt quod figura circumſcripta minori ſphæræ maior eſt, quàm quadrupla coni qui habet baſim maximum in ſphæra circulum, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ æqualem. Quoniam igitur dictæ figuræ ille conus æqualis eſt qui habet baſem æqualem ſuperficiei dictæ figuræ, altitudinẽ uero æqualem lineæ quæ à cẽtro ſphęræ ſit ad unũ latus dictæ figuræ perpendiculariter educta, hoc eſt ſemidiametro minoris ſphæræ. Superficies autem circumſcriptæ figuræ circa ſphærã maior eſt, quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli. Figura igitur dictæ ſphęræ circumſcripta, maior eſt quàm quadrupla coni, qui baſim habeat maximum in ſphęra circulum, altitudinem uero ſemidiametrum ſphęrę: quoniam conus qui dictę figuræ eſt ęqualis, maior eſt, quàm quadruplus ad dictum conum. nam & ba-

ſim maiorem, quàm quadruplam ad illius baſem habet, & altitudinem ſeruat æqualem.

30 SI figura una ſphæræ ſit inſcripta, & eidem altera circumſcripta, quæ quidem figuræ ambæ ſint, ut ſuprà dictum eſt, à duabus planis figuris circum & intra circulum in ſphæra maximum deſcriptis, per circumuolutionem productæ: ſuperficies figuræ circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ habet proportionem duplicatam, eam ſcilicet quæ eſt lateris figuræ planę circulo, ut dictum eſt, circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ in eodem circulo. ipſa uero figura corporea circumſcripta ad figuram inſcriptam ſphæræ, ut dictum eſt, habebit eandem proportionem triplicatam. Eſto in ſphæra circulus maximus a b c d, & inſcribatur ipſi circulo figura multorum angulorum & laterum æqualium, quorum multitudo menſuretur à quaternario. Deinde eidem circulo altera figura circumſcribatur ſimilis inſcriptæ, ita ut latera circumſcriptæ cõtingant in puncto medio arcus circuli abſciſos à lateribus figurę inſcriptæ. Sint etiam e g, f h duæ diametri ad angulos rectos ſecãtes ſeſe circuli compræhendẽtis figuram circumſcriptã, ſintq; omnino ſimiliter & ad eaſdem partes ductę ad quas ſunt diametri a b c d. Deinde intelligãtur lineæ rectæ ductæ ad oppoſitos figuræ angulos, quæ iungant latera eius quæ quidem erunt & inter ſe æque diſtantes, & ipſis h f, b d. quieſcente itaq; e g diametro, & circa eam lateribus figurarum circumuolutis, & circulis ipſis, ſphæræ ſimul duæ & duæ figuræ multorum angulorum corporeæ efficientur, quarum figurarum altera ſphęrę circumſcripta erit, altera eidem inſcripta.

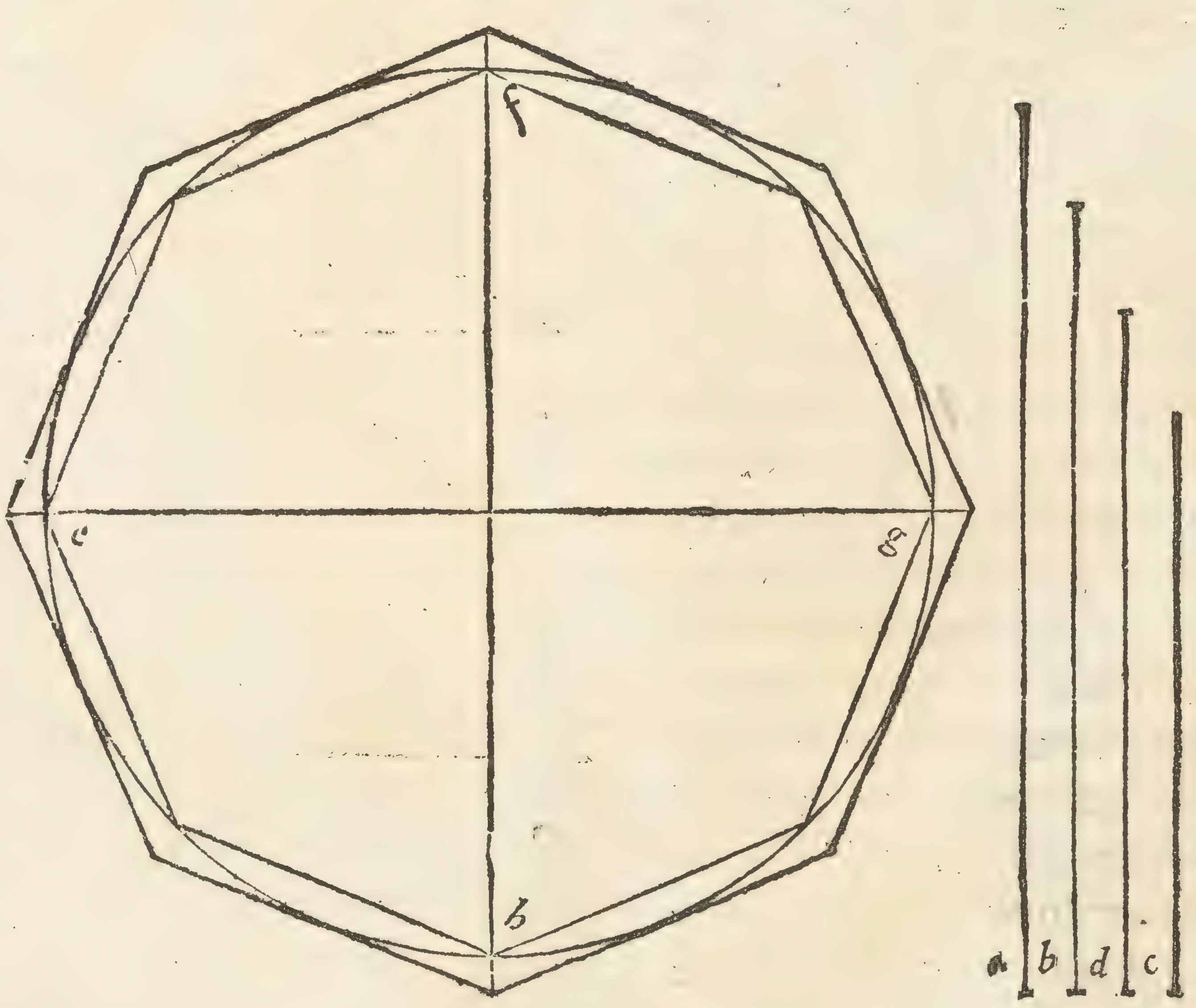


Demonſtrandum itaq; eſt primũ, quòd ſuperficies circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ habeat eã proportionẽ duplicatã, quam habet latus e l ad latus a k. Secũdò, quòd ipſa figura circũſcripta ad figuram inſcriptã habeat eandem proportionem triplicatam. Eſto itaq; circulus m æqualis ſuperficiei figuræ circa ſphæram deſcriptæ, circulus uero n æqualis ſuperficiei figurę inſcriptæ. Semidiametros itaq; circuli m, poteſt tantũ, quantum eſt quod continetur ſub e l, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ angulos figuræ circumſcriptæ coniungunt. Semidiametros uero circuli n poteſt id quod ſub a k, & ſub linea æquali omnibus ſimul lineis, quæ iungunt angulos inſcriptæ. At uero quoniam dictæ figuræ ſunt ſimiles poſitæ, ſpacia quo-

que

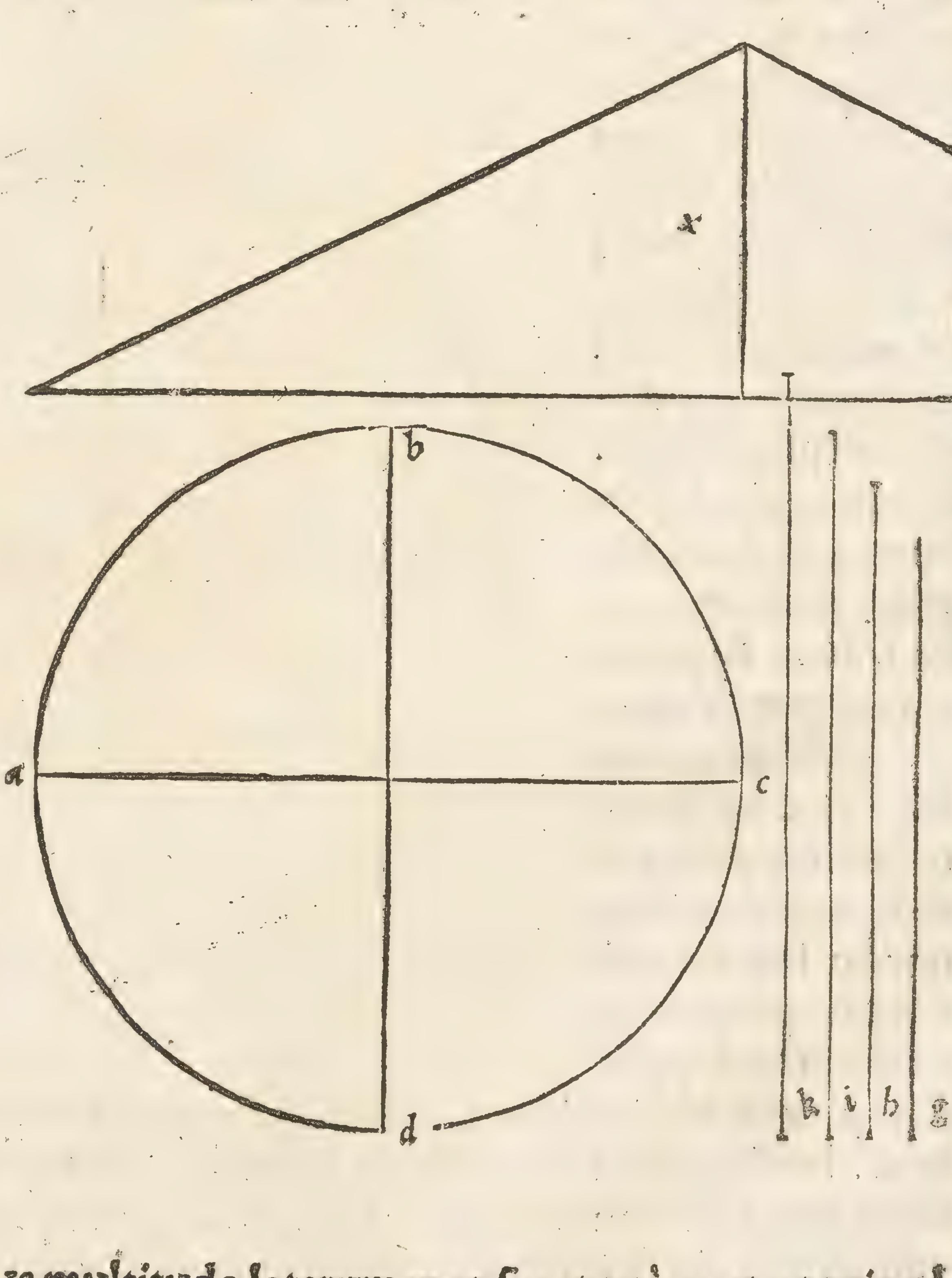
que à dictis lineis, hoc eſt angulis & lateribus dictarum figurarum comprehenſa, ſimilia eſſe neceſſe eſt. quare eandem inter ſe proportionem retinebunt, quam habent ſemidiametri circulorum m & n inter ſe potentia. Quare ſequitur, diametros circulorum m & n eandem habere inter ſe proportionem, quam habent latera figurarum. Circuli uero habent inter ſe eam proportionem duplicatam, quam habent ſuæ diametri inuicem, qui circuli æquantur ſuperficiebus duarum figurarum, inſcriptæ ſcilicet & circumſcriptæ. Conſtat igitur, ſuperficiem figuræ circa ſphæram deſcriptæ, ad ſuperficiē figuræ eidem ſphæræ inſcriptæ, habere eam proportionem duplicatam, quam habet e l ad a k. Sumantur preterea duo coni o & x. Eſto x conus, cuius baſis ſit circulus x, qui ſit æqualis m. alter uero conus baſim habeat o circulum, qui ſit æqualis n. altitudinē uero ipſius x ponamus æqualem ſemidiametro ſphæræ. at uero conus o altitudinē habeat lineam, quæ à centro ſphæræ ad latus a k perpendiculariter ducta ſit. Conus igitur x erit æqualis figuræ circumſcriptæ ſphæræ, conus uero o æquabitur inſcriptæ. nā hæc iam demonſtrata ſunt. at uero quoniam figurę dictæ ſunt ſimiles, eandem proportionem habet e l ad a k, quam habet ſemidiametros ſphęræ ad eam quæ à centro perpendiculariter ducta eſt ad a k. Eandem igitur proportionem habet altitudo coni x ad altitudinem coni o, quam e l habet ad a k. Diametrus autem circuli m, ad diametrum circuli n, eam habet quam e l ad a k. diametri ergo baſium coni x, & coni o, ſuis altitudinib. ſunt proportionales. igitur hi coni ſunt ſimiles inter ſe. & propter hoc conus x ad conū o habet eam proportionem triplicatam, quam diametrus circuli m ad dimetrum circuli n. Manifeſtum igitur eſt, quod figura circumſcripta habet ad figuram inſcriptam, proportionem illam triplicatam, quam habet e l ad a k: quod erat demonſtrandum.

CVIuslibet ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli, qui in ea maximus habe- 31
tur. Eſto ſphæra quęcūq;: eſto deinde ſuperficies quędā quadrupla ad maximū in ſphæra circulū, quę ſit circulus a. Dico igitur quod a eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ. Nam ſi non, uel maior erit, uel minor. Ponatur primò quod ſit maior ſphęræ ſuperficies circulo a. Habemus iā duas magnitudines inæquales, ſcilicet ſuperficiem ſphęræ, & circulū a. poſſumus ergo ſumere duas lineas rectas inæquales, ita ut maior ad minorem habeat minorem proportionem, quam ſuperficies ſphæræ ad circulum a. ſint itaq; ſumptæ b c: quarum media proportionalis ſit d. Intelligatur etiam ſphæra ſecta à plana ſuperficie tranſeunte per eius centrum, ſitq; illa ſecans circulus e f g h. intelligatur præterea illi circulo una figura circumſcripta, altera inſcripta multorum angulorum, ita ut circumſcripta ſit inſcriptæ



ptæ ſimilis: & circumſcriptæ latus minorem habeat proportionem ad latus inſcriptæ, quàm b habet ad ipſam d, & ſic illa proportio duplicata minor erit hac ſimiliter proportione duplicata. Proportio autem b ad c eſt duplicata, ea quam habet b ad ipſam d: proportio autem lateris figuræ circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ, duplicata eſt tanta, quanta eſt ſuperficiei circumſcriptæ figuræ ſolidæ, ad ſuperficiem inſcriptæ. Superficies igitur figuræ ſolidæ circumſcriptæ ſphærę, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ, minorem proportionem habet quàm ſuperficies ſphæræ ad a circulum. quod quidem eſt inconueniens, & abſurdum. Nam ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ſuperficie ſphæræ maior exiſtit. ſuperficies uero inſcriptæ a circulo minor eſt. Oſtenſum eſt enim, ſuperficiem figuræ inſcriptę minorem eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. Circulus autem a quadruplus eſt poſitus circuli in ſphæra maximi. Igitur ſphæræ ſuperficies non poteſt maior eſſe ſuperficie circuli a. Dico item quod neq; minor eſſe poteſt. nam ſi poteſt, eſto: & inueniantur ſimiliter duæ lineæ rectæ b, c: ita ut b ad c habeat minorem proportionem, quàm circulus a ad ſuperficiem ſphæræ. ſitq; illarum media proportionalis d, & circumſcribatur iterum, & inſcribatur figura ut ſuprà, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm b ad lineam d. igitur & ea duplicata erit minor. Quare ſuperficies circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ minorem habet proportionem, quàm a circulus ad ſphæræ ſuperficiem. quod ſanè abſurdum eſt. nam circumſcriptæ ſuperficies maior eſt a circulo, inſcriptæ uero ſuperficies ſphæræ ſuperficie minor exiſtit. Nõ ergo ſuperficies ſphęræ a circulo poteſt eſſe minor. Cum etiam demonſtratum ſit quod nequeat maior eſſe, neceſſariò colligitur eam circulo a, hoc eſt quadruplo circuli in ſphæra maximi æqualem eſſe.

32 QVælibet ſphæra quadrupla eſt eius coni, qui quidem conus habuerit baſim æqualem circulo in ſphæra maximo, altitudinẽ uero ęqualem ſemidiametro ſphæræ. Eſto quædã ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d. Si itaq; ſphæra non eſt quadrupla dicti coni, eſto ſi fieri poteſt maior quàm quadrupla. Eſto præterea conus x, qui baſim habeat quadruplã ad circulũ a b c d, altitudinem uero ſemidiametro ſphæræ æqualem. erit igitur ſphæra maior cono x. Habemus itaq; duas magnitudines inæquales, ſphæram uidelicet, & conum x. quare poterimus duas lineas rectas ſumere, quarum maior ad minorem habeat proportionem minorem, quàm ſphęra ad conum x. Sint igitur iſtę k g, & aliæ duæ i h ſumptæ, ita ut æquali quantitate ſeſe excedant. k excedat i, & i h, & h ipſam g. intelligatur etiam in circulo a b c d inſcripta una figura, cuius multitudo laterum menſuretur à quaternario. al-

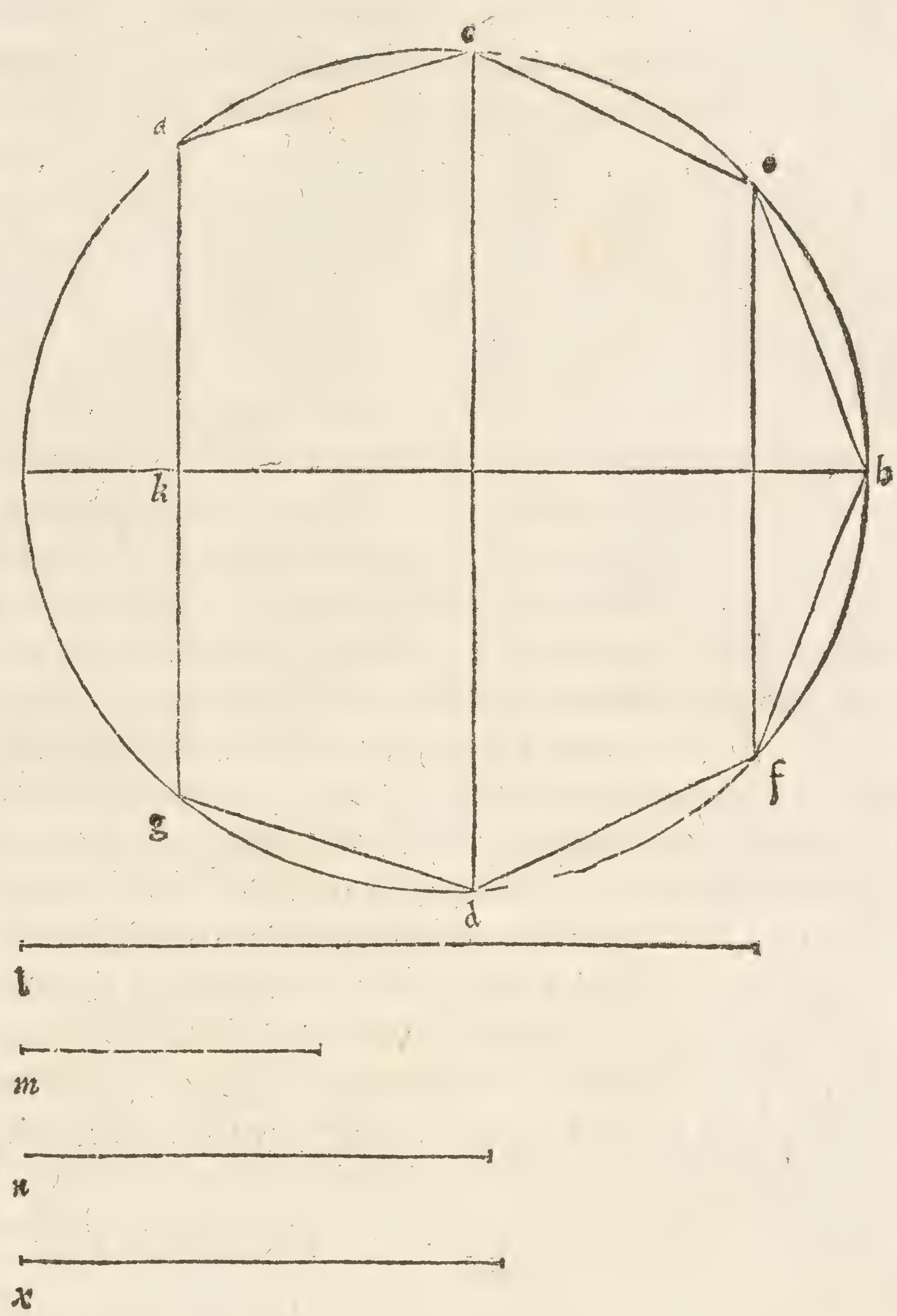


tera

tera præterea circumſcripta ſimilis inſcriptæ, quemadmodum ſuperius quoq; factum eſt. Latus uero circumſcriptæ ad latus inſcriptæ minorem habeat proportionem, quàm k ad ipſam i: & ſint a c, b d diametri ſe ad angulos rectos ſecantes. Si igitur quieſcente a c diametro circumferatur planus circulus, in quo figura eſt inſcripta, & circa quem altera circũſcripta fuerat, fient duæ figuræ, altera circa ſphęram, altera intrà deſcripta. Et circumſcripta habebit ad inſcriptam eam proportionem triplicatam, quam habet latus circũſcriptæ, ad latus inſcriptæ circulo a b c d. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad ipſam i: quare figura circumſcripta minorem habet ad figuram inſcriptam proportionem, quàm eſt k ad i triplicata. Hoc enim manifeſtum eſt ex deſcriptione. multo magis ergo circumſcripta ad inſcrip tam habet minorem proportionem, quàm k ad g. At uero k ad g minorem habet, quàm ſphæra ad x conum. & permutatim: quod ſanè eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta maior eſt ipſa ſphæra, inſcripta uero eſt minor cono x: propterea quod conus x poſitus eſt quadruplus ad eum conũ, cuius baſis æqualis ſit circulo a b c d, & altitudo ſemidiametro ſphæræ. inſcripta uero figura minor exiſtit quàm quadrupla dicti coni. non poteſt igitur ſphæra maior eſſe quàm quadrupla dicti coni. Eſto ſecundò, ſi poteſt eſſe minor quàm quadrupla, ita ut ſphæra ſit minor x cono. ſumantur k g lineæ rectæ, k maior, g minor. Habeatq; k ad ipſam g minorem proportionem, quàm conus x ad ſphæram. & diſponantur i & h lineę ut prius, & intelligatur in a b c d circulo inſcripta figura multorum angulorum, altera circumſcripta, ita ut latus circumſcriptæ ad latus inſcriptæ, minorem habeat proportionem quàm k ad i, & cætera parentur eodem modo ut prius. figura ergo circumſcripta ad figuram inſcriptam, habebit eam proportionem quæ eſt lateris circumſcriptæ circulo a b c d, ad latus eidem inſcriptę triplicata. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad i. Figura igitur circumſcripta ad inſcriptam, minorem habebit proportionem quàm eſt k ad i triplicata. k uero ad g eſt ea quam habet k ad i triplicata. quare figura circumſcripta ad inſcriptam, habet minorem quàm k ad g. at uero k ad g minorem habet quàm x conus ad ſphæram. Circumſcripta igitur figura ad inſcriptam, minorem habet quàm x conus ad ſphærã. quod quidem eſſe non poteſt. Nam inſcripta figura minor eſt ipſa ſphæra. circumſcripta uero maior eſt x cono. Sphæra igitur minor eſſe non poteſt, quàm quadrupla coni, qui habeat baſim æqualem circulo a b c d, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ. Et ſuprà eſt oſtenſum, quod neq; maior eſſe poterat: erit igitur dicti coni neceſſariò quadrupla.

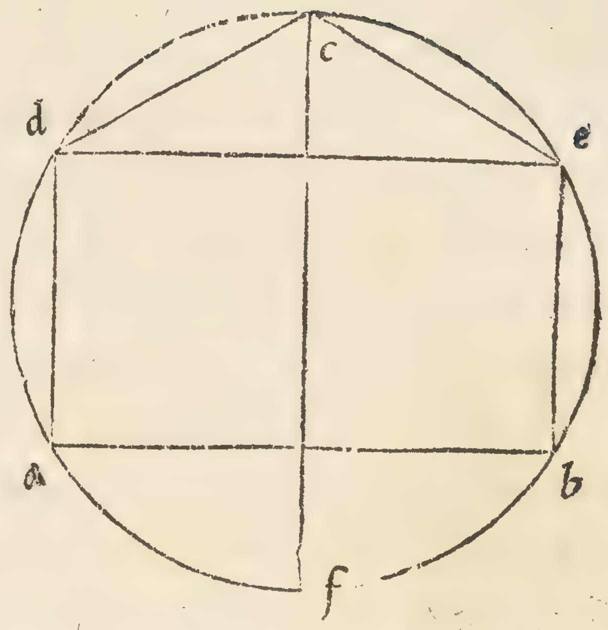
Ex illis igitur quæ ſuprà ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt, quod quilibet cylindrus, qui baſim habeat maximum in ſphæra circulum, & altitudinem diametrum ſphęræ, ad ipſam ſphęram ſeſquialter habetur, & ſuperficies eius cum baſibus ſeſquialtera ad ſphæræ ſuperficiem. nam cylindrus prædictus ſextuplus eſt eius coni qui baſim habeat cum cylindro eandem, habeat uerò altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Sphæra uero eſt demonſtrata eſſe quadrupla dicti coni. ex quo conſtat, cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum. Item cum ſuperficies cylindri exceptis baſibus circulo oſtenſa eſt æqualis, cuius ſemidiametrus ſit media proportionalis inter latus cylindri & diametrum baſis eius: dicti autem cylindri circa ſphæram latus eſt æquale diametro baſis ſuæ: manifeſtum eſt, quod media proportionalis eſt & ipſa æqualis eidem diametro. Circulus autem cuius ſemidiametrus ſit æqualis diametro baſis, quadruplus eſſe probatur ad baſem, quæ eſt maximus in ſphæra circulus. Superficies autem cylindri exceptis baſibus habet quadrupla maximi in ſphæra circuli. quare tota ſimul cum baſibus ad eundem circulum ſextupla apparebit. ipſa quoq; ſphæræ ſuperficies ad circulum in ſphæra maximum, quadrupla probata eſt. quare tota cylindri ſuperficies, ad ſphæræ ſuperficiem exiſtet ſeſquialtera.

33 SVperficies figuræ in portione ſphæræ deſcriptæ, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum eſt quod continetur ſub uno latere figuræ multorum angulorum, inſcriptæ in ſectione maximi circuli, & ſub linea quę ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ baſe ſectionis ſint æquediſtantes, & dimidio ipſius baſis cum prælictis adiecto. Eſto ſphæra, & in ipſa portio ſecta, cuius baſis ſit circulus, cuius ſit diametrus a g: inſcribatur in ipſa portione figura qualis ſæpe dicta eſt, comprenſa à conicis ſuperficiebus. & ſit maximus in ſphæra circulus a g h, & ſit figura pari laterum numero conſtãs a c e h f d g, excepto latere a g: & ſumatur circulus l, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum quod continẽt ſub latere a c, & ſub omnibus ſimul e f c d, atq; etiã dimidia baſe, hoc eſt a k. demõſtrandum deinceps eſt, quod l circulus æqualis eſt ſuperficiei dictæ figuræ. Sumatur enim circulus m, cuius ſemidiametros tantũ poſſit quantum quod cõtinetur ſub h e, & ſub dimidia e f. Circulus ergo m æqualis eſt ſuperficiei coni illius, cuius baſis eſt circulus habens e f diametrum: eius uero altitudo et uertex, ſignum h. ſumatur item alius circulus n, cuius ſemidiametrus tantum poſſit quantum continetur ſub e c, & dimidia utriuſq; ſimul e f, c d, erit hic ęqualis ſuperficiei coni, illi uidelicet quæ ſita eſt media inter planas ſuperficies æquediſtantes, ſecundum lineas uel circulos e f, c d. Item alius ſimiliter ſumatur qui ſit circulus x, cuius ſemidiametrus poſſit id quod ſub a c, & dimidia utriuſq; ſimul c d, a g continetur, qui & æqualis eſt ſuperficiei conicæ, quæ inter planas æquediſtantes a g c d comprenditur. Omnes igitur circuli æquales erunt toti ſuperficiei figuræ dictæ. Et eorum ſemidiametri tantum poterunt, quantum ſub uno latere a c, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul e f, c d, & dimidia baſi a k. poterat autem ſemidiametrus circuli l æquale eidem ſpacio. quare ſequitur, l circulum circulis m n x æqualem eſſe: unde & ſuperficiei figuræ inſcriptæ æqualis exiſtet.



34 SEcetur ſphæra plana, ſuperficie non tranſeunte per centrum eius, & ſit in ea maximus circulus a e f, qui ſecet ſuperficiem ſecãtem ad angulos rectos, & inſcribatur in a c b ſphæræ portione figura multorum angulorum & parium numero, & æqualium laterum, excepta baſe a b, ſimiliter ſuperiorib. ſi manente & quieſcente g c circumferatur figura anguli quidem d, e, a, b ſecundum circumferentias circulorum, latera uero ſecundum conicas ſuperficies ferentur, erit que figu-

ra ſolida quæ inde confecta eſt, ſuperficiebus conicis compræhenſa, quæ baſim habebit eum circulum cuius diametrus eſt a b, uerticem uero punctum c. Hæc igitur figura ſimiliter his quæ dicta ſunt ſuperius, ſuperficiem habebit minorem ſuperficie eius figuræ quæ complectatur eam. idem enim eſt utriſque terminus in plano portionis, ſcilicet circumferentia circuli, cuius diametros eſt a b: & ambæ ſunt in eandem partem congloba- tæ ſuperficies, & altera ſub altera tenetur complexa.



SVperficies figuræ in ſphæræ portione deſcriptę, minor eſt eo circulo, cuius ſemidiametros æqualis eſt lineæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiã circuli ducitur: qui quidem circulus baſis eſt portionis. 35 Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b f e: & eſto portio ſphæræ, cuius baſis ſit circulus circa diametrum a b, & inſcribatur in ipſa dicta figura & in portione circuli, figura multorum angulorum, & cętera eadem. Eſto ſphęræ diametros h l, coniunctis l e, h a. & ſit circulus m, cuius ſemidiametrus ſit æqualis a h. Oſtendendum eſt, quod circulus m maior eſt ſuperficie figuræ. ſuperficies aũt figuræ demonſtrata eſt æqualis eſſe circulo, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum continetur ſub e h, & ſub omnibus e f, c d, k a. idipſum cõtentum ſub e h, & ſub e f, c d, k a, æquatur contento ſub e l, k h. contentum uero ſub e l, k h, minus eſt contento ſub a h. nam & minus contento ſub a h, k h. Manifeſtũ igitur eſt, quod ſemidiametrus circuli, qui eſt æqualis ſuperficiei figuræ, minor eſt ſemidiametro m. Conſtat igitur, circulum m ſuperficie figuræ maiorem etiam.

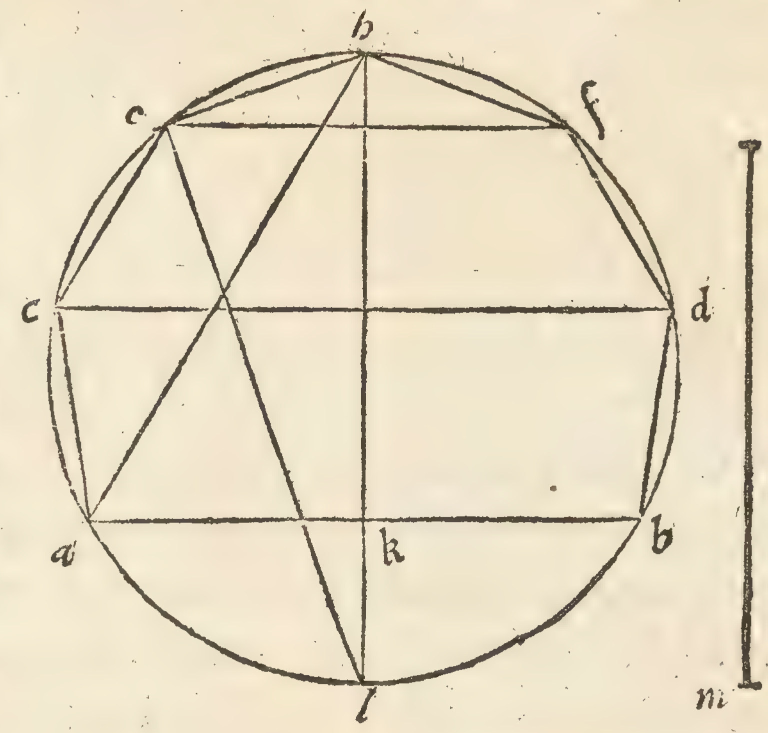
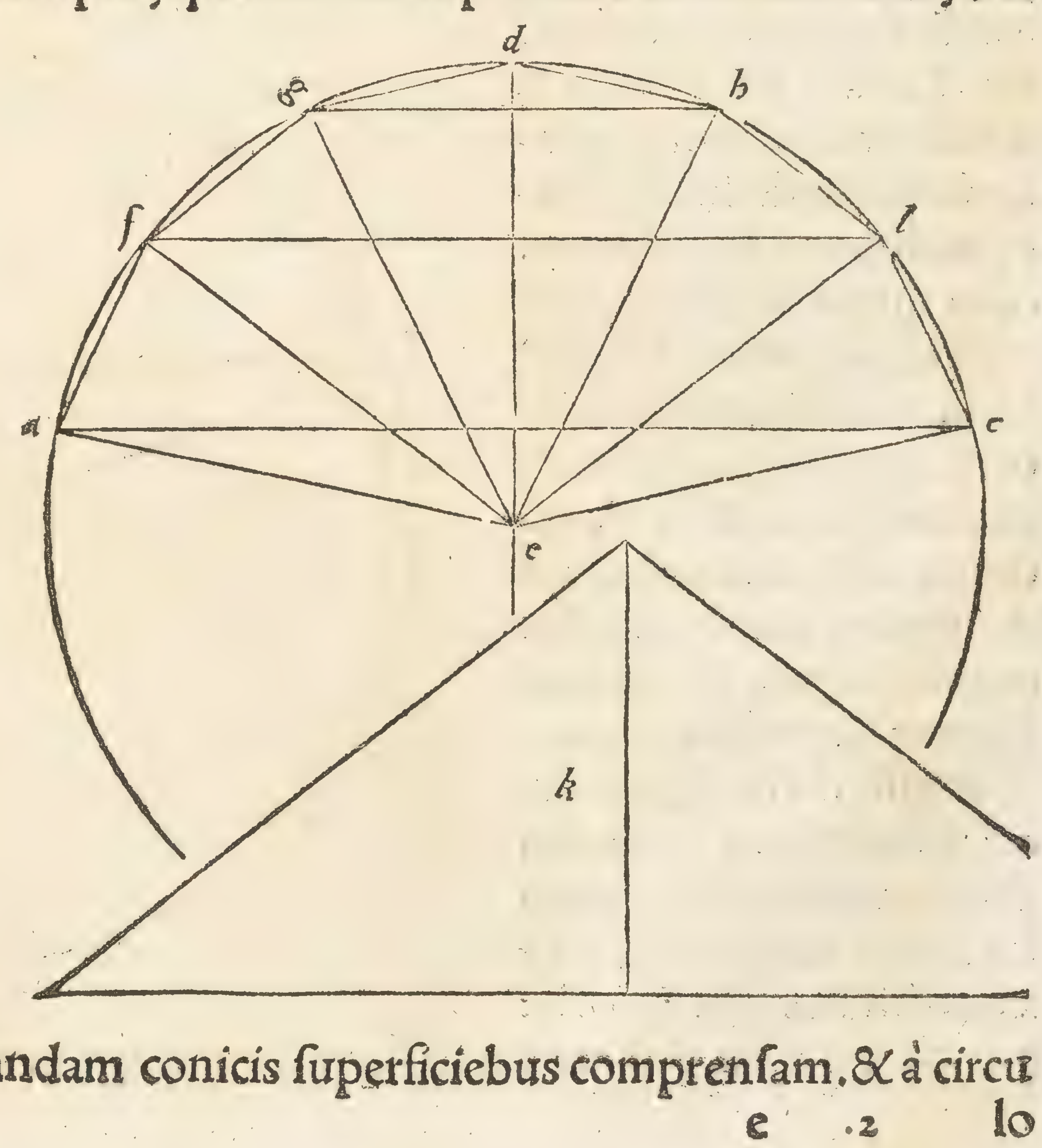
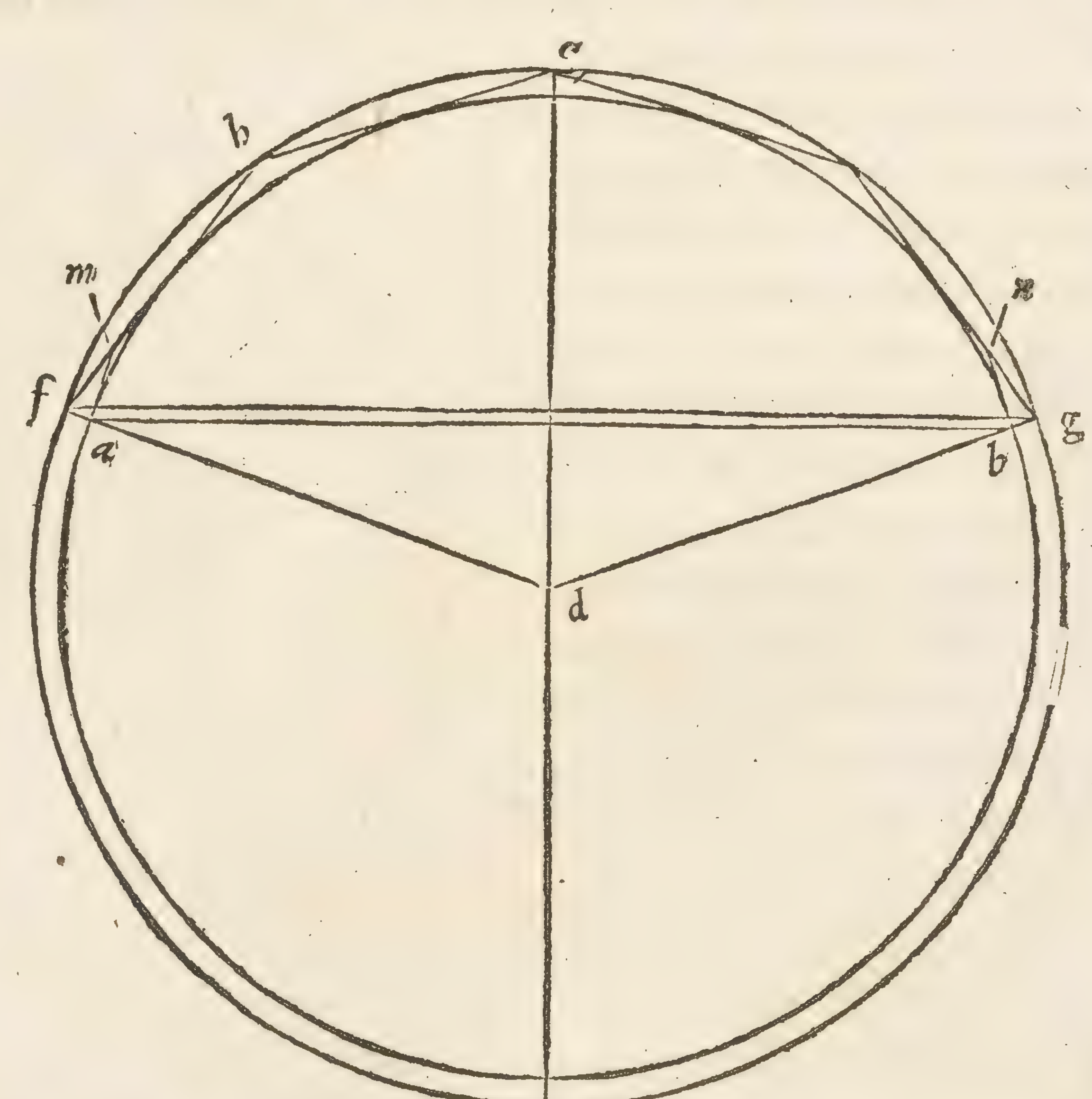


FIgura portioni ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, unà cum cono illo qui baſim habeat eandem cum figura, uerticem uero centrum ſphæræ, æquatur illi cono, cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei figuræ dictę: altitudo uero æqualis lineæ, quæ à cẽtro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter ducta. 36 Eſto ſphæra, et maximus in ea circulus & portio ſemicirculo minor a b c, & centrum e: & ſcribatur in a b c portione figura parium laterum & æqualium, excepta a c baſe, ſimiliter ut prius: & quieſcente b e, circumferatur ſphæra, quæ faciet figurã quandam conicis ſuperficiebus comprenſam. & à circu



lo cuius diametros eſt a c, conus erigatur, qui uerticem habeat centrum ſphæræ. & ſumat̃ conus k, qui baſem habeat æqualem ſuperficiei figuræ, altitudinem uero æqualẽ ei quæ à centro e ducitur perpendiculariter ad unum latus figuræ. Demonſtrare itaq; oportet, quod conus k æquetur figuræ dictæ, unà cum cono a e c. erigãtur etiam coni à circulis, quorum diametri ſunt g h, f l, qui uerticem habeant punctum e. Igitur rhombus g b h e ſolidus, æqualis eſt cono cuius baſis æquatur ſuperficiei g b h: coni altitudo uero ei quæ ab e ad g b, ſit perpendiculariter ducta. Reſiduum uero quod continetur ſub ſuperficie intermedia inter planas ſuperficies, quæ ſunt ſecũdum g h, f l, & ſub conicis f e l, g e h, æquatur cono cuius baſis æqualis ſit ſuperficiei intermediæ inter æquediſtantes planas, quæ ſunt ſecũdum g h, f l: altitudo uero æqualis ei quæ ſit à centro e ad f g perpendiculariter ducta. Rurſus reſiduum compræhenſum à ſuperficie intermedia planarum æquediſtantium, quæ ſunt ſecundum f l, a c, & à conicis a e c, f e l, æquatur cono cuius baſis æqualis eſt ſuperficiei, quæ intermedia eſt inter planas æquediſtantes, quæ ſunt ſecundum f l, a c, altitudo uero ei quæ ducta ſit perpendiculariter ab e ad f a. Prædicti igitur coni æquales erunt figuræ unà cum cono a e c. & altitudinem quidem habent eam quæ ab e ad unum latus figuræ perpendiculariter ſit ducta, baſes uero æquales ſuperficiei a f g b l c figuræ. Habet aũt & conus k eãdem altitudinem, & baſem æqualem ſuperficiei dictæ figuræ: quare erit æqualis dictis conis. Coni uero dicti oſtẽſi ſunt æquales eſſe dictæ figuræ, unà cum a e c cono. Igitur & k conus æquat̃ dictæ figuræ, unà cũ a e c cono. Ex hoc igitur manifeſtũ eſt, quod conus qui baſem habeat circulum, cuius ſemidiametros æqualis ſit ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis figuræ, ducta ſit: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphæræ: maior eſt figura portioni inſcripta unà cum cono, &c. nam dictus conus maior eſt cono æquali figurę, unà cum cono, &c. qui conus baſem habeat baſem figuræ portionis ad centrum: hoc eſt, qui baſem habeat æqualem ſuperficiei figuræ, altitudinem uero æqualem ei quæ ſit à centro ad unum latus figuræ multorum angulorum perpendiculariter ducta. nam baſis illius, baſe huius maior exiſtit, & altitudo altitudine maior.

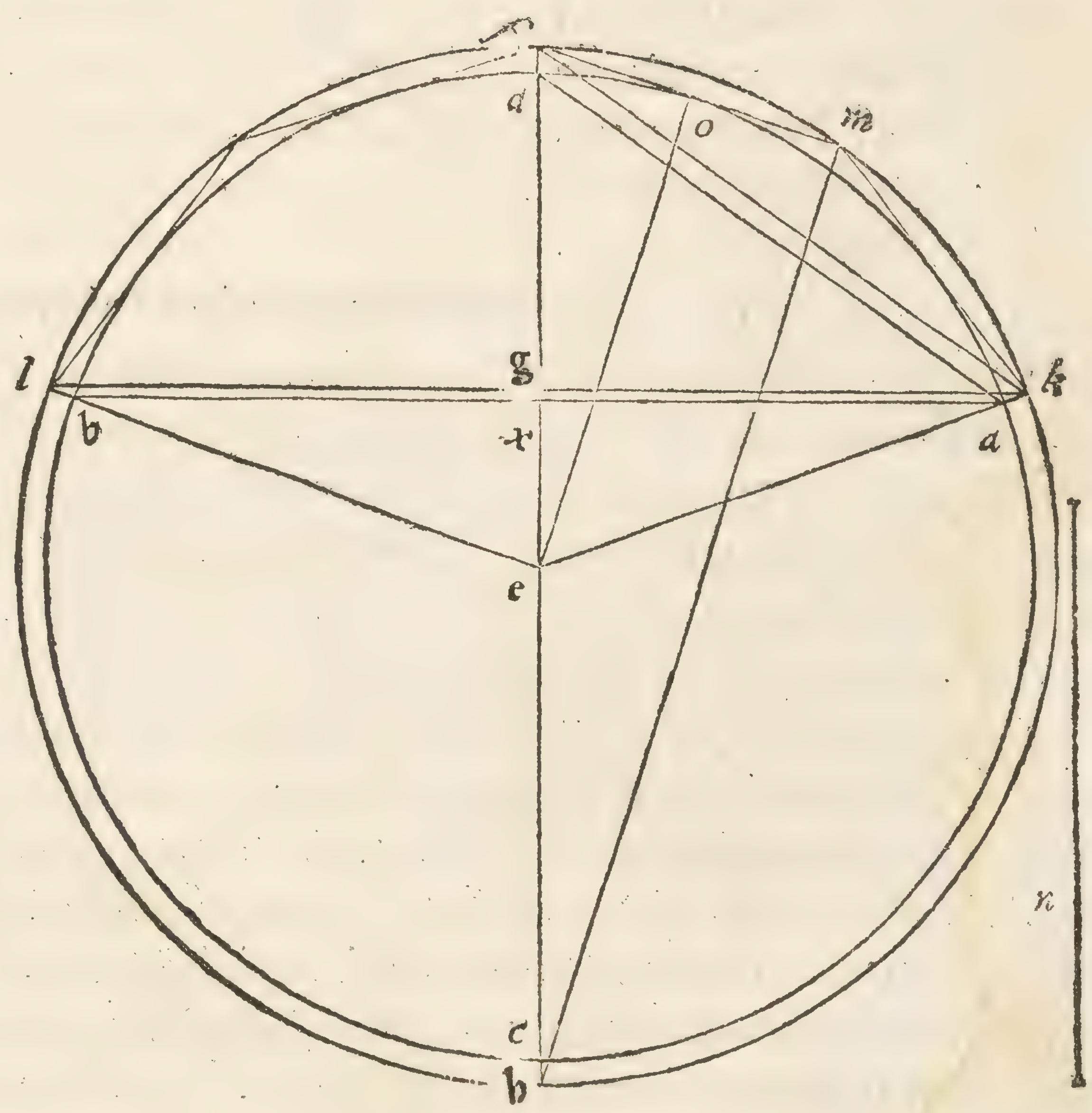
37 ESto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c, & ſecetur in ea portio ſemicirculo minor, quã ſecet a b, & ſit cẽtrum d, & à centro d ad a b ducantur a d, d b. & circa factam portionem circumſcribatur figura multorum angulorum, circa quam deſcribatur circulus, qui quidem habebit idem centrũ cum a b c circulo. quod ſi quieſcẽte e k circumferatur dicta figura donec ad locum redeat unde moueri cœpit, circulus circumſcriptus ſecundum ſphæræ ſuperficiẽ feretur: & anguli dictæ figuræ circulos deſcribent, quorum diametri erunt lineæ angulos figuræ iungentes, quæ æquediſtãtes erũt ipſi a b:



puncta uero, in quibus latera figuræ contingunt circulum minorem, circulos deſcri-

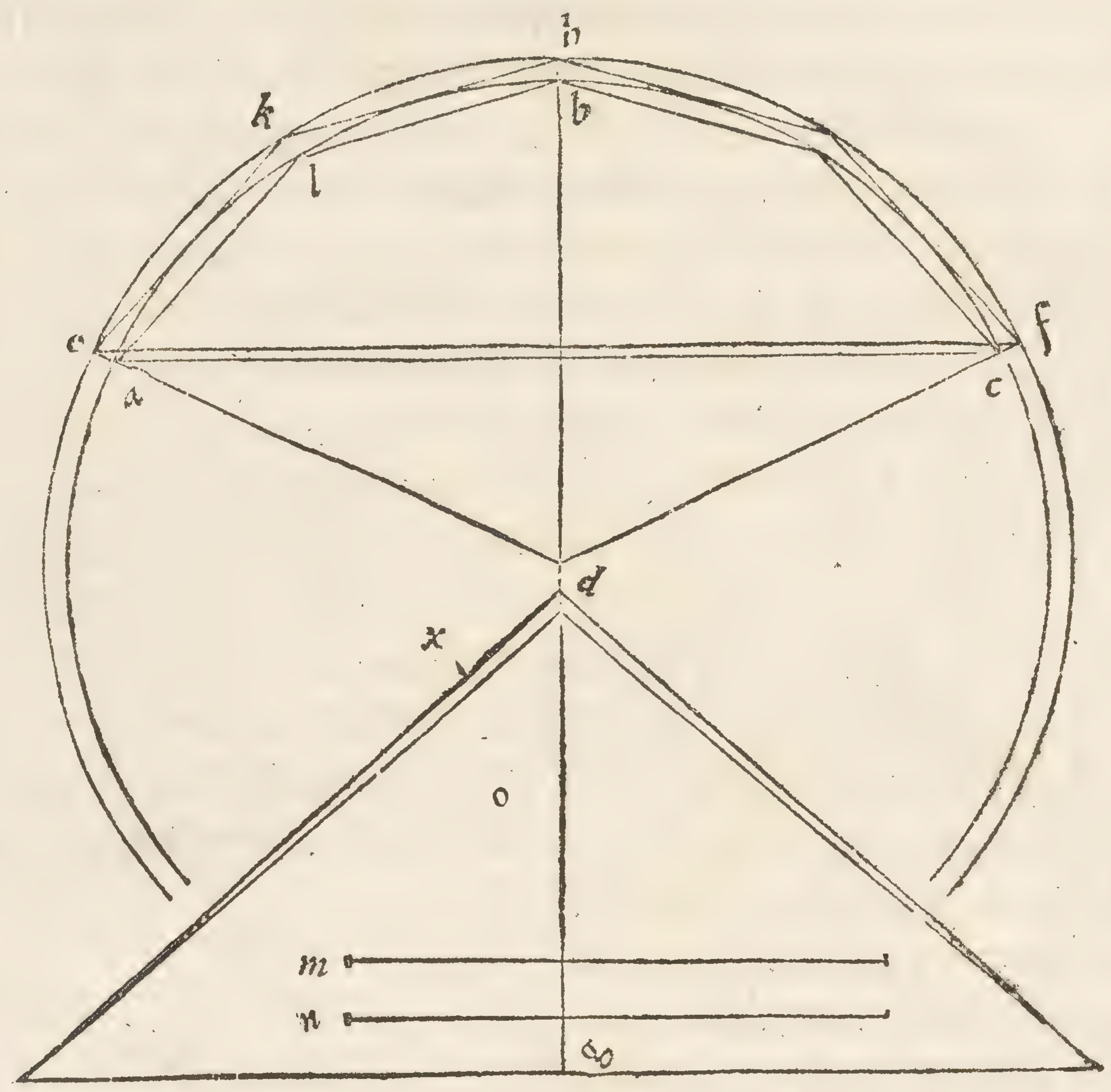
deſcribent in minori ſphæra, quorum diametri erunt lineæ continuantes puncta contactuum æquediſtantes lineæ a b, latera uero dictæ figuræ ſecundum conicas ſuperficies ferentur. & figura circumſcripta ſub conicis ſuperficiebus continetur, cuius baſis circulus eſt, qui eſt circa f g diametrũ: dictæ uero figuræ ſuperficies eſt maior ſuperficie minoris ſectionis, cuius baſis eſt circulus qui eſt circa a b diametrum. Ductæ enim ſunt contingentes a m, b n. quare ſecundum conicas ſuperficies ferentur: & figura quæ cauſatur à figura multorum angulorum, circumuoluta a m h e n b, maiorem habebit ſuperficiem quàm portio ſphęræ, cuius baſis eſt circulus circa a b conſtitutus. nam utræq; in eodem plano exiſtunt, & eundem terminum habent, circulum circa a b deſcriptum. & portio à figura comprænhenditur. cæterum conica ſuperficies ab f m g n producta, maior eſt ea quæ ab m a n b effecta eſt. nam f m maior eſt m a: nam ſubtenditur rectæ. linea uero n g, maior n b. cũ autem hoc ſic ſe habeat, maior erit ſuperficies ſuperficie. nam hæc ſunt in his quæ ſumpta fuerunt, demonſtrata. Manifeſtum eſt igitur, quod circumſcriptæ figuræ ſuperficies maior eſt ſuperficie portionis ſphæræ minoris. Inſuper manifeſtũ eſt, quod ſuperficies inſcriptæ figuræ quæ circa portionem exiſtit, æqualis eſt circulo cuius ſemidiametros poſſit id quod ſub uno latere figuræ continetur, & ſub omnibus ſimul lineis continuantibus angulos dictæ figuræ, & dimidia baſe dictæ figuræ multorum angulorum, ſecundum quod deſcripta fuit figura ſolida in maiori ſphæra deſcripta. Hoc autem per ea quæ antè deſcripta ſunt, manifeſtum eſt.

SVperficies figuræ quæ circa ſphæræ portionem ſit deſcripta, eo circulo maior exiſtit, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineæ, quæ à uertice portionis ad circũferentiã circuli ſit ducta, qui circulus baſis portionis exiſtat. Eſto ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d, centrum eius e. Deinde circa portionem deſcribatur figura multorum angulorum l k f, & circa hãc deſcribatur circulus, & fiat figura, ut prius circumuoluendo, &c. deinde eſto circulus n, cuius ſemidiametros poſſit id quod continetur ſub uno latere figuræ, & ſub omnibus ſimul coniungentibus angulos, & dimidia k l. uerũ idem ſpacium dictũ æquatur ei quod ſub m h & f g continetur, quæ eſt altitudo portionis maioris ſphęræ. Hoc autem prius oſtẽſum eſt. ſemidiametros igitur circuli n, poteſt æquale ei quòd ſub m h, g f continetur. ſed g f quidem maior eſt d x, quæ eſt altitudo minoris portionis. nam ſi iungamus k f, erit æquediſtans ipſi d a. Eſt autem & a b æquediſtans ipſi k l, & conus eſt f e. Triangulus igitur f k g, ſimilis eſt triangulo d a x. & maior eſt f k quàm d a. maior eſt igitur etiã f g quàm d x. At uero m o æquatur ipſi o f, ipſa uero h e ipſi e f. eſt igitur e o æquediſtans ipſi m h: igitur m h dupla eſt e o. Sed etiam c d dupla eſt ipſius e o. quare c d æqualis eſt ipſi m h. Quod aũt ſub c d & d x continetur, eſt æquale quadrato a d. Superficies igit̃ figuræ k f l, 38



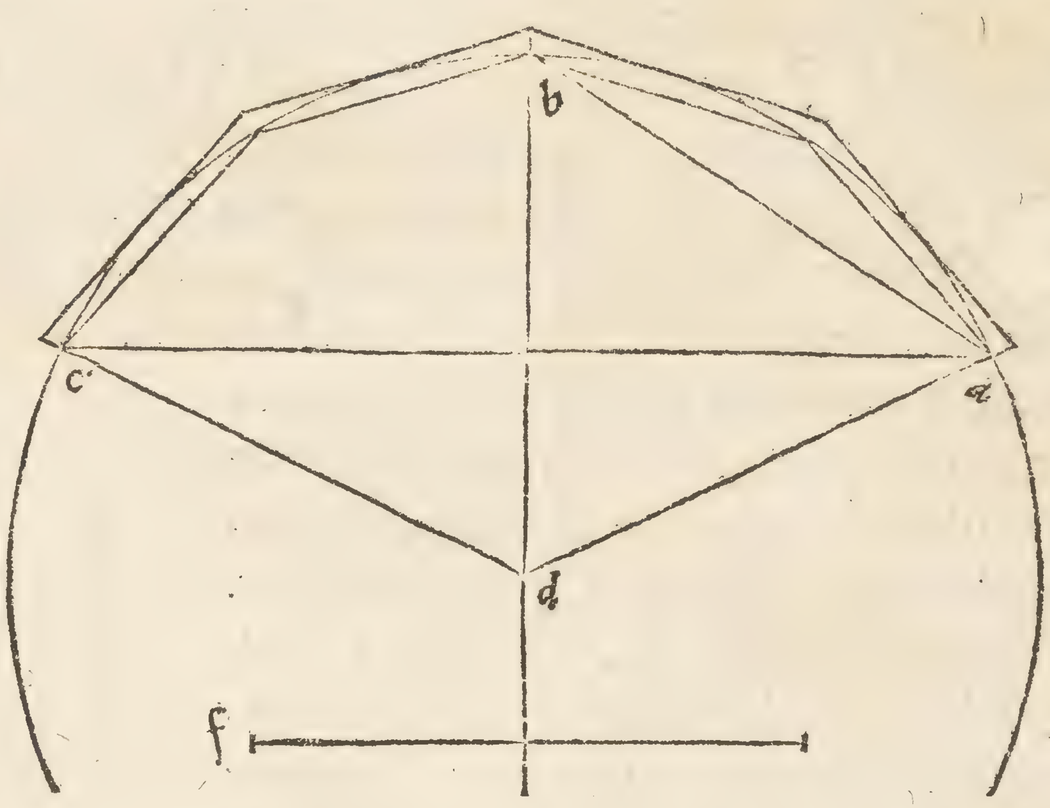
maior eſt circulo cuius ſemidiametros ſit æqualis ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta ſit, qui eſt baſis eius portionis quæ eſt circa diametrũ a b. quoniam n circulus æqualis eſt ſuperficiei figuræ circa portionẽ deſcriptæ.

39 FIgura circa ſphæræ portionem deſcripta, unà cum cono cuius baſis ſit circulus circa k l diametrum conſtitutus, uertex centrũ ſphæræ æqualis eſt cono, cuius baſis ſit ęqualis ſuperficiei figuræ: altitudo uero æqualis ei lineę, quæ à cẽtro ad latus figurę ſit perpendiculariter ducta, quæ quidem ſemidiametro quoq; ſphęræ inuenitur æqualis. Nã figura portioni circumſcripta, eſt in portione maioris ſphærę inſcripta, cuius centrum eſt idem cum minori. unde conſtat, quod propoſitum eſt ex antè deſcripta figuratiõe. Ex hoc igitur manifeſtũ eſt, quod figura circumſcripta unà cum cono, maior eſt eo cono qui baſim habeat circulum, cuius ſemidiameter æqualis ſit lineæ ductæ à uertice portionis ſphæræ minoris, ad circumferentiam circuli, qui ſit baſis portionis dictæ: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphæræ. Nam conus qui erit æqualis dictæ figurę, unà cum cono maiorem baſim habebit, quàm ſit dictus circulus: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphęræ minoris. Eſto item ſphæra, & maximus in ea circulus & portio a b c, minor ſemicirculo, & cẽtrum d: & intra a b c portionem inſcribatur figura multorum & parium angulorum, & huic ſimilis circumſcribatur eidem, & ponantur latera lateribus æquediſtantia. & circulus circumſcribatur figuræ circumſcriptæ, & ut prius quieſcente g h, circuli circumducti producant figuras conicis ſuperficiebus compræhenſas. Oſtendere oportet, quod circumſcriptæ figurę ſuperficies ad ſuperficiem inſcriptę eam habet proportionem, quæ eſt lateris circũſcriptæ ad latus inſcriptæ duplicatã. Figura uero ipſa, ſimul cum cono ad figurã, habet eandẽ proportionem triplicatam. Eſto m circulus, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum ſub uno latere figuræ, & omnibus ſimul lineis angulos continuantibus, unà cum dimidia e f continetur: erit itaq; m circulus æqualis ſuperficiei figurę. Sumatur deinde circulus n, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum ſub uno latere inſcriptæ figuræ, & omnibus ſimul lineis iungentibus angulos unà cũ dimidia a c. Hic quoq; circulus erit æqualis ſuperficiei figuræ inſcriptæ. Verum dicta ſpacia habẽt inter ſe eam proportionem, quam habet quadratum lateris e k ad quadratum a l. Igitur ut figura ad figuram, ita m circulus ad n circulum. Quare manifeſtũ eſt, quod ſuperficies figurę circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ figuræ, habet eam proportionem duplicatam, quã habet e k ad a l: eandem uidelicet, quam figura ad figuram. Eſto item conus x, qui baſim habeat æqualem circulo m, altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ minoris. Hic conus æqualis eſt figuræ circumſcriptæ unà cum cono illo, cuius quidẽ coni baſis eſt circulus qui eſt circa e f



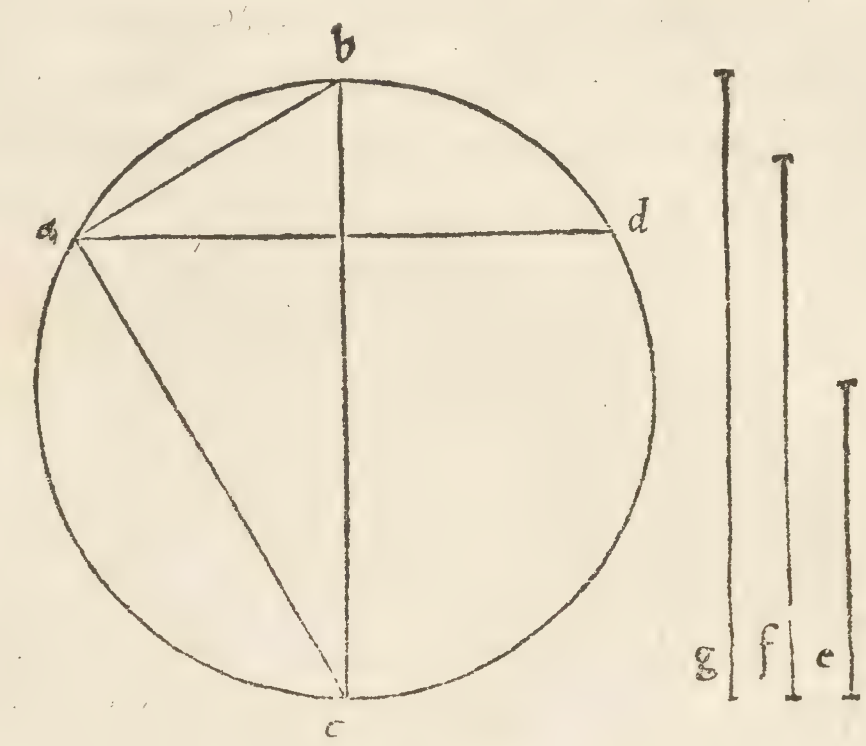
ea e f diametrum, uertex uero d. Eſto item alius conus o, qui baſim habeat æquale ipſi n, altitudinem uero æqualem ei quæ ab ipſo d ad a l perpendiculariter ducta ſit. hic quoq; figuræ inſcriptæ unà cum una cono eſt æqualis, cuius quidem coni baſis eſt circulus circa a c diametrum deſcriptus, uertex uero d cētrum. Hæc enim omnia prius deſcripta fuerunt. Quoniam igitur ſicut e k ad ſemidiametrum ſphæræ minoris, ita a l ad ductā à centro perpēdiculariter ad ipſam a l. Oſtenſum aūt fuit, quod ſicut e k ad a l, ſic ſemidiametros circuli m ad ſemidiametrū circuli n, et etiam diametros ad diametrum. Erit igitur, ſicut diametros circuli illius qui eſt baſis x, ad diametrum circuli qui eſt baſis ipſius o, ita altitudo coni x ad altitudinem coni o. quare ſequitur, conos x & o ſimiles eſſe. conus ergo x habet ad conū o, eā quæ eſt diametri ad diametrū proportionem triplicatam. Vnde manifeſtum eſt, figuram quoq; circumſcriptam unà cum cono ad figuram inſcriptam, unà cum cono eam habere quam e k ad a l proportionem triplicatam. quare, &c.

SVperficies cuiuſcunq; portionis ſphęræ, quæ quidem portio ſit dimidia ſphæra minor, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros æquatur lineæ illi, quæ à uertice portionis ad circumferētiam circuli ducta ſit, qui circulus portionis eſt baſis. 40 Eſto ſphęra, et maximus in ea circulus a b c. itē ſectio in ea minor dimidia ſphæra, cuius baſis ſit circulus circa a c cōſtitutus, erectus ſuper a b c circulo. & ſumatur circulus f, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineæ a b. Oportet itaq; demōſtrare, ſuperficiē a b c portionis ęqualem eſſe circulo f. nā ſi non ſit: eſto primò maior dicta ſuperficies circulo f, & ponatur d centrū, & ab ipſo duę lineę ductę ad a, & ad c extrà educantur. Cū igitur ſint duę

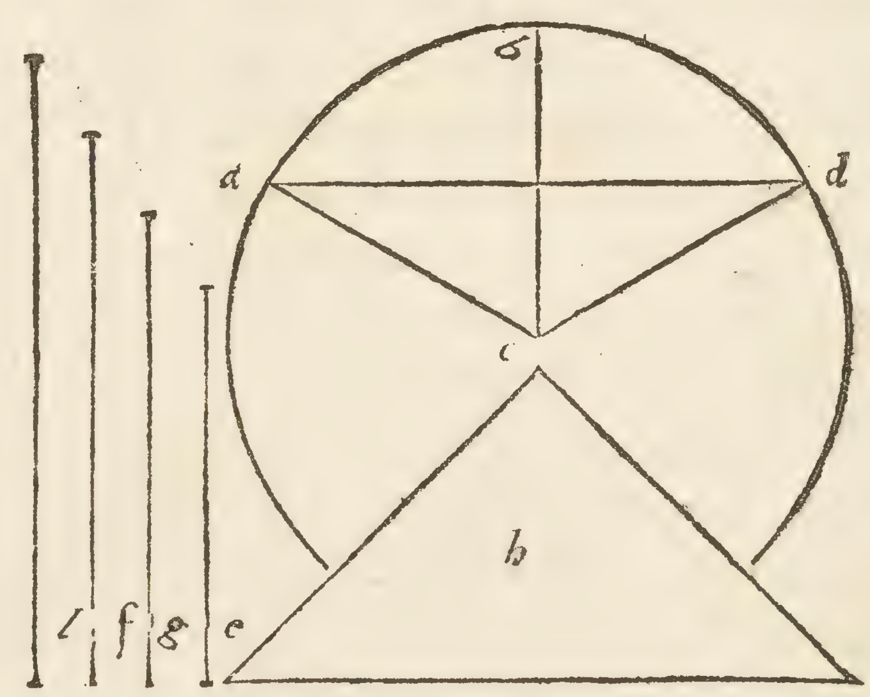


magnitudines inęquales, ſuperficies uidelicet portionis, et f circulus, deſcribemus duas figuras multorum angulorum, & parium & ęqualium laterū, omnino ſimiles, unam circa ſectorem circuli a b c, alteram intra eundem, ita ut circumſcriptę ad inſcriptam ſit minor proportio, quàm ſuperficiei portionis ſphęrę ad circulum f. circumuoluto deinde circulo, ut prius, duas figuras efficiemus conicis ſuperficiebus compręhenſas, quarum altera circumſcripta, altera inſcripta erit: & ſuperficies circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptę eandem habebit proportionem, quam circumſcripta figura habet ad inſcriptam. nam utraq; proportio eſt duplicata illa quam habet latus circumſcriptę, ad latus inſcriptę figurę multorum angulorum. Sed circumſcripta multorum angulorū figura ad inſcriptā, minorem habet proportionem, quàm dictę portionis ſuperficies ad circulum f. maior autem eſt circūſcriptę figurę ſuperficies ſuperficie portionis. igitur & ſuperficies figurę inſcriptę maior erit f circulo. quod quidem eſſe non poteſt. Nam ſuprà demonſtratum eſt, dictam figurę ſuperficiem tali circulo minorem eſſe. Eſto ſecundò, quod circulus ponatur maior eſſe ſuperficie, & ſimiliter circumſcribatur & inſcribatur figura altera alteri ſimilis, & circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm circuli f ad ſuperficiem figurę: & item demonſtrabitur deducendo ad idem inconueniens, circulum f non poſſe eſſe maiorem dicta ſuperficie. Cum igitur neq; maior eſſe poſſit dicta ſuperficies f circulo, neq; minor, ut demonſtratum eſt, ſit neceſceſſariò, ut ſit eidem æqualis.

41 SI portio ſphęrę ſit maior dimidia ſphęra, rurſus eius ſuperficies æquat̃ circulo, cuius ſemidiametros ſit ęqualis lineę illi quę ducta ſit à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis dictæ portionis. Eſto ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d, & intelligatur ipſa ſecta à plano ſecũdum a d, & ſit a b d minor dimidia ſphęra, et diametrus b c ſecet ad angulos rectos diametrum a d, & ipſa c & b iungantur c a, b a: & ſit e circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis ipſi a b. Sit autem f circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis ipſi a c. & g ſit circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis b c. Circulus igitur g, ęqualis eſt duobus ſimul circulis e, f. Circulus autem g, ęqualis eſt toti ſuperficiei ſphęræ, cum utraq; ſint quadrupla circuli, qui eſt circa diametrum b c. circulus e, æqualis eſt ſuperficiei a b d portionis minoris: nam hoc eſt demonſtratũ proxima ſuperiori in portione minori dimidia ſphæra. reliquus ergo circulus f, æqualis eſt ſuperficiei a c d portionis maioris dimidia ſphæra.



42 SVicũq; portioni ſphæræ æquatur conus ille, qui baſim habeat æqualẽ ſuperficiei ſectionis ſphæræ, quæ ſecundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero æqualem ſphæræ ſemidiametro. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b d, centrum c. & conus baſem habens circulũ æqualem ſuperficiei, quæ ſecundum a b d circũferentiam habetur, altitudinem uero æqualem ipſi b c. Oſtendẽdum eſt, quod portio a b c d, æqualis eſt dicto cono. Nam ſi non: eſto primò portio maior cono, & ponatur h conus qualis dictus eſt. Cum igitur duæ ſint magnitudines inęquales, portio ſcilicet, & conus h, inueniantur duæ lineæ l & e, l maior, e minor, quæ habeãt minorẽ proportionem, quàm portio ad conum: & ſumantur duæ lineæ, f, g: ita ut l tantum excedat f, quantum f excedit g, & g, e. & circa planam circuli portionem circumſcribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterũ, & parium angulorum: & altera huic ſimilis inſcribatur eidem, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam ſit maior proportio, quàm l ad ipſam f. & ſimili modo, ut prius factum eſt, circũducto circulo producentur duæ figuræ conicis ſuperficiebus compræhenſæ. Figura itaq; circumſcripta, unà cum cono, qui uerticem habeat punctum c ad figuram inſcriptam, unà cum cono habet eam proportionem triplicatam, quam habet latus figuræ multorum angulorum circumſcriptæ, ad latus inſcriptæ. Verum latus circumſcriptę ad latus inſcriptæ, habet minorem proportionem quàm l ad f. Figura igitur ſolida quæ dicta eſt, minorem habebit proportionem quàm eſt l ad f triplicata. At uero l ad e maiorem habet proportionem, quàm eſt l ad f triplicata. figura ergo ſolida circumſcripta portioni, ad inſcriptam figuram, minorem habet proportionem, quàm eſt l ad e. Verum l ad e minorem habet, quàm portio ſolida, ad conum h. quare figura ſolida circumſcripta portioni, ad inſcriptam eidem, minorem habet



bet proportionem, quàm portio ſolida ad conum h: & permutatim. figura ſolida uero circumſcripta maior eſt portione. Inſcriptam ergo figuram ipſi portioni maiorem eſſe cono concludemus, quod ſanè eſſe non poteſt. demõſtratum enim eſt in ſuperioribus, dictam figurã minorẽ eſſe oportere eo uidelicet cono, qui baſim habeat circulũ, cuius ſemidiametros æqualis ſit lineæ à uertice portionis ad circũferentiam portionis ductæ, qui circulus baſis portionis exiſtat: altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ. Hic aũt eſt dictus conus h. habet enim baſem circulum æqualem ſuperficiei portionis, hoc eſt dicto circulo, & altitudinem æqualem ſemi diametro ſphæræ. Portio igitur ſolida non eſt maior cono h. Eſto ſecundò conus h maior ſolida portione: rurſus atq; ſimiliter l ad ipſam e, cum ſit maior, ea minorẽ habeto proportionem, quàm conus ad portionem. & ſimiliter ſumantur f g, ita ut latus figuræ multorum angulorum & parium circumſcriptæ circa planam portionem circuli ad latus inſcriptæ eidem, minorem habeat proportionem quàm eſt l ad f. & fiant circa portionem ſolidam figuræ ſolidæ, ut ſuperius fecimus. Demonſtrabimus itaq; eodem modo, quòd figura ſolida portioni ſolidæ circumſcripta, ad inſcriptã figuram minorem habeat proportionem, quàm l ad e, & quàm h conus ad portionem. quare portio quoque ad conum minorem habebit proportionem, quàm figura ſolida portioni inſcripta ad figuram circumſcriptam. Portio autem maior eſt figura ſibi inſcripta. igitur concludemus, h conum eſſe figura circumſcripta maiorem: quod item eſſe non poteſt. nam hoc demõſtratum eſt, quod talis conus neceſſariò minor eſt figura portioni circumſcripta. Ex qua re colligimus, portionem cono dicto eſſe æqualem.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri primi Finis.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER ſecundus.

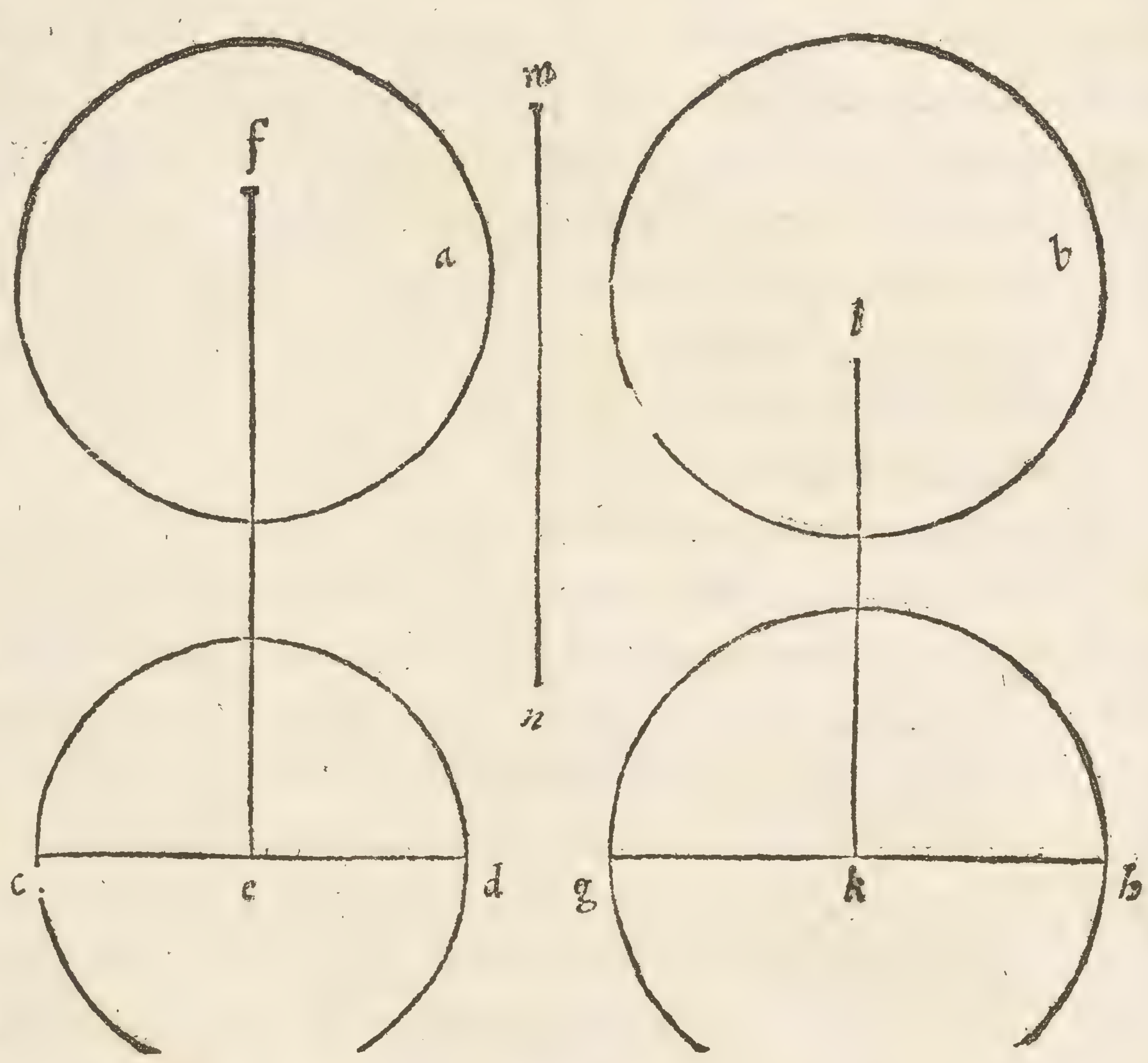
ARCHIMEDES DOSITHAEO Salutem.

ANTEA quidem mihi iuſſeras, ut problematum demonſtrationes ſcriberem, quorum ipſe iam propoſitiones miſeram ad Cononem. Contingit autem eorum plurima ſcribi per theoremata, quorum iampridem ad te miſeram demonſtrationes. Quòd uidelicet cuiuslibet ſphæræ ſuperficies maximi in ſphæra circuli quadrupla exiſtit. Et quòd ſuperficiei cuiuſcunque ſphæræ circulus ille eſt æqualis, cuius ſemidiametros diametro ſphæræ eſt æqualis. Item cuiuſcunque portionis ſphæræ ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros eſt æqualis lineæ rectæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis, ducatur. Itẽ quod cylindrus qui baſem habeat maximum in ſphæra circulum, altitudinem uerò æqualem diametro ſphæræ, ipſeq; ſeſquialter eſt magnitudini ſphæræ, & eius ſuperficies ſuperficiei ſphæræ ſeſquialtera habetur. Item quòd omnis portio ſolida ſphæræ æqualis eſt cono, qui baſim habeat circulum, qui ſit æqualis ſuperficiei portionis ſphæræ: altitudinem uerò æqualem ſemidiametro ſphæræ. Quæcunq; igitur inſpecta theoremata & problemata ex his quę dicta ſunt oriuntur, ad te miſſa ſunt, omnia in hoc libro conſcripta. Quæ uero ex alia inſpectione colliguntur, ut quæ de elicis & conoidibus, nitor quàm celeriter mittere. Primũ autem quod

f pro-

propoſitum fuerat,habebatur huiuſmodi. Sphæra data ſpacium planum inueni re, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. Hoc autem manifeſtum & demonſtratum eſt ex prædictis inſpectis & theorematibus. Spacium enim planum quod cir circulo in ſphæra maximo ſit quadruplum, æquale eſt ſuperficiei ſphæræ.

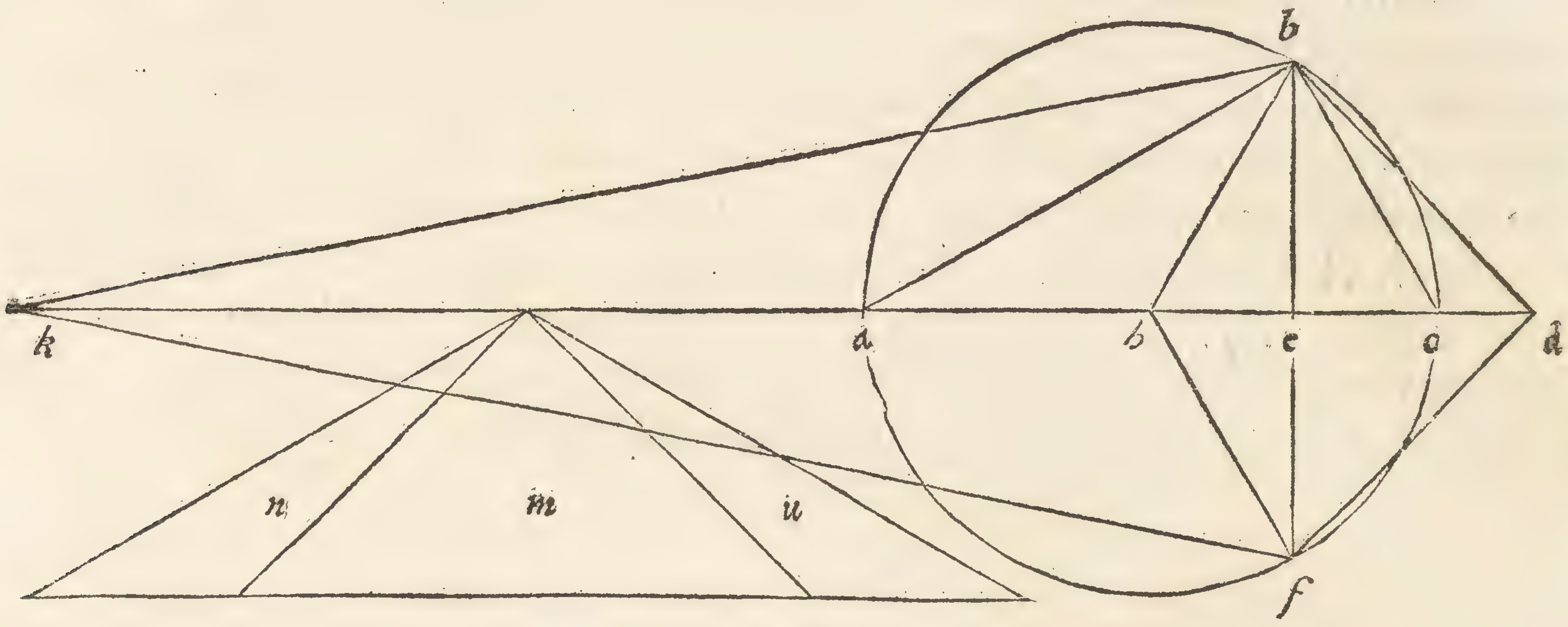
1 Secundum propoſitũ fuit, cono,ſiue cylindro dato ſphæram inuenire, dicto cono uel cylindro æqualem. Eſto datus conus,ſiue cylindrus,a: & ſphæra ipſi a æqualis,ſit b: & ponatur cylindrus c f d,qui ſit ſeſquialter dato cono, uel cylindro a. Sphæræ uero b cylindrus ſeſquialter eſto, qui baſem habet circulum,qui eſt circa diametrum g h: axem uero k l, æqualem diametro ſphæræ b.erit igitur e cylindrus æqualis cylindro k.cylindrorũ aũt æqualium baſes ſuis altitudinib. ſunt mutuæ in proportione. Sicut ergo e circulus ad k circulum, hoc eſt ſicut quadratum c d ad quadratum g h, ſic k l ad e f. Eſt autem k l æqualis ipſi g h.nam cylindrus ſeſquialter ſphæræ,axem habet æqualem diametro ſphæræ, & circulus k eſt in ſphæra maximus. ſicut ergo quadratum c d ad quadratum g h,ſic g h ad e f. Eſto id quod ſub c d, m n continetur,æquale quadrato g h. Sicut ergo c d ad m n, ſic quadratum c d ad quadratum g h, hoc eſt g h ad e f:& permutatim,ſicut c d ad g h,ita g h ad m n, & m n ad e f. Et utraque c d & e f data eſt. Igitur inter duas datas rectas lineas duæ mediæ proportionales ſunt,g h,m n.quare utraq; g h & m n data erit. Componetur autem iam propoſitum hoc modo. Eſto datus conus,ſiue cylindrus,a.oportet itaq; ipſi cono, uel cylindro, ſphæram æqualem conſtituere. Eſto coni,ſiue cylindri a,cylindrus ſeſquialter, cuius baſis ſit circulus qui eſt circa diametrũ c d, axis uero e f. & ſumantur inter c d & e f duæ mediæ proportionales g h,m n:ita ut ſicut c d ad g h,ita g h,ad m n,& m n ad e f.Et intelligatur cylindrus, cuius baſis ſit circulus, qui fiat circa diametrum g h, axis autem k l æqualis diametro g h.Dico iam,quod æqualis eſt e cylindrus ipſi k cylindro. Nam quoniã ſicut c d ad g h,ita m n ad e f.& permutatim,& g h eſt æqualis ipſi k l. Sicut igitur c d ad m n,hoc eſt quadratum c d ad quadratum g h,ſic e circulus ad k circulum. ſicut ergo e circulus ad k circulum,ſic k l ad e f.Cylindrorũ igitur e & k baſes, ſuis altitudinibus in proportione ſunt mutuæ. quare e cylindrus ipſi k cylindro erit neceſſario æqualis. Cylindrus uero k ſphæræ illius eſt ſeſquialter,cuius diametros eſt g h. Ergo ſphæra cuius diametros æquatur g h, hoc eſt b,æqualis eſt a cono,ſiue cylindro.



2 QVicunq; portioni ſphæræ conus ille habetur æqualis,qui baſim habeat eandem cum portione, altitudinem uero lineam rectã,quæ ad altitudinem portionis eandem habeat proportionem, quam ſemidiametros ſphæræ unà cum altitudine reliquæ portionis habet,ad eandem reliquæ portionis altitudinem.

Eſto ſphæra,& maximus in ea circulus,cuius diametros a c,& ſecet ſphæra à plano ſecundum b f, ad angulos rectos ſuper ipſam a c,& ſit centrum h,& fiat ſicut utraq; ſimul h a,a e ad a e,ſic d e ad c e.Item fiat ſicut utraq; ſimul h c,c e ad c e, ſic k e ad

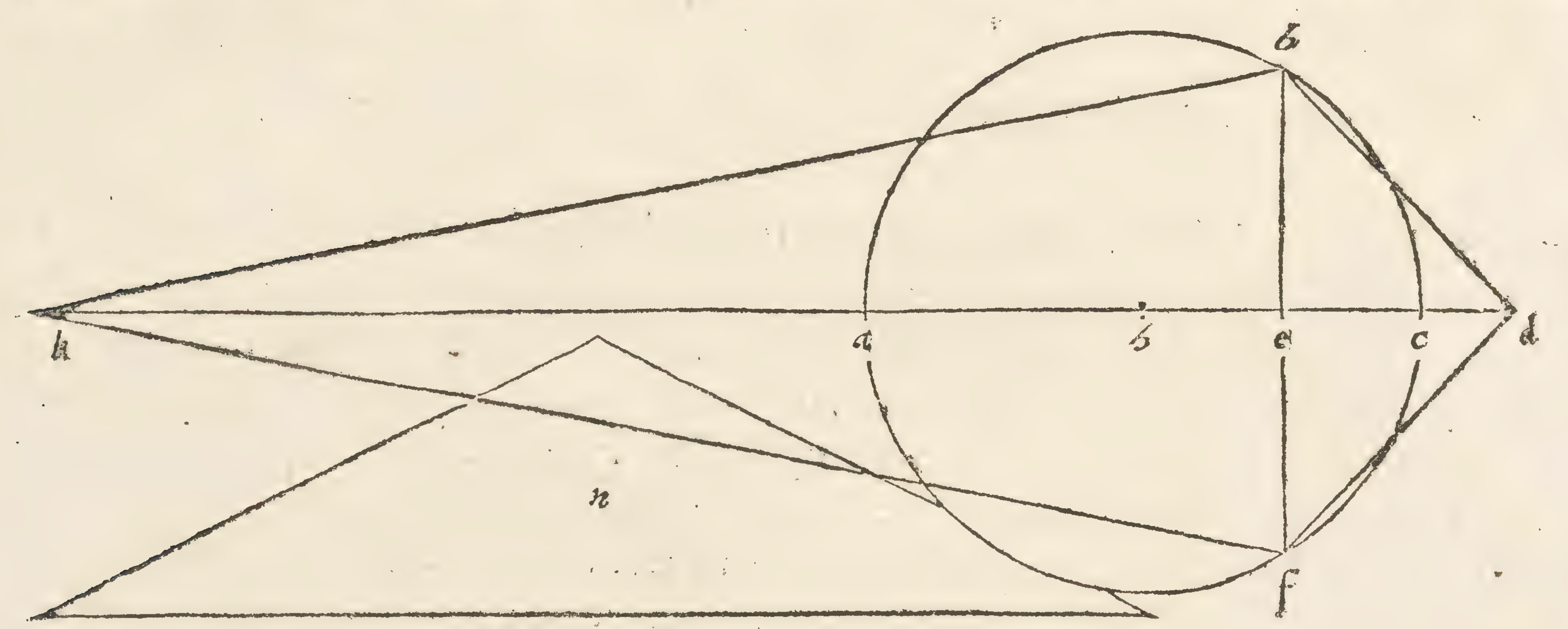
ad e a. Et erigantur coni utrinque à circulo circa b f diametrum conſtituto, uertices habentes puncta k d. Dico itaq;, quod b d f conus, æquatur ei quæ eſt ſecundũ c portioni ſphæræ, conus autem b k f portioni, quæ eſt ſecũdum a punctum. Iun-



gantur itaq; b h, h f: & intelligatur conus, qui baſim habeat circulum circa b f diametrum conſtantem, uerticem uerò punctum h. item alter conus m, qui baſim habeat circulum æqualem ſuperficiei b c f portionis ſphæræ: hoc eſt, habentem ſemidiametrum æqualem b c. altitudo uero coni ſit æqualis ſemidiametro ſphæræ. Erit iam conus m æqualis b c h f portioni ſolidæ. Hoc autem eſt oſtenſum in primo libro. Quoniam igitur eſt ſicut d e ad e c, ſic utraque ſimul h a, a e ad a e, diuidendo erit ſicut c d ad c e, ita h a ad a e: hoc eſt c h ad a e. & permutatim, ſicut d c ad c h, ſic c e ad e a. & coniungendo, ſicut h d ad h c, ita c a ad a e: hoc eſt quadratum c b, ad quadratum b e. Sicut ergo d h ad c h, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eſt autem c b æqualis ſemidiametro circuli m. At uero b e eſt ſemidiametros circuli circa b f diametrum conſtituti. Erit igitur, ut d h ad h c, ſic m circulus ad circulum circa diametrum b f conſtitutum, & h c eſt æqualis axi coni m. ergo ſicut d h ad axem coni m, ſic circulus m ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. Conus igitur qui habet baſem circulum m, & altitudinem ſphæræ ſemidiametrum, æqualis eſt b d f h ſolido rhombo. nam hoc in his quæ in primo libro ſumpta ſunt, demõſtratum fuit. Vel hoc modo cõcludemus: Quoniam eſt ſicut d h ad altitudinem m coni, ita m circulus ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. quare conus m æquabitur cono, cuius baſis ſit circulus circa b f diametrum conſtitutus, altitudo autem d h. nam iſtorum baſes altitudinibus ſunt mutuæ in proportione. ſed conus qui baſem habet circulum circa b f diametrum conſtitutum, altitudinem autẽ d h, æqualis eſt b d f h ſolido rhombo: conus uero m æquatur b c f h, ſolidæ portioni: & b c f h ſolida portio æqualis erit b d f h ſolido rhombo. Communi itaq; ſublato cono uidelicet cuius baſis eſt circulus circa b f diametrum conuolutus, altitudo autem e h: reſiduũ m ſcilicet b d f conus, æqualis erit b f c portioni ſphæræ. Similiter autem oſtendetur, b k f conum portioni ſphæræ b a f eſſe æqualem. Nam quoniã ſicut utraq; ſimul h c, c e ſe habet ad c e: ſic k e ad e a, diuidendo erit ſicut k a ad a e, ita h c ad c e. æqualis eſt aũt h c ipſi h a. quare & permutatim, ſicut k a ad a h, ita a e, ad e c. unde cõponendo, ſicut k h ad h a, ſic a c ad e c: hoc eſt, quadratũ b a ad quadratum b e. Ponatur itaq; rurſus circulus n, ſemidiametrum habens æqualem lineæ ductæ à uertice portionis b a f, ad circumferentiam baſis portionis, & intelligatur conus n, qui altitudinem habeat æqualem ſemidiametro ſphæræ: æqualis ergo hic erit b h f a ſolidæ portioni. nam hoc in primo fuit oſtenſum. Et quoniam demonſtratum eſt, ſicut k h ad h a, ita eſſe quadrati a b ad quadratum b e, hoc eſt quadrati ſemidiametri n circuli, ad quadratum ſemidiametri circuli circa b f diame

trum conuoluti: hoc eſt n circuli ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. at uero a h æquatur altitudini n coni. quare ſicut k h ad altitudinem coni n, ſic circulus n ad circulum circa b f diametrum cõſtitutum, altitudinem uero k h. Tota igit. a b f portio ſphęræ æquatur cono b k f, qui baſem habeat eãdem cum portione, & altitudinem æqualem ei, quæ eandem habeat proportionẽ ad altitudinem portionis ſphæræ, quam proportionem habet utraq; ſimul & ſemidiametrus ſphæræ, & perpendicularis reliquæ ſectionis ad perpendicularẽ reliquæ ſectionis. ſicut enim d e ad e c: ſic d f b conus, hoc eſt b c f portio ad b c f conum.

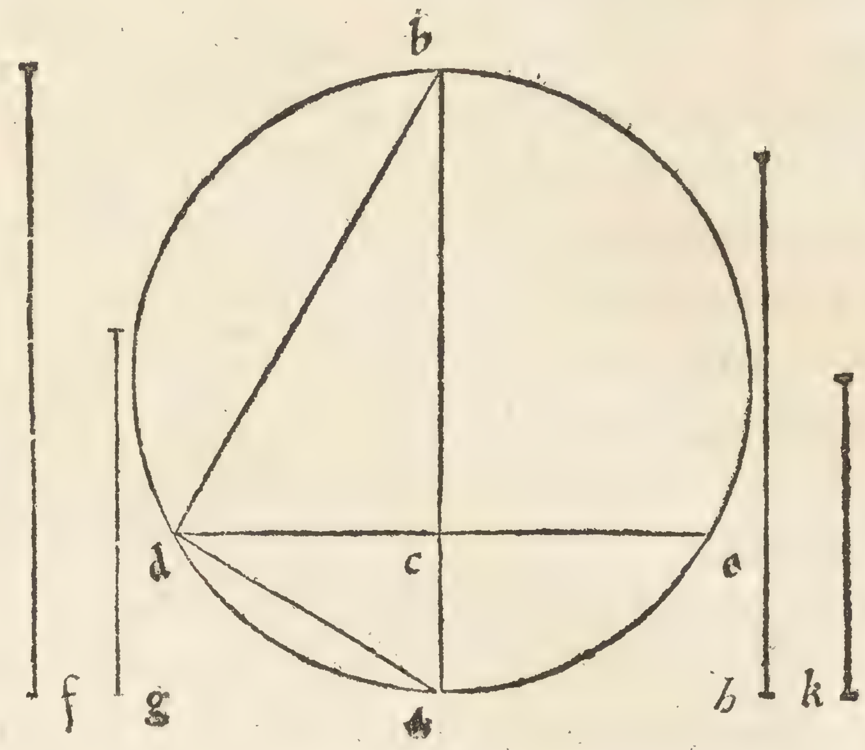
Eadem deſcriptione retenta, & eiſdem ſubiectis oſtendemus, quod k b f conus æqualis eſt a b f portioni ſphęræ. Eſto itaq; n conus, baſem habẽs ſuperficiei ſphęræ æqualem, altitudinem uero ſemidiametrũ ſphæræ. Conus igitur iſte eſt æqualis ſphæræ. nam ſphæra oſtenſa eſt quadrupla eſſe coni baſem habentis maximũ in ſphæra circulum, altitudinem autem ſemidiametrum ſphæræ. Sed & conus n



eſt quadruplus eiuſdem coni, cum baſis ſit quadrupla baſis. Nam ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea circuli, & altitudo altitudini æqualis. & quoniam ſicut utrũq; ſimul h a, a e ad a e, ſic d e ad e c, diſiũgendo & permutatim argumentabimur, ſicut h c ad c d, ita a e ad e c. Rurſus quoniã ſicut k e ad e a, ſic utraque ſimul h c, c e ad c e diſiungendo, & permutatim ſicut k a ad c h, hoc eſt ad h a, ſic a e ad e c: hoc eſt h c ad c d. & coniungendo. æqualis eſt autem a h, h c. Sicut ergo k h ad h c, ſit h d ad d c. & ſic tota k d ad d h, ut d h ad d c, hoc eſt k h ad h a. quod continetur igitur ſub d k, h a, æquatur ei quod ſub d h k cõtinetur. rurſus quoniã eſt ſicut k h ad h c, ſic h d ad c d, & permutatim. at uero ſicut h c ad c d oſtẽſum eſt, ſic eſſe a e ad e c. ſicut igitur k h ad a h, ſic a e ad e c. quare & ſicut quadratum k d, ad id quod continetur ſub k h, h d: ſic quadratum a c ad id quod continetur ſub a e, e c. quod continetur uero ſub k h, h d, oſtenſum eſt æquale eſſe ei quod ſub k d a h continetur. Sicut igitur quadratum k d ad id quod continetur ſub k d a h, hoc eſt k d ad a h: ſic quadratum a c, ad id quod ſub a e, e c continetur, hoc eſt ad quadratum e b. & a c, æqualis eſt ſemidiametro circuli n. ſicut ergo quadratum ſemidiametri n circuli ad quadratum b e, hoc eſt n circulus ad circulum circa b f diametrum conuolutum: ſic k d ad a h: hoc eſt k d ad altitudinem coni n. Conus igitur n, hoc eſt ſphæra, æqualis eſt b d f k ſolido rhombo. Vel ſic. eſt igitur ſicut circulus n ad circulum circa b f diametrum conſtitutum, ſic d k ad altitudinem coni n. Conus igitur n æqualis eſt cono, cuius baſis ſit circulus circa b f diametrum conſtans, altitudo d k. eorũ enim baſes ſuis altitudinibus ſunt in proportione mutuæ. ſed talis conus æqualis eſt b k f d ſolido rhombo. quare conus quoq; n, hoc eſt ſphæra, æquatur b f k d ſolido rhombo, ex conis b d f & b k f compoſito. quorum b d f conus oſtenſus eſt eſſe æqualis b c f portioni ſphæræ: reliquus igitur b k f conus erit neceſſario æqualis b a f reliquæ portioni ſphæræ.

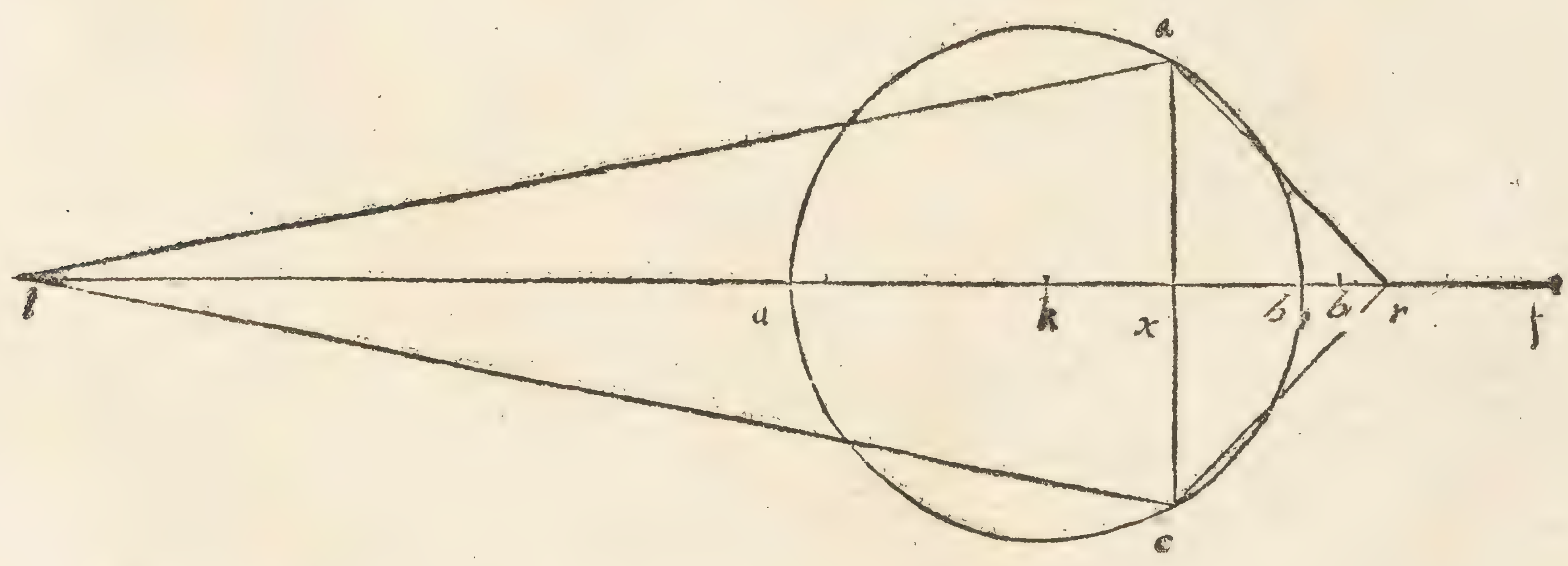
Datam

DAtam ſphæram ſic ſecare plana ſuperficie, ut portionũ ſuperficies inter ſe ſi 3
mile cuicũq; proportioni datæ retineant proportionẽ. Vt hoc exequamur, eſto hoc factũ eſſe. & ſit maximus in ſphęra circulus a d b e, diametros eius a b, & emittatur plana ſuperficies ad a b ſecũdum angulos rectos, & fiat à plana ſuperficie in a d b e circulo ſectio d e, & iungantur lineæ a d, b d. Quoniã itaq; proportio data eſt ſuperficiei d a e portionis, ad ſuperficiem d b e portionis: & ſuperficiei portionis d a e æqualis eſt circulus, cuius ſemidiametros æqualis eſt ipſi a d: ſuperficiei autem portionis d b e, æqualis eſt circulus, cuius ſemidiametrus eſt æqualis ipſi b d. Sicut autem dicti circuli inter ſe, ſic quadratum a d ad quadratum d b: hoc eſt, a c ad c b. Proportio igitur quæ eſt a c ad c b, erit data proportio. quare c punctum datum erit, & ſuper a b ad angulos rectos erecta eſt linea d e. ergo & plana ſuperficies, quæ eſt ſecundũ



d e, erecta ſtabit ſimiliter. Cõficietur autem ſic. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b d e, cuius diametros a b. proportio autem data ſit f ad g, & diuidatur a b ad punctum c. diuidatur ſphæra à plano ad angulos rectos ſuper a b linea recta conſtituto, & ſit communis ſectio d e, & iungantur a d, d b. & exponantur duo circuli h k: circulus h æqualem habens ſemidiametrum ipſi a d, circulus uero k æqualem ſemidiametrum ipſi d b habens. Eſt igitur h circulus æqualis ſuperficiei d a e portionis, k uero æqualis ſuperficiei d b e portionis. Hoc enim ante demonſtratũ eſt in primo libro. & quoniam data eſt ſuperficies quæ ſub a b d continetur, & c d perpẽdicularis exiſtit, erit ut a c ad c b, hoc eſt f ad g, ſic quadratum a d ad quadratum d b: hoc eſt quadratum ſemidiametri h circuli, ad quadratum ſemidiametri k circuli: hoc eſt h circulus ad k circulũ. hoc item eſt ſuperficies d a e portionis, ad ſuperficiem d b e portionis ſphæræ.

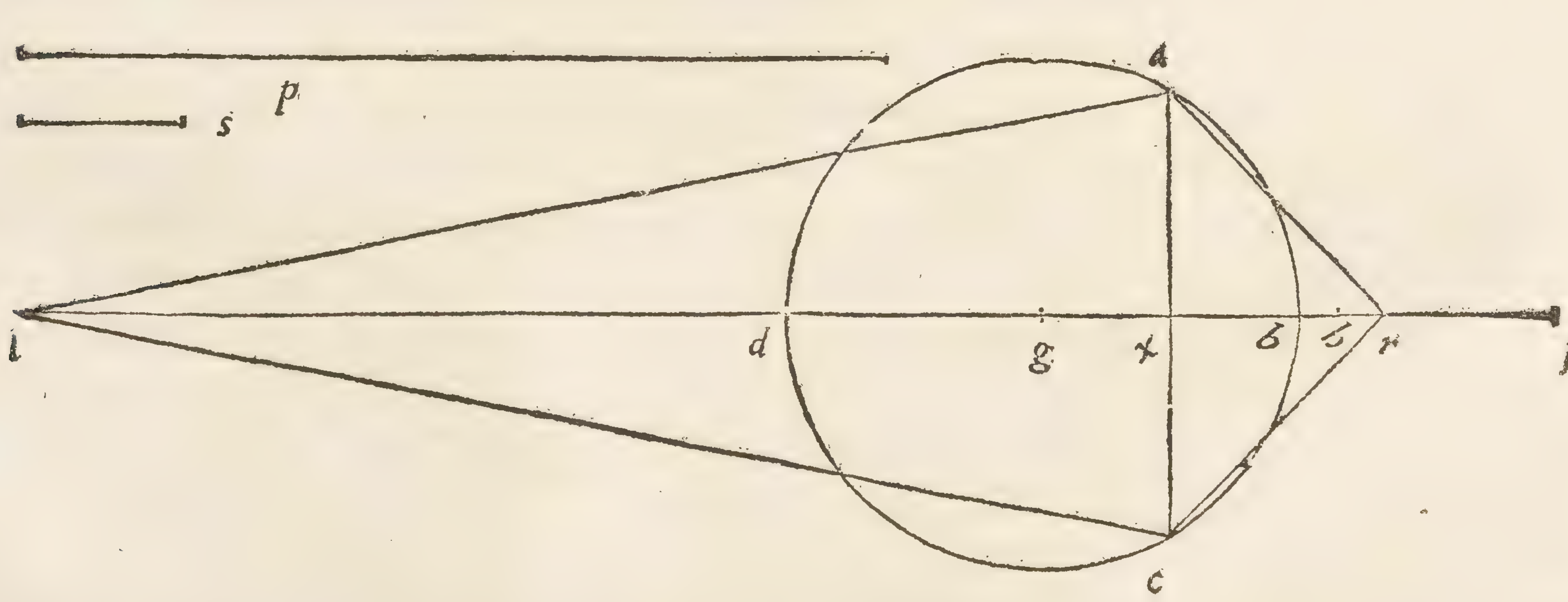
DAtam ſphæram ſic ſecare, ut portiones ſphæræ inter ſe eandem habeant 4
proportionem ei, quęcunq; data ſit proportioni. Eſto data ſphæra a b c d, oportet eam plano ſecare, ſic ut ipſæ ſphæræ portiones inter ſe habeant propor-



tionem datam. Diuidatur itaq; ſecundũ a c à plano. proportio igitur a d c portionis, ad a b c portionem ſphæræ eſt data. diuidatur autem ſphæra per centrum, & ſit ſectio maximus circulus a b c d, centrum autem k, & diametros d b. & fiat, ut ſicut utraq; ſimul k d, d x ad d x, ſic r x ad x b. Sicut autem utraq; ſimul k b, b x ad

b x, ſic l x ad x d: & iungantur a l, l c, a r, r c. conus igitur a l c, eſt æqualis a d c portioni ſphæræ, a r c uero ipſi a b c. Proportio igitur a l c coni ad a r c conum eſt data. Sicut autem conus ad conum, ſic l x ad x r, cum eandem baſem habeant, circulum qui eſt circa a c diametrum conuolutus. Proportio igitur etiam l x ad x r eſt data, & iam eadem ſequuntur, quæ prius propter apparatum ſicut l d ad k d, ſic k b ad b r, & d x ad x b. & quoniam eſt ſicut r b ad b k, ita k d ad l d coniungendo ſicut r k ad k b, hoc eſt ad k d, ſic k l ad l d. Tota igitur r l ad totam k l eſt, ſicut k l ad l d. quod igitur ſub r l, l d cõtinetur, æquatur quadrato l k. Sicut igitur r l ad l d, ſic quadratum k l ad quadratum l d. & quoniam eſt ſicut l d ad d k, ſic d x ad x b: erit etiam è conuerſo & iungendo, ſicut k l ad l d, ſic b d ad d x. ſicut igitur quadratum k l ad quadratum l d, ſic quadratum b d ad quadratum d x. Rurſus quoniam eſt ſicut l x ad d x, ſic utraq; ſimul k b, b x, ad b x. diſiungendo erit ſicut l d ad d x, ita k b ad b x. & ponatur b f æqualis ipſi k b. quod autẽ f extra r cadet, manifeſtũ eſt. & eſt ſicut l d ad d x, ita f b ad b x. quare & ſicut d l ad l x, ſic b f ad f x. Cum autem proportio r x ad l x ſit data, erit etiam r l ad l x proportio data. Quoniam igitur proportio r l ad l x componitur ex proportione quam r l habet ad l d, & d l ad l x. uerũ ſicut r l ad l d, ſic quadratum d b ad quadratum d x. ſicut autem d l ad l x, ſic b f ad f x. igitur proportio r l ad l x coniungitur ex proportione, quam habet quadratũ b d ad quadratũ d x, & ex b f ad f x. Fiat autem ſicut r l ad l x, ſic b f ad f h. Proportio autẽ r l ad l x erat data: quare & proportio b f ad f h erit data. Linea uero b f eſt data, nam eſt æqualis ſemidiametro: igitur & f h linea data erit, & proportio b f ad f h componitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d x, & ex b f ad f x. ſed b f ad f h proportio componitur ex proportione b f ad f x, & ex f x ad f h. ſublata cõmuni, quę eſt b f ad f x: reliquum erit igitur, ſicut quadratum b d quod eſt datum ad quadratum d x, ſic x f ad f h quod eſt datum. & eſt f d linea data iuxta datã d b, quam diuidere oportet ſecundum x, & facere ut x f ad f h datam ſit ſicut quadratum b d datum ad quadratum d x. Hoc autem non habet determinationem ſimpliciter dictam, ſed ijs quæ iſtic requiruntur poſitis: hoc eſt poſito hoc, duplam eſſe d b ipſius b f, & hoc, maiorem eſſe f h quàm h b, tanquam per reſolutionem, nõ habet determinationem. Problema uero tale eſt. Datis duabus lineis rectis d b, b f, quarũ d b ſit dupla ipſius b f, & ſigno h in b f poſito, diuidere ipſam d b in puncto x, & facere quod ſicut quadratum b d ad quadratum d x, ſic f x ad f h. Vtraq; uero hæc in fine reſoluentur & componentur.

Componitur autem problema hoc modo. Eſto data proportio, quam p maior habeat ad s minorem, & detur quædam ſphæra, & diuidatur plano per cen-

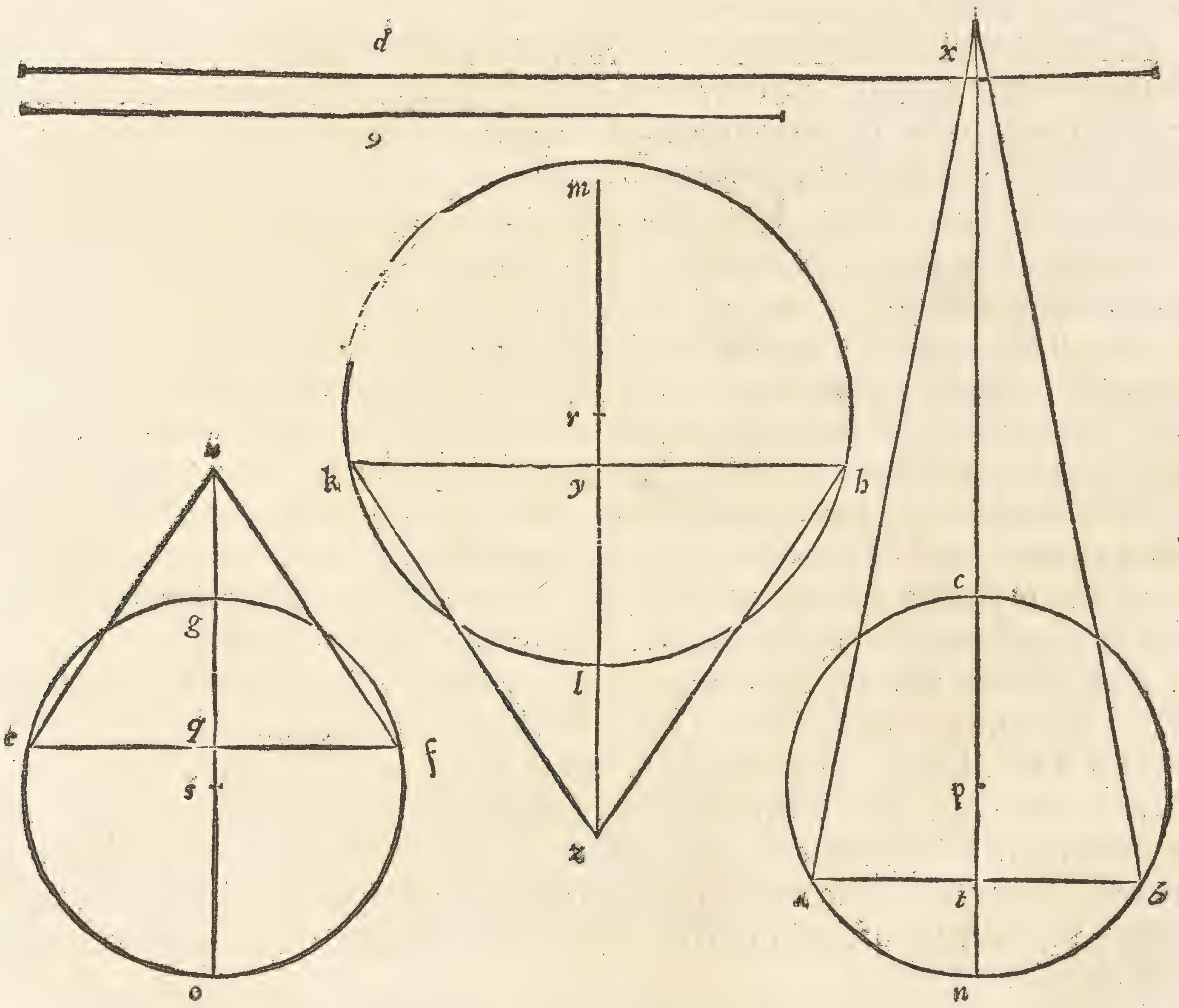


trum ducto, & ſit ſectio a b c d circulus, cuius diametros ſit b d, centrum k, & ipſi k b ponatur æqualis b f, & diuidatur b f in puncto h, ita ut ſit h f ad h b, ſicut p ad

s. &

s. & etiam diuidatur b d in puncto x, ita ut ſit x f ad h f, ſicut quadratũ b d ad quadratũ d x. Et per punctum x educatur planum, erectũ ſuper b d ſecundũ angulos rectos. Dico itaq;, quod planũ illud diuidit ſphęram, ita ut maior portio ad minorem ſic ſe habeat, uti p ad s. Factũ ſit enim, ut ſicut utraq; ſimul k b, b x ad b x, ſic l x ad d x. Sicut aũt utraq; ſimul k d, d x ad x d, ita r x ad x b. Et iungantur a l, l c, a r, r c. eſt igitur ſecundũ apparatum ita, ſicut in reſolutione oſtendimus, id quod ſub r l, l d continetur, æquale quadrato l k: & ſicut k l ad l d, ita b d ad d x. Quare ſicut quadratum k l ad quadratum l d, ſic quadratum b d ad quadratum d x. & quia id quod ſub r l, l d continetur, eſt æquale quadrato l k, erit ſicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. erit igitur, & ſicut r l ad l d, ſic quadratum b d ad quadratum d x: hoc eſt, x f ad f h. & quoniam ſicut utraq; ſimul k b, b x ad b x, ſic l x ad x d. æqualis eſt autẽ k b ipſi b f, erit igitur & ſic f x ad x b, ſicut l x ad x d. & euertẽdo, ſicut x f ad f b, ita x l ad l d. quare & ſicut l d ad l x, ſic b f ad f x. & quoniam eſt ſicut r l ad l d, ſic f x ad f h. ſicut autem d l ad l x, ſic b f ad f x. & per æquale in proportionalitate indirecta, ſicut r l ad l x, ita b f ad f h. ſicut ergo l x ad x r, ſic f h ad h b. ſicut autem f h ad h b, ſic p ad s. quare ſicut l x ad x r: hoc eſt, a l c conus ad a r c conum: hoc eſt a d c portio ſphęræ, ad a b c portionem ſphæræ, ſic p ad s.

DAtis duabus ſphæræ portionibus, tertiam conſtituere portionem, quæ alteri earum quæ datæ ſunt ſimilis ſit, alteri uero æqualis. Eſto duæ portiones ſphæræ datæ a b c, e f g: & ſit baſis ipſius portionis a b c, circulus circa diametrum 5



a b conſtitutus: eius uero uertex ſit c pũctum: baſis uero e f g, ſit circulus circa diametrum e f conſtans: uertex g punctũ. Oportet itaq; portionem ſphæræ inuenire, quæ ſit æqualis ipſi a b c portioni, & ipſi e f g ſimilis. Eſto inuenta ſit, & ponatur eſſe h k, & ſit eius baſis circulus circa h k diametrum conuolutus, uertex uero l punctum. Sint etiam circuli in ſphæris a n b c, h m k l, e o f g: diametri uero eorũ

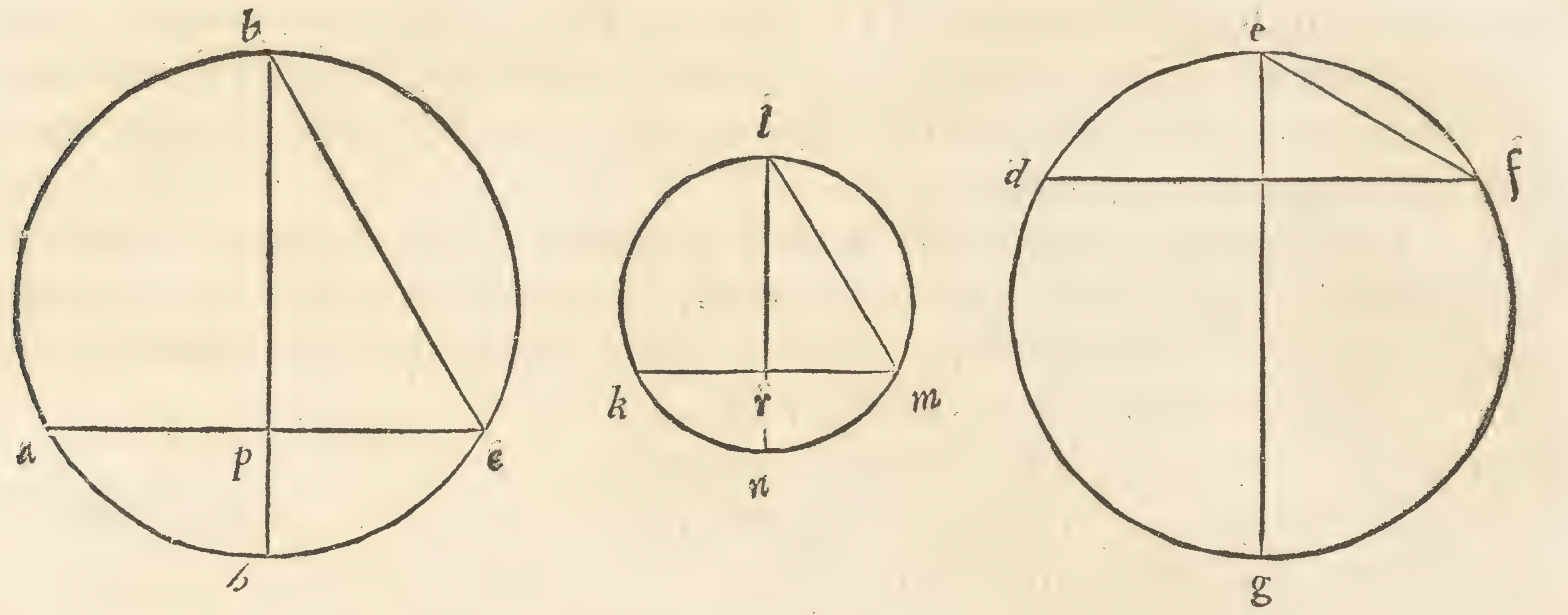
ad

ad angulos rectos baſibus portionum inſtituti ſint c n, l m, g o. & ſint centra p, r, s. & factum ſit ſic, ut utraq; ſimul p n, n t ad n t, ita x t ad t c. ſicut autẽ utraq; ſimul r m, m y ad m y, ſic z y ad y l. & ſicut utraq; ſimul s o, o q ad o q, ſic u q ad q g. et intelligantur coni, quorum baſes ſint circuli circa diametros a b, h k, c f conſtituti, uertices uero x z u puncta. conus itaq; a b x, æquat portioni a b c ſphæræ. conus uero h z k, æquatur ipſi h k l. conus demum e u f, æquatur ipſi e g f. hoc enim demonſtratum eſt antea. Et quoniam ſphæræ portio a c b ęquatur h l k portioni, conus a x b erit æqualis h z k cono. æqualiũ autem conorum baſes ſunt altitudinibus mutuæ. Circulus igitur circa diametrum a b, ad circulum circa diametrum h k, eſt ſicut z y ad x t. ſicut autem circulus ad circulum, ſic quadratum a b ad quadratum h k. Sicut ergo quadratum a b ad quadratum h k, ſic z y ad x t. Et quoniã ſimilis eſt e f g portio portioni h l k, conus igitur e u f ſimilis eſt cono z h k. Hoc autem oſtendetur. Eſt igitur ſicut u q ad e f, ſic z y ad h k. proportio autem ipſius u q ad e f data eſt: igitur proportio z y ad h k erit data. Eſto eadem x t ad d, & x t data eſt, erit & d data. & quoniam eſt ſicut z y ad x t, hoc eſt quadratũ a b ad quadratũ h k, ſic h k ad d. Ponatur id quod ſub a b & 9 continetur, æquale eſſe quadrato h k, erit igitur quadratum a b ad quadratum h k, ſicut a b ad 9. Oſtenſum eſt aũt, quod ſicut quadratum a b ad quadratũ h k, ſic h k ad ipſam d: & permutatim, ſicut a b ad h k, ſic 9 ad d. Sicut aũt a b ad h k, ſic k h ad 9. propterea quod quadratum h k æquatur ei quod fit ex a b in 9. ſicut ergo a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. Inter duas igitur datas duæ mediæ in proportione continua ſunt poſitæ: hoc eſt inter a b & d, ſunt h k, & 9.

Componetur autem iam propoſitum hoc pacto. Eſto portio a b c, cui uolumus ſtatuere æqualem portionem. & eſto e f g portio, cui ſimilem oportet ſtatuere. & ſint maximi in ſphæris circuli a b c n, e f g o: quorum diametri ſint c n, g o: & centra p, s. & fiat, ut ſicut utraq; ſimul p n, n t ad n t, ſic x t ad t c. ſicut aũt utraq; ſimul s o, o q ad o q, ſic u q ad q g. conus igiť x a b, eſt ęqualis portioni a b c ſphęræ. conus uero f u e, æquať portioni e g f. fiat ſicut u q ad e f, ſic x t ad d. & inter duas lineas rectas datas a b, & d duæ mediæ in continua proportione ſumantur h k & 9: ita ut ſicut a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. & ſimiliter h k circulo portio ſtatuatur h l k, ſimilis e f g portioni circuli, & perficiatur circulus, & ſit eius diametros l m, & intelligatur ſphæra cuius maximus circulus ſit l h m k, centrũ r. & ſecũdum h k planum tranſeat erectum ad angulos rectos ſuper l m, erit iam portio ſphæræ uerſus l ſimilis e f g portioni ſphæræ, cum circulorum portiones ſint ſimiles. Dico autem, quod etiam eſt æqualis a b c portioni ſphæræ. fiat enim ſicut utraq; ſimul r m, m y ad m y, ſic z y ad y l. igitur conus z h k, æquatur portioni ſphæræ h k l. & quoniam conus z h k ſimilis eſt cono f u e, eſt ergo ſicut u q ad e f, hoc eſt x t ad d, ſicut z y ad h k: & permutatim, & conuerſim. ſicut igitur z y ad x t, ſic h k ad d. Cum autem proportionales ſint a b, h k, 9, d erit ſicut quadratum a b ad quadratum h k, ſic h k ad d. ſicut autem h k ad d, ſic z y ad x t. ergo ſicut quadratũ a b ad quadratum h k, hoc eſt circulus circa diametrum a b conſtitutum, ad circulum circa diametrũ h k cõſtantem, ſic z y ad x t. conus igitur a x b æquatur cono h z k. quare & a b c portio ſphæræ eſt æqualis h k l portioni ſphæræ. Igitur a b c portioni datæ æqualem conſtituimus h l k portionem ſphæræ, quæ etiam alteri e f g ſimilis exiſtit.

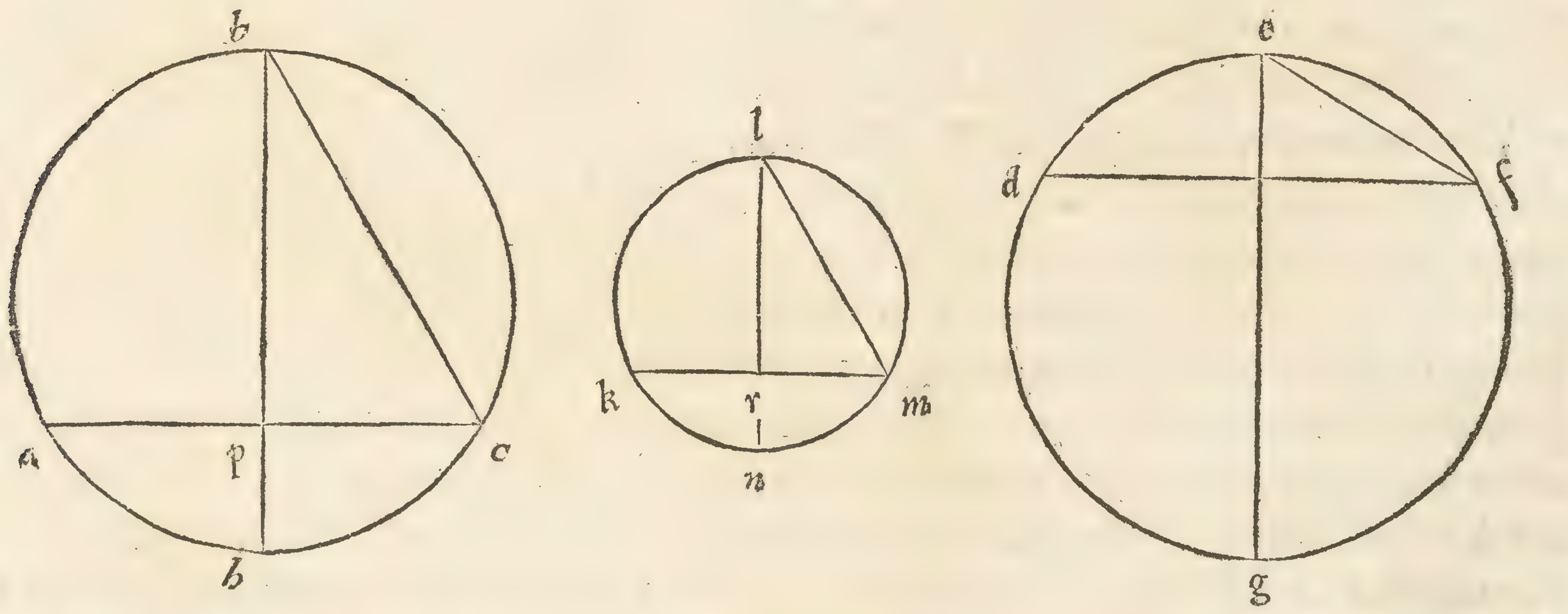
6 DVabus portionibus, ſiue eiuſdem ſiue non eiuſdem ſphæræ datis, tertiam inuenire ſphæræ portionem, quæ quidem alteri datarum portionum ſit ſimilis, ſuperficiem uero habeat alterius portionis ſuperficiei æqualem. Sint ſphæricæ portiones ſecundum a b c, d e f circumferentias ſumptæ. & eſto portio, cui ſimilem inuenire oporteat ſecundum a b c circumferẽtiam ſumpta. ea uero cuius ſuperficies æqualis eſſe debeat ſuperficiei portionis inueniendæ, ſit ſecundum

d e f circumferentiam. & ponatur factũ quod quæritur, & eſto k l m portio ſphæræ ipſi a b c portioni ſimilis. ſuperficiem quoq; habeat ſuperficiei d e f portionis æqualem: & intelligantur centra ſphærarum, & per ea tranſeãt plana erecta per-



pendiculariter ſuper baſes portionum. & in ſphæris quidem ſint ſectiones hæ k l m n, a b c h, e f g d maximi circuli, & in baſibus portionum ſint k m, a c, d f diametri. ſphęrarum uero diametri ſint ſuper k m, a c, d f perpendiculariter erectæ. ſintque l n, b h, e g: & coniungantur l m, b c, e f. & quoniam ſuperficies portionis ſphæræ k l m æqualis eſt ſuperficiei d e f portionis, æqualis erit ergo circulus cuius ſemidiametros ſit ipſi l m æqualis, circulo cuius ſemidiametros ſit æqualis e f. Superficies enim dictarum portionũ oſtenſæ ſunt eſſe æquales circulis, quorum ſemidiametri ſint æquales lineis, quæ à uerticibus portionum ad baſes earum deducantur. Quapropter l m erit æqualis e f. Cum autem k l m ſit ſimilis portioni a b c, erit ſicut l r ad r n, ſic b p ad p h. & cõuerſim, & coniungendo, ſicut n l ad l r, ſic h b ad b p. uerum & ſicut r l ad l m, ſic b p ad b c. nam trianguli ſimiles exiſtũt. Sicut ergo n l ad l m, hoc eſt ad e f, ſic h b ad b c: & permutatim. proportio uero e f ad b c eſt data. nam utraq; earum eſt data. igitur proportio l n ad b h data erit. ſed b h eſt data: quare & l n, & ſphæram quoq; datam eſſe neceſſe eſt.

Componetur autem propoſitum hoc modo. Sunto duæ portiones ſphæræ datæ a b c, d e f. & ſit a b c, cui ſimilem d e f, cuius ſuperficiei æqualem oporteat conſtituere ſuperficiem. & eadem parentur omnia, quæ in reſolutione parata fuē

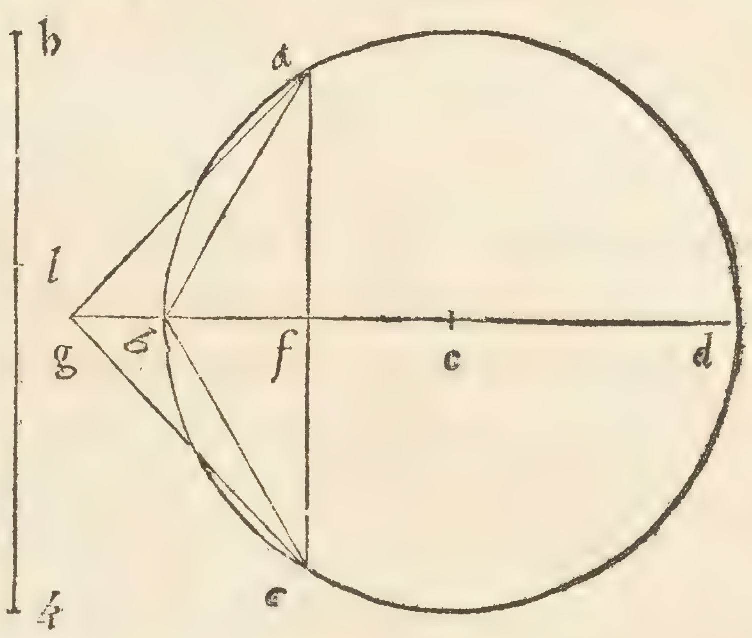


runt. & fiat, ſicut b c ad e f, ſic b h ad l n. & circa diametrum l n deſcribatur circulus, & intelligatur ſphæra cuius ſit maximus circulus l k n m. & diuidatur n l in puncto r, ita ut ſit ſicut h b ad b p, ſic n l ad l r. & ſecundum r diuidatur ſuperficies plano ſuper l n perpẽdiculariter erecto, & ducatur linea l m. portiones igitur circulorum, quæ ſunt ſuper k m, a c lineas rectas, ſunt inter ſe ſimiles: quare & ſua

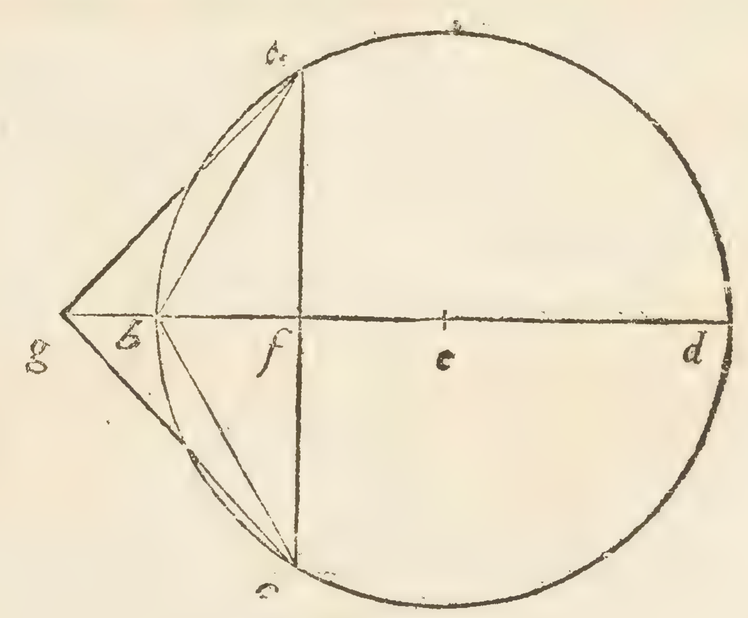
g rum

rum ſphærarum portiones ſimiles erunt. & quoniam eſt ſicut h b ad b p, ſic n l ad l r. etenim ſunt ſecundum diuiſionem. Sed & ſicut b p ad b c, ſic r l ad l m. ergo & ſicut h b ad n l, ſic b c ad e f. erit igitur e f ipſi l m æqualis. quare & circulus cuius ſemidiametros eſt e f, æquabitur circulo cuius ſemidiametros eſt l m. & circulus quidem cuius ſemidiametros eſt e f, æquatur ſuperficiei portionis d e f. circulus autem cuius ſemidiametros eſt l m, æquatur ſuperficiei portionis k l m. hoc enim in primo libro fuit oſtenſum. Superficies igitur k l m portionis ſphæræ, ſimilis eſt a b c, & æqualis ſuperficiei d e f.

7 A Data ſphæra portionem plano ſic abſcindere, ut ipſa portio eã quæ propoſita ſit proportionem ſeruet ad conum, qui baſim habeat eandem cum portione, & altitudinem æqualem. Eſto iam data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros eius b d: oportet iam ſphæram plano ſecare ipſo a c, ita ut ſit a b c portionis ſphæræ ad conum a b c, proportio eadem proportioni datæ. Factum ſit hoc, & ſit centrum ſphæræ e, & ſit ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur a c g eſt æqualis portioni a b c. Proportio igitur coni a g c, ad conum a b c eſt data. quare & proportio g f ad f b data erit. Sicut autem f g ad f b, ſic utraq; ſimul e d, d f ad d f. igitur proportio utriuſque ſimul e d, d f ad d f eſt data: quare et e d ad d f data, quare & d f data erit. ſimiliter a c data. & quoniam utraq; ſimul e d, d f ad d f maiorem habet proportionẽ quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b, & eſt utraq; ſimul e d, d b ter ipſa e d. ipſa uero b d, bis e d: habebit utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionẽ, quàm ſicut tria ad duo. proportio uero utriuſq; ſimul e d, d f ad d f, eſt eadem proportioni datæ. Oportet igitur proportionem datam in compoſitione maiorem eſſe quàm tria ad duo.



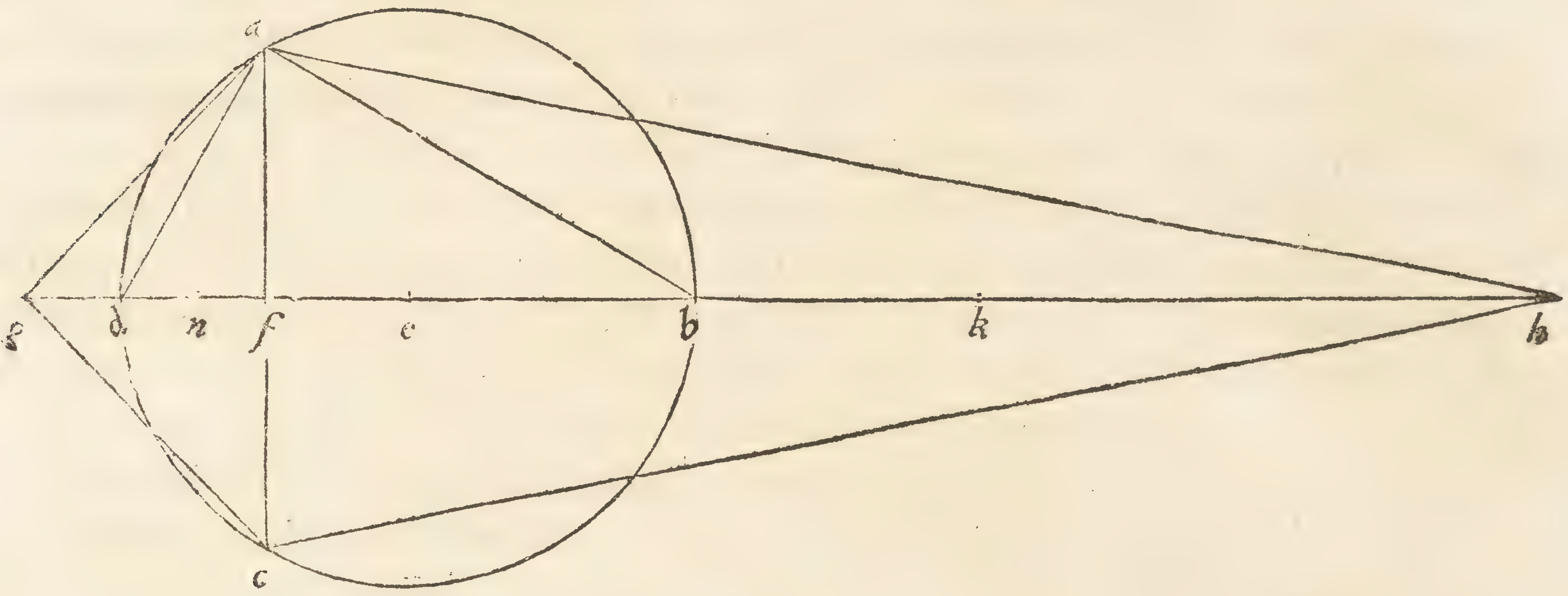
Componetur autem propoſitum hoc pacto. Eſto data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros uero b d, centrum e. proportio autem data ſit h k ad k l, maior ſcilicet quàm tria ad duo. ſicut autem tria ad duo, ſic utraq; ſimul e d, d b, ad d b. & ideo h k ad k l maiorem habet proportionẽ, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. diuidendo igitur h l ad l k maiorem proportionẽ habet, quàm e d ad d b. & fiat ſicut h l ad l k, ſic e d ad d f, & per ipſum f perpendicularis a f c ipſi b d ducatur, & per lineam a c ducatur planum ad b d perpẽdiculare. Dico igitur, quod a b c portio ſphæræ ad a b c conum, habet eandem proportionem datæ proportioni h k ad k l. Factum ſit enim, quod ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur c a g, æquatur portioni ſphæræ a b c. & quoniam eſt ſicut h k ad k l, ſic utraque ſimul e d, d f ad d f: hoc eſt g f ad f b, hoc eſt a g c conus ad a b c conum. conus uero a g c æquatur portioni ſphæræ. Sicut igitur a b c portio ad a b c conum, ſic h k ad k l.



8 SI ſphæra quæuis à plano non per centrum ducto ſecetur, maior portio ad minorem habere probatur proportionem minorem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris ad ſuperficiem minoris portionis, maiorẽ uero

uero

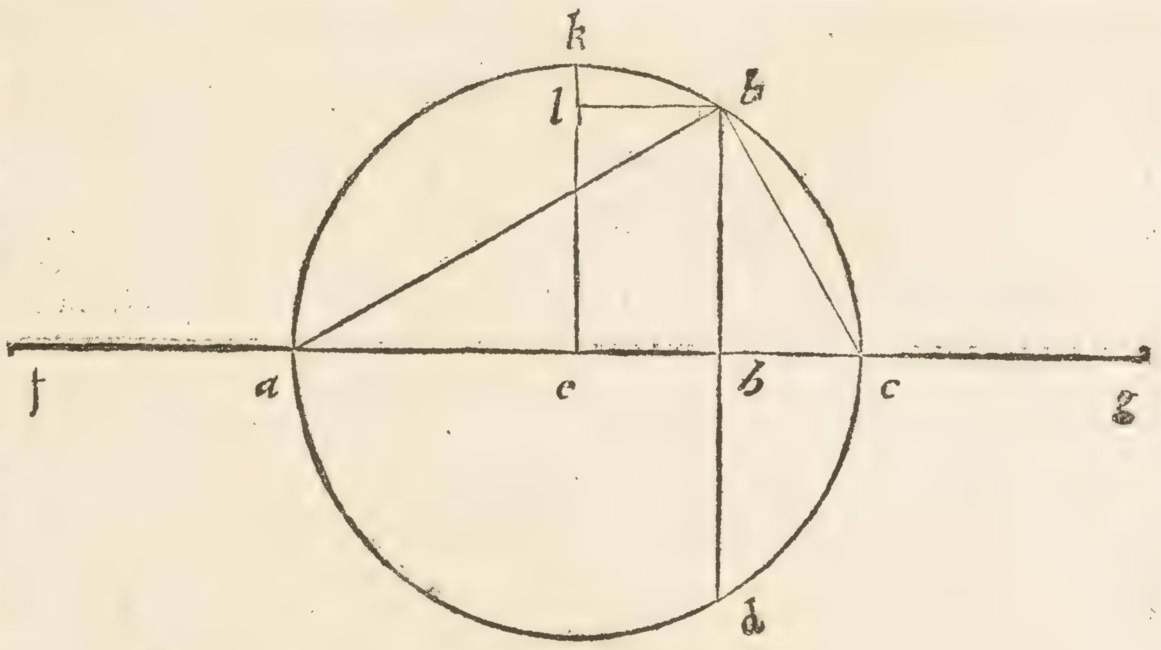
uero quàm ſit proportio, quæ ſit ſeſquialtera ad dictam proportionem. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c, & diametros b d. & ſecet plano per a c ducto, & erecto ſuper a b c d circulo, & ſit maior ſphæræ portio a b c. Dico itaq; quod



portio a b c ad a d e portionem, minorem habet proportionem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris. maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur b a, a d: & ſit centrum e, & fiat ut ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ita h f ad f b. ſicut autem utraq; ſimul e b, b f ad b f, ſic g f ad f d. & intelligantur coni baſem habentes circulum, qui eſt circa diametrum a c: uertices uero puncta h, g. & conus a h c, æqualis erit portioni ſphæræ a b c. conus uero a c g, ipſi a d c æqualis. & eſt ſicut quadrati b a ad quadratum a d, ſic ſuperficies portionis a b c ad ſuperficiem a d c portionis. hoc enim antea ſcriptũ eſt. Oſtendendum, quòd maior portio ſphæræ ad minorē habet minorē proportionem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam ſuperficies maioris portionis habet ad ſuperficiē minoris portionis. Dico quòd a h c conus, ad a g c conũ, hoc eſt f h ad f g, habet minorem proportionē, quàm eſt illa duplicata, quam habet quadratum b a ad quadratum a d, hoc eſt b f ad f d. Et quoniam eſt ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic h f ad f b. ſicut autem utraq; ſimul e b, b f ad b f, ſic f g ad f d: erit & ſicut b f ad f d, ita h b ad b e. nam b e eſt æqualis ipſi d e. hoc enim in ſuperioribus ſimul oſtenſum fuit. Rurſus quoniam ſicut utraque ſimul e b, b f ad b f, ſic g f ad f d. Eſto ipſi b e æqualis b k. manifeſtum nãq; eſt, quòd h b eſt maior b e: quoniam & b f maior eſt f d. & erit ſicut k f ad f b, ſic g f ad f d. ſicut autem f b ad f d, ita oſtenſum eſt eſſe h b ad b e. æquatur autem b e ipſi k b. ſicut ergo h b ad b k, ſic k f ad f g. Et quoniã h f ad f k minorem proportionem habet, quàm h b ad b k: ſicut autem h b ad b k, oſtenſum eſt ita eſſe k f ad f g. igitur h f ad f k minorem habet proportionem, quàm k f ad f g. minus ergo eſt quod continetur ſub h f, f g, quadrato f k. Id igitur quod cõtinetur ſub h f, f g, ad quadratum f g minorem habet proportionem, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Quadratum uero k f ad quadratum f g, habet eam proportionem duplicatam, quæ eſt k f ad f g. igitur h f ad f g minorem proportionem habet, quàm eſt ea duplicata quæ eſt k f ad f g. Hoc autem eſt quod quærebamus. Et quoniam b e eſt æqualis ipſi d e, minus eſt igitur id quod ſub b f, f d cõtinetur, eo quod ſub b e, e d continetur. ergo f b ad b e minorem habet proportionem, quàm e d, ad d f, hoc eſt h b ad b f. quadratum igitur f b, minus eſt eo quod fit ex h b in b e. Sit itaq; quadratum b n æquale ei quod ſub h b, b e. eſt igitur ſicut h b ad b k, ſic quadratum h n ad quadratum n k. quadratum autem h f ad quadratum f k maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k. quadratum ergo h f, ad quadratũ f k maiorem proportionē habet, quàm h b ad b k. hoc eſt, quàm h b ad b e. Hoc

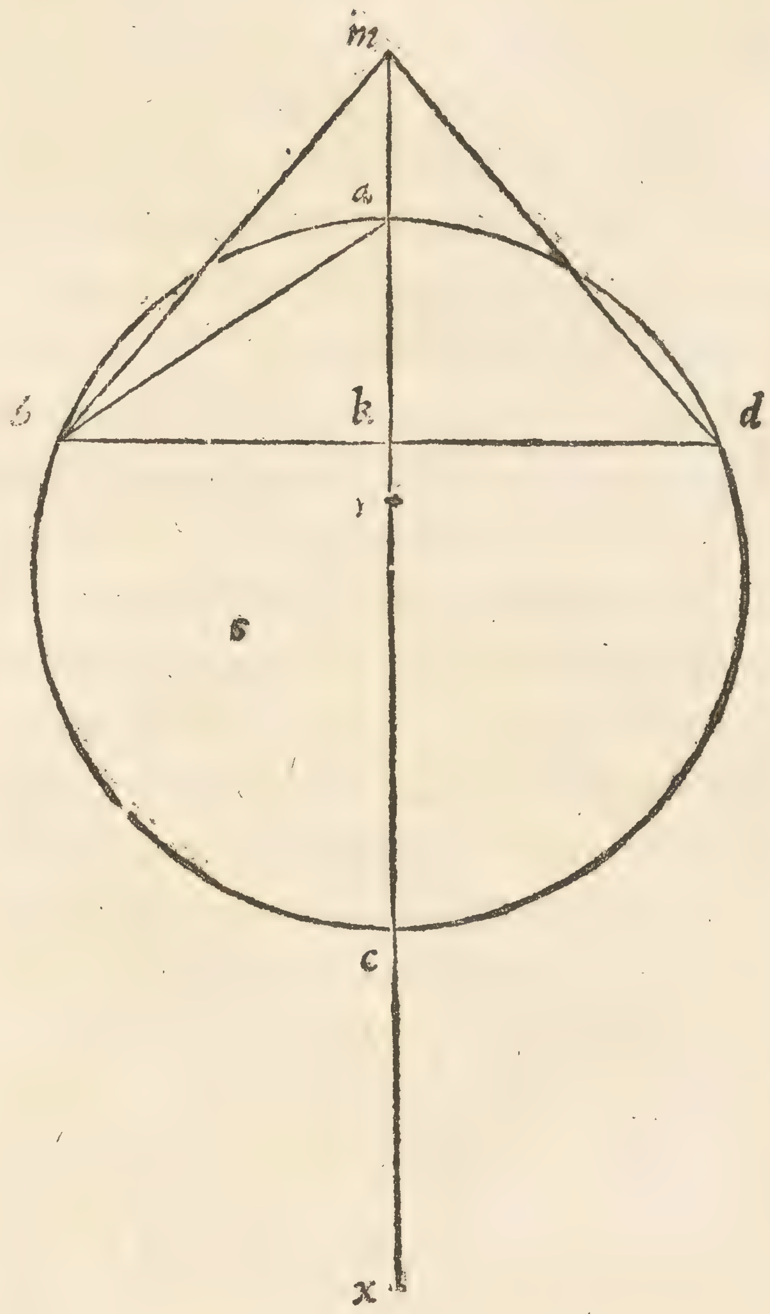
idem eſt, quàm k f ad f g. ergo h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſit ſeſquialtera ad proportionem k f ad f g. hoc enim perficit quod intendimus. et eſt ſicut h f ad f g, ſic a h c conus ad a g c conum: hoc eſt portio a b c ad portionẽ a d c. ſicut autem k f ad f g, ſic b f ad f d: hoc eſt quadratum b a ad quadratum a d: hoc idem eſt ſicut ſuperficies portionis a b c a d ſuperficiẽ a d portionis. ſed maior portio ad minorem habet minorem proportionem, quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris portionis, maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem.

Aliter. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros autem a c, centrum uero e. & ſecetur plano ſecundum b d erecto ſuper a c. Dico quod maior portio d a b, ad minorem b c d, habet minorem proportionem quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies a d b portionis ad ſuperficiem b c d portionis: maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur enim a b, b c. Proportio autem ſuperficiei ad ſuperficiem eſt, ſicut circuli, cuius eſt ſemidiametros a b, ad circulum cuius ſemidiameter eſt b c. hoc eſt h a ad a c. ponatur autem utraqȝ a f, c g eſſe æqualis ipſi ſemidiametro. proportio autem b a d, portionis ad b c d, componitur ex proportione b a d portionis ad conum, cuius baſis ſit circulus circa b d diametrũ deſcriptus, uertex uero a punctum: & ea quam habet idem conus ad conum habentem eandẽ baſem, uerticem uero c punctũ: & ex ea quam habet dictus conus ad b c d portionem. ſed proportio b a d, portionis ad b a d conũ eſt, ſicut g h ad h c. coni uero ad conum eſt ſicut

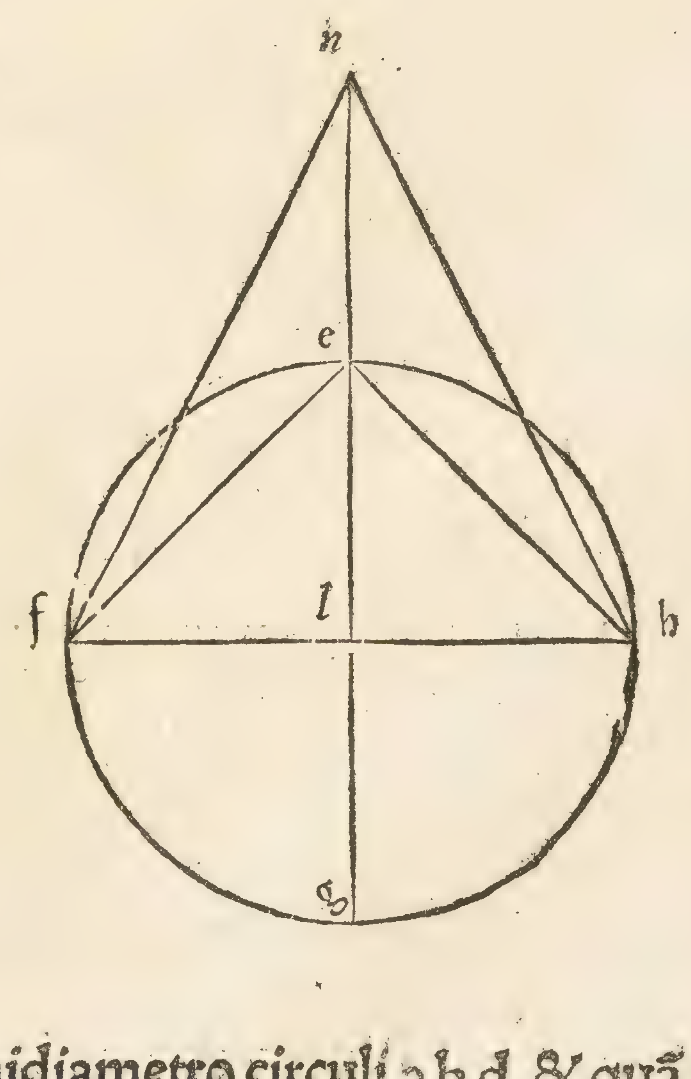


a h ad h c. coni autem b c d ad portionem b c d, eſt ſicut a h ad h f. At uero proportio cõpoſita ex proportione g h ad h c, & ex a h ad h c, eſt ſicut eius quod fit ex g h in a h, ad quadratum h c. eius autem quod fit ex g h in a h ad quadratum h c, cum ea quæ eſt a h ad h f, eſt ſicut ea quæ eſt eius quod fit ex g h, in quadratum h a, ad quadratũ h c in h f. proportio aũt eius quod fit ex g h in quadratũ h a, ad id quod fit ex quadrato h c in g h, eſt ſicut quadratum h a ad quadratum h c. quod igitur fit ex quadrato h a in h g, ad id quod fit ex quadrato c h in h f, minorem proportionẽ habet, quàm proportio quadrati a h ad quadratum h c. Quoniam enim eſt maius quadratũ c h in f h, quàm quadratum c h in h g: quoniam maior eſt h f ipſa h g. Dico igitur, quod maior portio habet ad minorem proportionem, maiorem quàm ſeſquialteram proportioni ſuperficiei ad ſuperficiem. Portio enim ad portionem oſtenſa eſt habere eam proportionem, quam habet quadratum a h, ductum in h g, ad quadratum h c in h f. proportioni autem ſuperficierũ ſeſquialtera eſt proportio cubi a b, ad cubum b c. Dico iam, quòd quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f maiorem habet proportionẽ, quàm cubus a b ad cubum b c: hoc eſt cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quadrati a h ad quadratum h b, et a h ad h b. proportio autem quadrati a h ad quadratum b h, aſſumens ſimul proportionem a h ad h b, eſt ſicut quadrati a h, ad id quod fit ex c h in h b. proportio autẽ quadrati a h, ad id quod fit ex h b in b c, eſt ſicut quadrati a h in h g, ad id quod fit ex h b in h c, ductum in h g. Dico iam quòd quadratũ a h, in h g, ad quadratum c h in h f maiorem proportionẽ habet, quàm quadratum a h, ad id quod fit ex b h in h c: hoc eſt quadratum a h in h g, ad id quod continetur ſub b h, h c, ductũ in h g. Eſt igitur oſten-

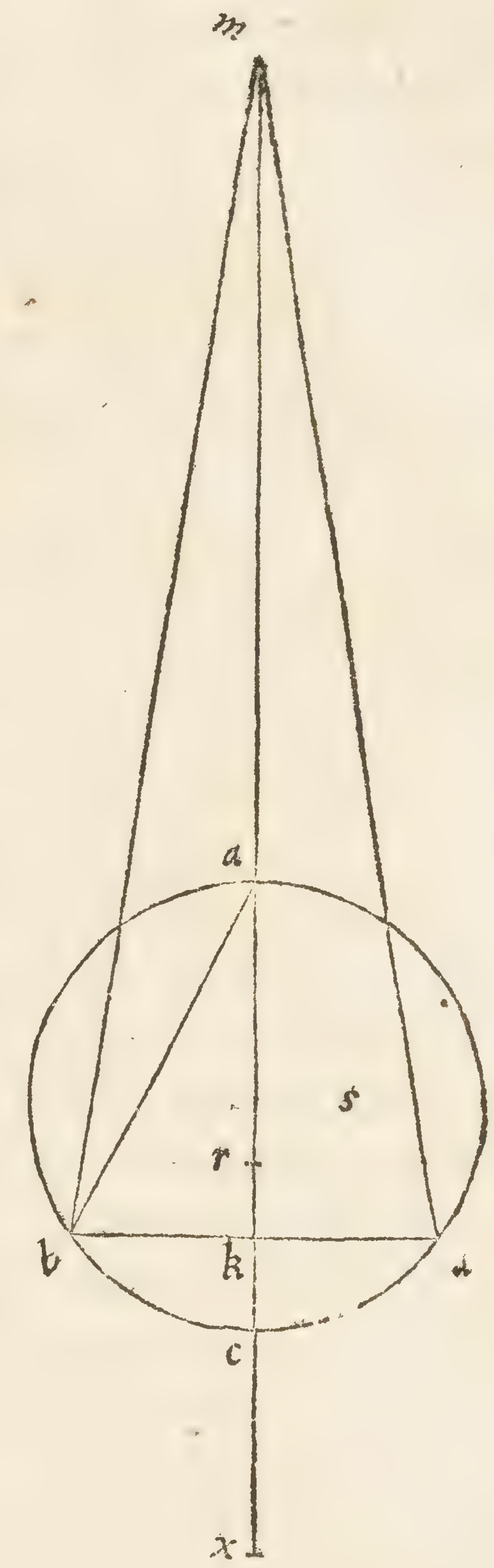
oſtendẽdum, quod quadratum h c in h f minus producit, quàm id quod ſub b h, h c continetur, ductum in g h. quod idem eſt ac ſi demonſtremus, quòd quadratũ h c ad id quod ſub b h, h c cõtinetur, minorem habet proportionem quàm g h ad h f. Oportet itaque oſtendere, quod g h ad h f maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b. Ducatur ab ipſo b perpendicularis ſuper ipſam g f, quæ ſit b d. oportet itaq; oſtendere, quòd g h ad h f maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Eſt autem h f æqualis utriq; ſimul a h, k e. quare oſtẽdere oportet, quòd g h ad h f, hoc eſt ad utrãq; ſimul h a, k e maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b. ſublata igit̃ c h ab ipſa g h, & ab ipſa k e ſublata e l, æquali b h oportebit oſtẽdere, quòd reliqua c g ad reliquam utramq; ſimul a h, k l maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b, hoc eſt h b ad h a, hoc eſt l e ad h a. & permutatim, quòd k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a: & diuidendo k l ad l e habet maiorem proportionem, quàm k l ad h a. quare minor eſt l e, quàm h a.



EArum ſphæræ portionum, quæ æqualibus ſuperficiebus continentur, medietas ſphæræ maxima exiſtit. Eſto maximus in ſphæra circulus a b c d, cuius diameter a c. Et eſto alia ſphæra, cuius maximus circulus e f g h: eius diameter e g. & ſecentur ambæ plano, altera per centrum ducto, altera non per centrum ducto. & ſint plana ſecantia erecta ſuper diametros a c, e g: & ſectæ ſint ſecundum lineas d b, f h. Eſt igitur portio ſub f e h ſuperficie cõtenta, dimidia ſphera: portionũ uero quæ ſecundum b a d circumferentiam habentur in alia figura, ad a punctum, altera eſt maior dimidia ſphæra, altera in alia figura minor dimidia ſphęra. Eſto aũt ſuperficies maioris portiõis unius ſphęræ ſuperficiei dimidiæ ſphęræ æqualis, quæ eſt ad circumferentiam f e h. Dico igitur, quod maior eſt dimidia ſphæra, quæ eſt ad circumferentiam f e h, quàm portio quæ eſt ſecundum b a d circumferentiam. Quoniam igitur ſuperficies dictarum portionũ poſitæ ſunt æquales, manifeſtũ eſt quod b a linea recta eſt æqualis e f rectæ. nam oſtenſum eſt, quod cuiuſcunq; portionis ſphæræ ſuperficies æqualis ſit circulo, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineę rectæ, ductæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis. Et quoniam b a d circumferentia maior eſt dimidio circulo in altera figura, in qua eſt s pũctum: manifeſtum igitur eſt, quod b a minor eſt quàm dupla in potẽtia ipſius a k, ſemidiametro autem maior quàm dupla in potentia. Eſto etiam quòd c x ſit æqualis ſemidiametro circuli a b d, & quã pro



portionem habet c x ad c k, hanc habeat m a ad a k. A' circulo uero circa diametrum b d deſcripto, erigatur conus, cuius uertex m punctum. conus igitur iſte æquatur portioni ſphæræ, quæ eſt ad circumferentiam b a d. Eſto ipſi e l æqualis ipſa e n, & à circulo circa diametrum h f conſtituto erigatur conus, cuius uertex ſit punctum n. & iſte quoque æqualis eſt dimidiæ ſphæræ, quæ eſt ſecundum h e f circumferentiam. id autem quod continetur ſub a r, r c, maius eſt contento ſub a k, k c: propterea quod habet latus minus ſuum minore latere alterius maius. quadrato uero a r æquatur id quod continetur ſub a k, c x. nam dimidium eſt quadrati a b. igitur utrumque ſimul eſt maius utroque ſimul. Quod igitur continetur ſub c a, a r, maius eſt contento ſub x k, k a. Ei uero quod continetur ſub x k, k a, æquatur id quod continetur ſub m k, k c. quare quod continetur ſub c a, a r, maius eſt eo quod continetur ſub m k, k c. quare maiorem habet proportionem c a ad k c, quàm m k ad a r. quam uero proportionem habet a c ad k c, eãdem quadratum a b ad quadratum b k. Manifeſtum igitur, quod dimidium quadrati a b, quod eſt æquale quadrato a r, ad quadratum b k maiorem habet, quàm m k ad duplam ipſius a r, quæ æquatur lineæ l n. maiorem ergo proportionem habet circulus circa diametrum h f conſtitutus, ad circulum circa diametrum b d deſcriptum, quàm m k ad l n. quare minor eſt conus, qui baſem habet circulum circa diametrum h f conſtantem, uerticem uero n punctum, eo cono qui habet baſem circulum circa b d conſtitutum, uerticem autem m punctum. Vnde manifeſtum quoque, dimidiam ſphæram, quæ ſecundum e f h circumferentiam conſtat, maiorem eſſe portione, quæ ſecundum b a d circumferentiam poſita eſt.

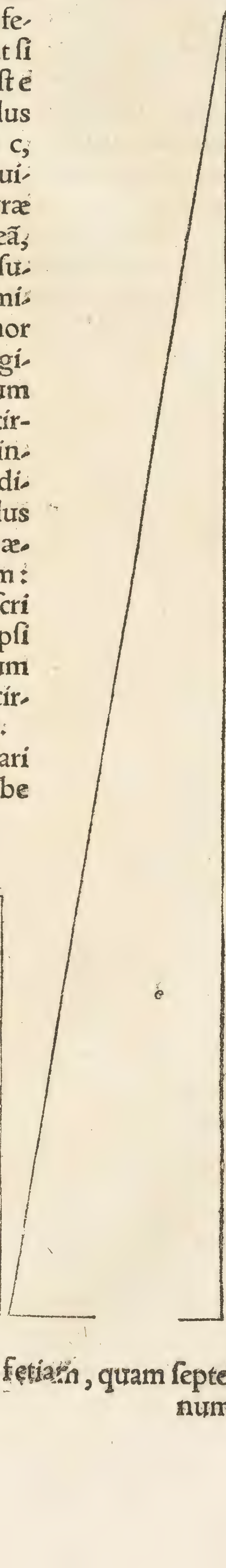


ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri ſecundi Finis.

ARCHI-

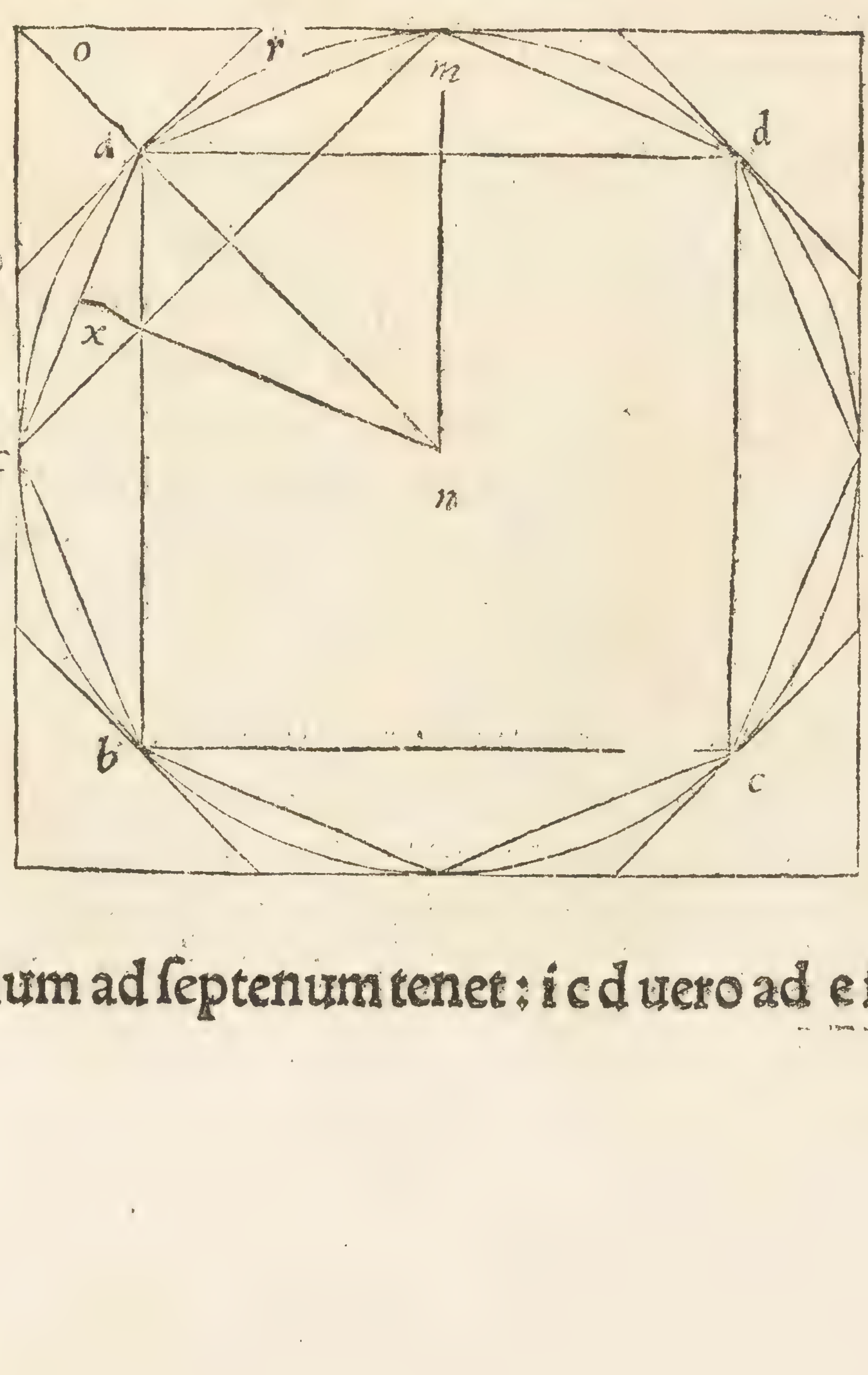
ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.

QVILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis eſt, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum ambiunt, ſit dicti circuli ſemidiametro æqualis, alterum eiuſdem circuli circumferentiæ. Eſto a b c d circulus, ſic habeat ſicut proponitur. Dico, quod æqualis eſt e triangulo. Et ſi fieri poteſt, eſto circulus dicto triangulo maior, & inſcribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuiſionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineã, quæ ſit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & ſit ſuper unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x eſt minor latere trianguli. Eſt etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum ſit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor eſt dicto triangulo: quod quidem abſurdum eſt. Eſto item ſi fieri poteſt, ſit triangulo circulus minor, & circulo circumſcribatur quadratum, & arcus inter puncta cõtingentiæ circuli intercluſi in æqua diuidantur, & per puncta diuiſionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nã r m, r a ſunt æquales, & triãgulus r o p eſt maior figura o f a m q̃ dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumſcripti, quæ eſt ex parte o. Sumptæ ſint itaq; portiones ſimiles ipſi p f a, quæ ſint minores eo, quo triangulus e ſuperat circulum a b c d: atque idcirco ipſa quoque figura rectilinea circulo circumſcripta, minor erit triangulo e. quod item abſurdum eſt: nam maior eſſe probatur: quia n a æqualis eſt perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ baſe trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit neceſſariò æqualis. 1



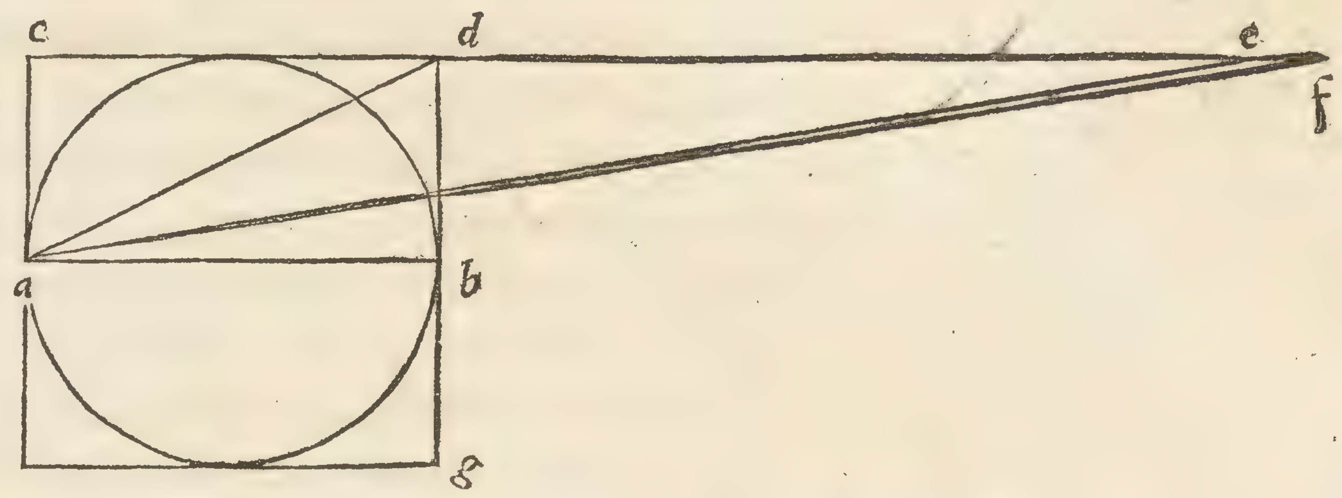
2

PRoportio circuli cuiuſcũque ad quadratũ ſuæ diametri eſt, ſicut undecim ad quatuordecim. Eſto circulus, cuius diametrus a b & circumſcribatur ei quadratum c g: & ipſa c d dupla ſit d e: ipſius etiam c d, ſit e f pars ſeptima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionẽ,

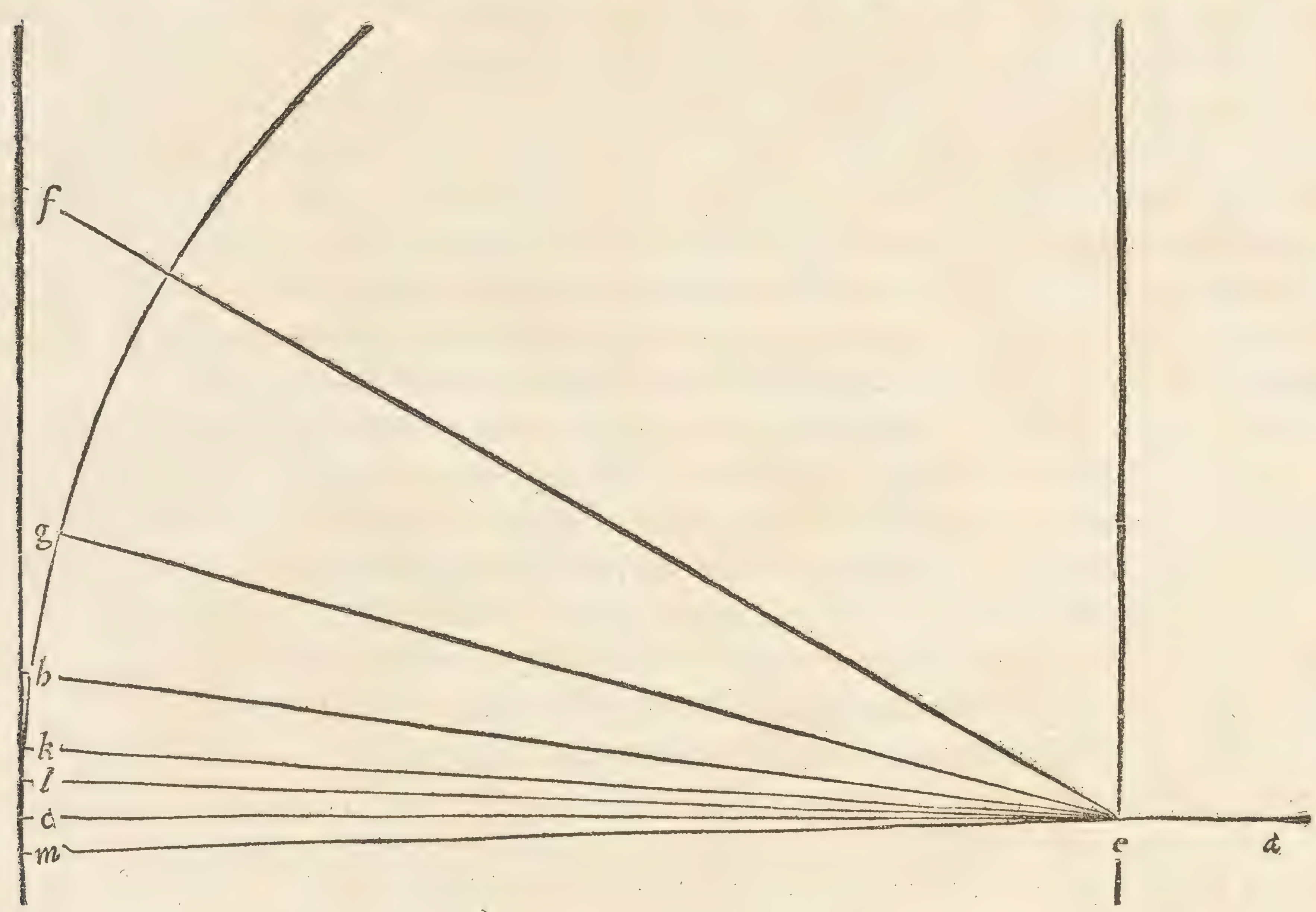


quam uicenum primum ad ſeptenum tenet: i c d uero ad e f etiam, quam ſeptenum

num ad unum. c f igitur ad c d, uti uicenũ ſecundum ad ſeptenum habebit. Verum ipſius a c d trianguli quadruplum eſt c g. quadratum & triangulus a c d f eſt ipſi circulo æqualis, cum c d perpendicularis ſit ſemidiametro æqualis, & baſis diametro ſit tripla, & propè ſeſquiſeptima, uti oſtendetur. Circulus igitur ad quadratum c g proportionem habet eam, quam undenus ad quatuordenum.



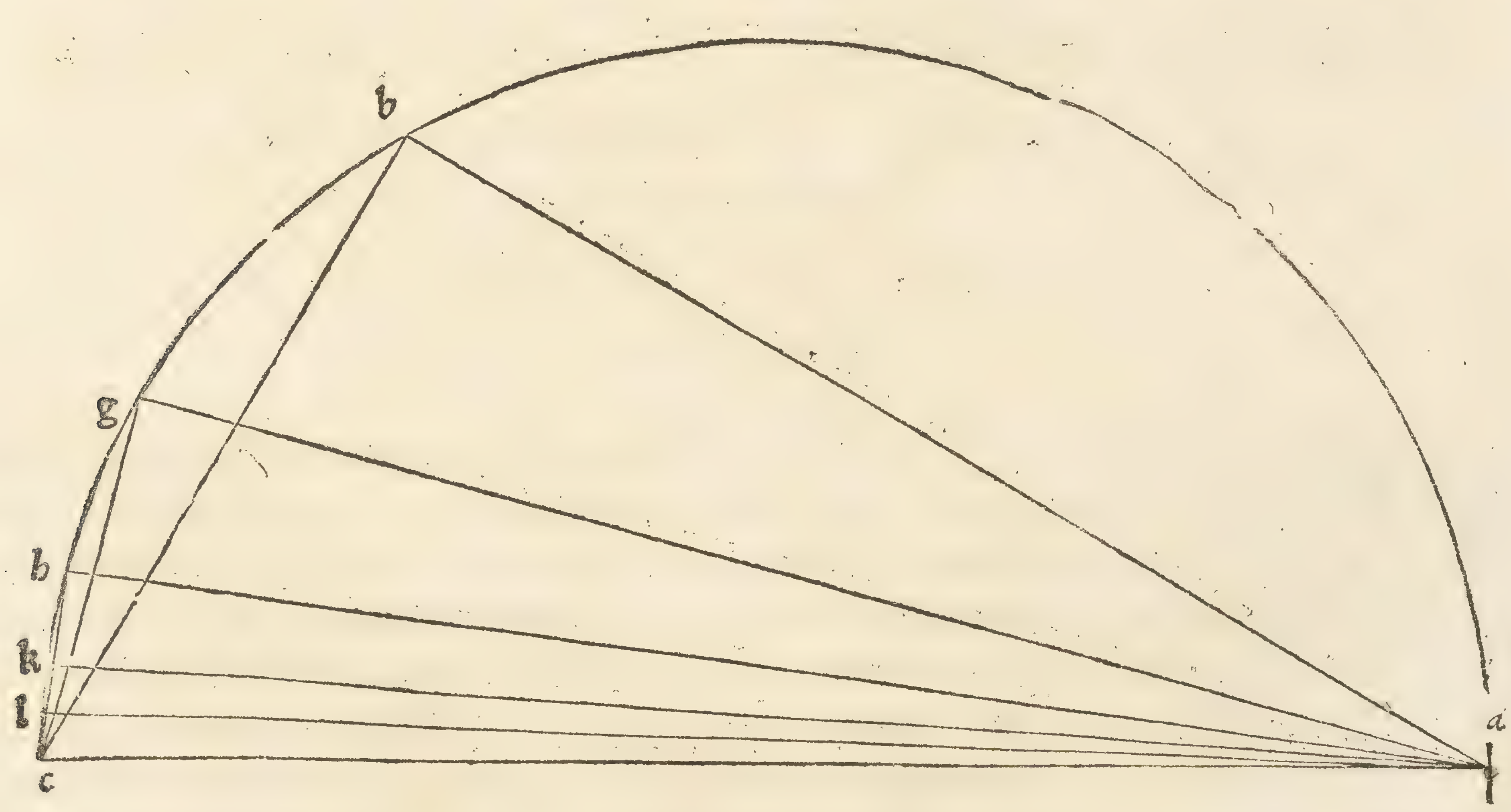
3 CVIuslibet circuli circumferẽtia ſuæ diametri eſt tripla, & plus parte, quæ minor eſt ſeptima, & maior decem ſeptuagenis primis. Eſto circulus, cuius diametrus a c, centrũ e, & c l f circulum cõtingens, angulus qui ſub f e c cõtinetur,



ſit tertia pars recti: & e f ad f c eam proportionẽ habeat, quam trecenti ſeni ad centum quinquagenos trinos. f c uero ad c e habet proportionem, quam ducenti ſexageniquini ad centũ quinquagenos trinos. Diuidat̃ itaq; angulus f e c, in æqualia, ducta linea e g. Eſt igitur ſicut f e ad e c, ita f g ad g c: & permutatim, & componendo, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. quare e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm quingenti ſeptuageniprimi ad centum quinquagenos trinos. e g ergo ad g c eam potentia proportionem habet, quam trecenta ſex & uiginti milia unũ & quadraginta, ad tria & uiginti milia quadringenta & nouem. longitudine uero ſicut quingenta unum & ſeptuaginta ad centum tria & quinquaginta. Rurſus ſecetur in duo æqualia angulus g e c, ducta linea e h. Eadem itaq; ratione e c ad c h maiorem habet proportionem, quàm mille centum duo & ſexaginta ad centum tria & quinquaginta. Igitur h e ad h c maiorem habet proportionem, quàm mille centũ ſeptuaginta duo ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus h e c, ducta linea e k. igit̃ e c ad c k maiorẽ habet

habet proportionē, quàm duo milia trecenta quatuor & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm duo milia trecenta nouem & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus k e c, ducta linea e l. igitur e c ad l c habet maiorem proportionē, quàm quatuor milia quadringenta tria & ſeptuaginta, ad centum tria & quinquaginta. Quoniam igitur angulus f e g, cum ſit tertia pars anguli recti, quater diuiſus eſt in æqualia, erit angulus l e c anguli recti pars quadrageſimaoctaua. Ponatur itaq; ipſi angulo l e c æqualis angulus c e m. Angulus ergo l e m erit recti pars uigeſimaquarta, quare linea l m eſt latus figuræ multorum angulorum circa circulum deſcriptæ, quæ ſex & nonaginta lateribus concluditur. Cum igitur ſit oſtenſum, e c habere ad c l maiorem proportionem, quàm quatuor milia ſexcēta tria & ſeptuaginta & ſemis, ad centum tria & quinquaginta. Sed et ipſius e c dupla eſt a c, ipſius uero l c dupla eſt l m. habebit ergo a c, ad limbum ipſius figuræ ſex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm quatuor milia ſexcenta tria & ſeptuaginta & ſemis, ad quatuordecim milia ſexcenta & octo & octuaginta. & eſt tripla, & inſuper habens ſexcentas ſeptem & ſexaginta partes & ſemis, ipſorum quatuor milium ſexcentorum trium & ſeptuaginta & ſemis: quæ quidem ſunt dicti numeri minus ſeptima parte. quare figuræ multorum angulorum circulo circumſcriptæ, latera ſimul iuncta diametro circuli ſunt tripla, & inſuper partem parte ſeptima diametri minorem habent. Quare multo magis limbus circuli cum ſit diametro ſua plus quàm triplus, minorem tum parte ſeptima ſuper triplicatam diametrum addet.

Eſto item circulus, cuius diametrus a c, angulus uero b a c, ſit tertia pars anguli recti. Igitur a b ad b c minorem habet proportionem, quàm trecenta quatuor



& quinquaginta ad ſeptingenta octuaginta. a c uero ad c b habet eam quam mille quingenta ſexaginta ad ſeptingenta octuaginta. Secetur in duo æqua b a g, ſit æqualis angulo g c b: ſed et angulo g a c, & angulus g c b æqualis angulo g a c. & communis eſt angulus rectus a g c, & tertius angulus g f c erit tertio angulo a c g æqualis. quare triangulus a g c eſt æquiangulus triangulo c g f. erit ergo ſicut a g ad g c, ſic g c ad g f, & ita a c ad c f. Verum ſicut a c ad c f, ita & utraq; ſimul c a, a b ad b c. & ſicut utraq; ſimul c a, a b ad b c, ſic a g ad g c. Propter hoc itaque a g, ad g c minorem habet proportionem, quàm duo milia nongenta undecim ad ſeptingēta octuaginta, uerum a c ad c g minorem habet proportionem, quàm tria milia

h trede-

tredecim ad ſeptingenta octuaginta. Diuidatur item in duo æqua angulus c a g, ducta linea a h. igitur a h ad h c eadem ratione minorē proportionē habet quàm quinque milia trecenta quatuor & uiginti & quinta & quarta ad ſeptingenta octuaginta, uel quam mille octingenta quatuor & uiginti ad ducenta quinquaginta. nam utraq; utrinq; quare a c ad c h minor, quàm mille octingenta octo & triginta & nona ad ducenta quadraginta. Item angulus h a c in duo æqua diuidatur

Item k a c angulus diuidatur per lineam a l: ergo a l ad l c minorem hab et proportionē quàm duo milia ſedecim & ſexta ad ſex & ſexaginta. ipſa uero a c ad c l minorem quàm duo milia decem & ſeptem & quarta, ad centum & ſex & ſexaginta. Conuerſim uero limbus figuræ multorum angulorum ad diametrum maiorem habet proportionem, quàm ſex milia trecenta & unū & ſexta ad duo milia decem & ſeptem & quartam. Sunt illa duobus milib. decem & ſeptē & quarta maiora, q̃ tripla ſuper decies partientia ſeptuageſimas primas. igitur limbus figuræ ſex & nonaginta lateribus concluſæ circulo inſcriptæ, maior eſt diametro circuli, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. quare multo magis circumferentia circuli maior erit ſua diametro, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. Vnde colligitur, circuli circumferentiam ſua diametro maiorem eſſe quàm triplam ſeſquioctauā, minorē uero quàm triplā ſeſquiſeptimā.

ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImenſione Finis.

ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHAEROIDIBVS figuris inuenta.

ARCHIMEDES DOSITHAEO recte agere.

RELIQVORVM theorematum demonſtrationes, quas in his quæ ſuperius ad te miſſa ſunt uoluminibus, nō habebas, tibi nunc in hoc libro conſcriptas mitto. Nonnullas pręterea quorundam aliorum, quæ poſtea ſunt inuenta. quæ cū ſæpe prius in manus adduxiſſem, tentaſſemq; inſpicere & cōtemplari, ueritus ſum maxime, ne difficilem admodum & penitus indeprehenſibilem haberent explicationem. Atque idcirco cum cæteris tibi data non fuerunt ipſa propoſita. Verum poſteaquam ea diligentiori ſtudio inueſtigare cœpiſſem, quæ prius dubia & perobſcura uidebantur, omnia cōpræhendi. Erant autem reliqua quidem priorum theorematum de rectangula figura conoidali propoſita. Quę uero nuperrimè ſunt inuēta circa obtuſianguli figuram conoidalem, & etiam ſphæroidas figuras uerſantur: quarum quaſdam oblongas, quaſdam prolatas libet appellare. De rectangulo itaq; conoidali hæc ſubiecta fuerant.

Si rectanguli coni ſectio quieſcente diametro circumferatur, donec in eū unde duci cœperat locum redierit figura, quæ à rectanguli coni ſectione cōpræhendetur, conoidale rectangulum uolumus appellari, & eius axem diametrum quieſcentem, uerticem uero punctū in quo ſuperficiei conoidalis axis applicatur.

Item

Item ſi conoidalem figuram rectangulam planum contingat, ipſi uero contingenti alterum planum æquediſtanter ductum aliquam conoidalis portionẽ abſcindat, ipſius portionis baſim uocari planũ, quod ab ipſa conoidalis ſectione in abſcindendo comprehenſum ſit: uerticem uero, punctũ illud in quo alterum planum conoidale contingit. axem aũt lineam rectam, quæ inter portionem deprehendit̃ à linea recta, quæ à uertice portionis ducta, ſit axi conoidalis æquediſtãs.

Hæc autem proponebantur conſideranda & inſpicienda. Cur fiat, quod ſi conoidalis rectanguli ſectio ſecetur à plano ſuper axem erecto, portio abſciſa erit ſequialtera cono qui habet baſem cum portione eandem, & axem eundem. Rurſus quare eſt, ſi à conoidali rectangulo duæ portiones à planis utrinq; ductis abſcindantur, portiones abſciſæ habent inter ſe, eam quæ eſt ſuorum axiũ, proportionem duplicatam.

Circa uero obtuſianguli conoidale hæc ſuppoſita uolumus. Si in eodem plano ſit obtuſianguli coni ſectio, & eius diametrus & lineæ, quæ ſint proximę dicti coni portioni, & quieſcente diametro uertatur planum donec redeat ad locum unde cœpit moueri, in quo ſcilicet plano dictę lineæ exiſtunt, lineæ rectæ quæ ſectioni coni obtuſianguli proximę ſunt, palàm eſt quod conum comprehendent æquicrurem, cuius uertex punctum erit in quod lineæ quæ proximę ſunt cõcurrunt. axis uero diametros immota. Figura uero ſub ſectione coni obtuſianguli comprehenſa, conoidale obtuſiangulum appelletur. axem autem eius diametrum immotam: uerticem uero, punctum in quo axis ſuperficiei conoidalis applicatur. Conum aũt comprehenſum à lineis ſectioni coni obtuſianguli proximis complectentem conoidale uocari. Lineam uero rectam, quæ intermedia capitur inter uerticem conoidalis & uerticem coni complectentis conoidale, adiectam axi dici. Et ſi obtuſianguli conoidale planum contingat, ipſi autem contingenti alterum planum æquediſtanter ducatur, quod abſcindat à conoidali portionem, baſem abſciſę portionis uocari planum quod ſit à ſectione conoidalis in ſecando comprehenſum. uerticem autem, punctum in quo planum contingit conoidale. axem uero, lineam intra portionem comprehenſam, à linea ducta per uerticẽ portionis & uerticem coni complectentis conoidale, & quæ dictis uerticibus intermedia habetur rectam lineam ad axem adiectam uocari.

Omnia uero conoidalia rectangula ſunt ſimilia. Eorum autem quæ ſunt obtuſianguli, ſimilia dicantur illa, quæ à conis ſimilibus ſunt comprehenſa.

Hæc autem inſpicienda proponuntur. Quare eſt, ſi à conoidali obtuſianguli portio abſcindatur plano ſuper ipſius axem erecto, portio abſciſa ad conũ eandem baſem cum portione & eundem axem habentem, habet eam proportionẽ quam habet utraq; ſimul linea, & ea quæ æquatur axi portionis, & ea quæ tripla eſt lineę axi adiectæ, ad lineã æqualem his duab. ſimul, axi portionis, & lineę quę dupla ſit lineæ axi adiectæ.

Item quare eſt, ſi à cono anguli obtuſi portio abſcindatur plano non erecto ſuper axem, portio inde abſciſa ad figuram, quæ baſim habeat eandem, & axem eũdem portioni, quæ figura ſit ſectio coni, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul linea quæ axi portionis ſit æqualis: & linea quæ tripla ſit lineæ axi adiectæ ad lineam æqualem iſtis utriſq;, uidelicet axi portionis, & lineæ duplæ ad lineam axi adiectam.

At uero circa ſphæroidas figuras ſubiecimus iſta.

Si ſectio coni anguli acuti, quieſcente eius maiore diametro circumferatur, donec redeat in eum locum unde moueri cœpit, figuram inde comprehenſam à ſectione coni anguli acuti, ſphæroides oblongum appellari. Si autem minori diametro quieſcentẽ circũferatur, item donec ad locum unde cœpta eſt moueri portio coni acuti anguli redeat, figuram inde à ſectione coni anguli acuti comprehẽ

ſam ſphæroides prolatum uocari. Vtriuſque autem ſphæroidis axem dici diametrum quieſcentem: uerticem uero punctum illud in quo axis applicatur ſuperficiei ſphæroidis. Centrum uero punctum axis medium: diametrum uero lineam à centro eductam perpendiculariter ipſi axi.

Si ſphæroidas figuras utcunque plana contingant æquediſtantia, & figuras nō ſecantia: ipſis autem, ut dictum eſt, contingentibus alterum planum æquediſtanter agatur, diuidatque dictas figuras ſphæroidas, portionum inde naſcentium baſem quidem uocari, id plani quod compræhenſum eſt à ſphæroidis ſectione in diuidente plano: uertices uero, puncta in quibus plana æquediſtantia contingunt ſphæroides. axes autem lineas rectas, in portionibus comprehenſas ex recta linea, quæ uertices earum iungit. Quòd aūt plana contingentia in uno ſolum puncto contingant ſphæroidis ſuperficiem, quodque linea recta contactus coniūgens per centrum ſphæroidis tranſeat, in ſequentibus oſtendemus. Similes autem figuras ſphæroidas dici, quarum axes ad diametros eandem habent proportionē.

Portiones autem ſphæroidum & conoidalium figurarum ſimiles illę dicātur, quæ à ſimilibus figuris ſint abſciſæ, quæque baſes ſimiles habeāt, & axes earum aut erecti ſint ſuper planas baſium ſuperficies, aut angulos æquales habeant ad diametros baſium (correlatiuas) conſimiles, proportionemque teneant ad diametros baſium conſimiles eandem.

Proponuntur autem hæc circa ſphæroidas figuras conſideranda: Cur fiat, ſi figurarum ſphæroidum aliqua ſecetur plano per eius centrum tranſeunte, & ſuper axem erecto, portionum inde productarum utraque dupla ſit cono ſuo, eādem baſim & axem eundem cum portione habenti. Si autem plano ſecetur non ſuper axem erecto, & per centrum tranſeunte: earum quæ inde reſultant portionū, maior quidem ad conum eādem baſim, & eundem cum portione axem habentem, habebit eandem proportionem, quam habet linea, quę ſit æqualis utriſque ſimul iſtis, dimidio axis ſphæroidis, & axi minoris portionis, ad axem minoris portiōis. Minor autem portio ad conum, qui eandem baſem & axem eundem cum portione habuerit, eam tenet proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis, dimidio axis ſphęroidis, & axi maioris portionis habet, ad axem portionis maioris.

Item quare ſit, ſi qua figurarum ſphæroidum plano ſecetur, tranſeunte per cētrum non erecto ſuper axem, utraque portionum inde naſcentium dupla erit figuræ, quæ baſim eandem, & axem habeat cum portione eundem: ſit autem ipſa figura abſciſor coni.

Item ſi neque per centrum, neque erecto ſuper axem plano, ſphæroides ſecetur, portionum inde factarum maior ad figuram eandem baſim, & eundem cum portione axem habentem, tenebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſque portionis uertices iungit, & axi portionis minoris habet ad axem portionis minoris. Minor autem portio ad figuram eandem baſem & axem habentem cum portione eundem, habebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſque portionis uertices iungit, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autē & in his figura abſciſor coni.

Iſtis itaque quæ dicta ſunt theorematibus demonſtratis, per hæc ipſa inueniūtur multa alia theoremata, et problemata multa: quale eſt hoc quod ſequit̄, Quod ſphæroides figuræ ſimiles, & portiones ſphæroidum figurarum ſimiles, & ſimiliter conoidalium, habent eam quæ eſt axis ad axem proportionem triplicatam.

Item quare ſphæroidum figurarum æqualium quadrata diametrorum mutuam habent axium proportionem. & ſi figurarum ſphæroidum quadrata diametrorum mutuam habuerint axium proportionem, ſphæroides figuras illas æquales eſſe.

Propo

Propoſitum autem quale eſt hoc, A' data figura ſphæroidis, aut conoidalis portionem abſcindere plano, quod ſit alteri plano dato æquediſtanter ductum. Eſſe autem portionem abſciſam æqualem aut cono dato, aut cylindro, aut ſphæræ datæ. Præmittens igitur primùm & theoremata & pręcepta propoſita, quę ad illorum demonſtrationem ſunt neceſſaria, poſtea tibi ea quæ ſuprà ſunt propoſita, deſcribemus feliciter.

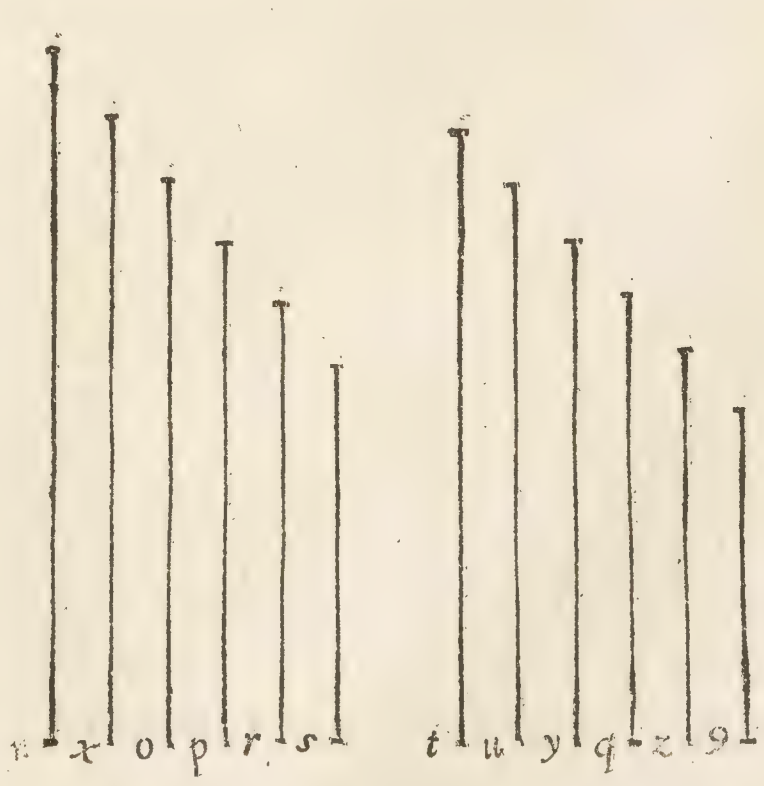
Si conus plano ſecetur omnibus lateribus ſuis coincidenti, ſectio erit aut circulus, aut coni anguli acuti ſectio. Quod ſi dicta ſectio ſit circulus, palàm eſt quod portiò ab eo uerticem uerſus compræhenſa, conus exiſtit. Si uero ſectio ſit coni anguli acuti ſectio, figura à coni ſectione dicta uerſus uerticem coni compræhenſa, abſciſor coni uocetur. Huius uero abſciſoris baſis uocetur planũ illud quod à ſectione coni acuti anguli continetur. uertex uero punctum, quod eſt & coni uertex. axis autem, linea à uertice ad centrum ſectionis coni acuti anguli ducta.

Et ſi cylindrus duobus planis æquediſtantibus ſecetur, quæ omnib. lateribus cylindri coincidant, ſectiones erunt aut circuli, aut coni acuti anguli ſectiones æquales & ſimiles inuicem. Siquidem ſectiones circuli fuerint, manifeſtũ eſt quod figura à cylindro abſciſa inter plana æquediſtantia intercepta, cylindrus exiſtit. Si uero ſectiones fuerint coni acuti anguli ſectiões, abſciſa à cylindro figura, quæ eſt inter plana æquediſtantia contenta, ſector cylindri appelletur. Ipſius autem ſectoris baſes uocentur plana comprehenſa à ſectione coni acuti anguli. axis uero linea ducta ad centra, ſectionum coni acuti anguli. Erit autem hæc ipſi axi cylindri eadem.

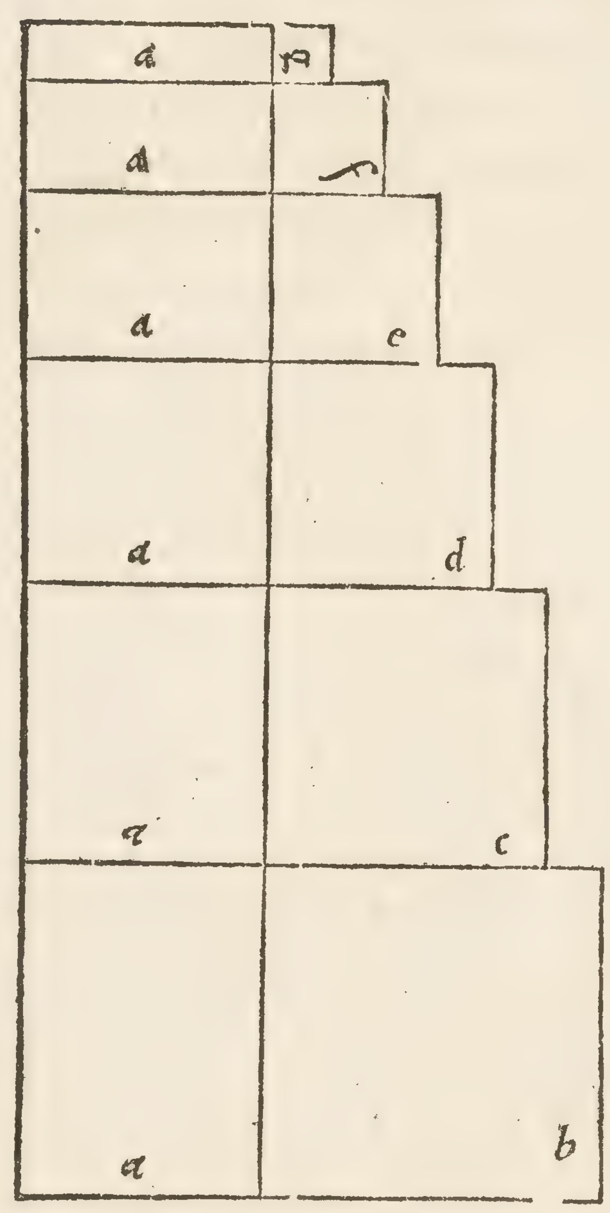
SI fuerint quotcunque numero magnitudines ſumptæ, quæ ſeſe excedant æqualiter, fueritq́ earum exceſſus minime illarum æqualis, ſumantur aliæ totidem numero magnitudines omnes maximè prædictarũ æquales. iſtæ pòſt ſimul ſumptæ collectæ omnis ad prius ſumptas omnis collectas minus ſunt quàm duplæ. item eædem omnis iſtæ ad illas eaſdem omnes, dempta earum maxima, plus erunt quàm duplæ. Huius aũt demonſtratio manifeſta exiſtit.

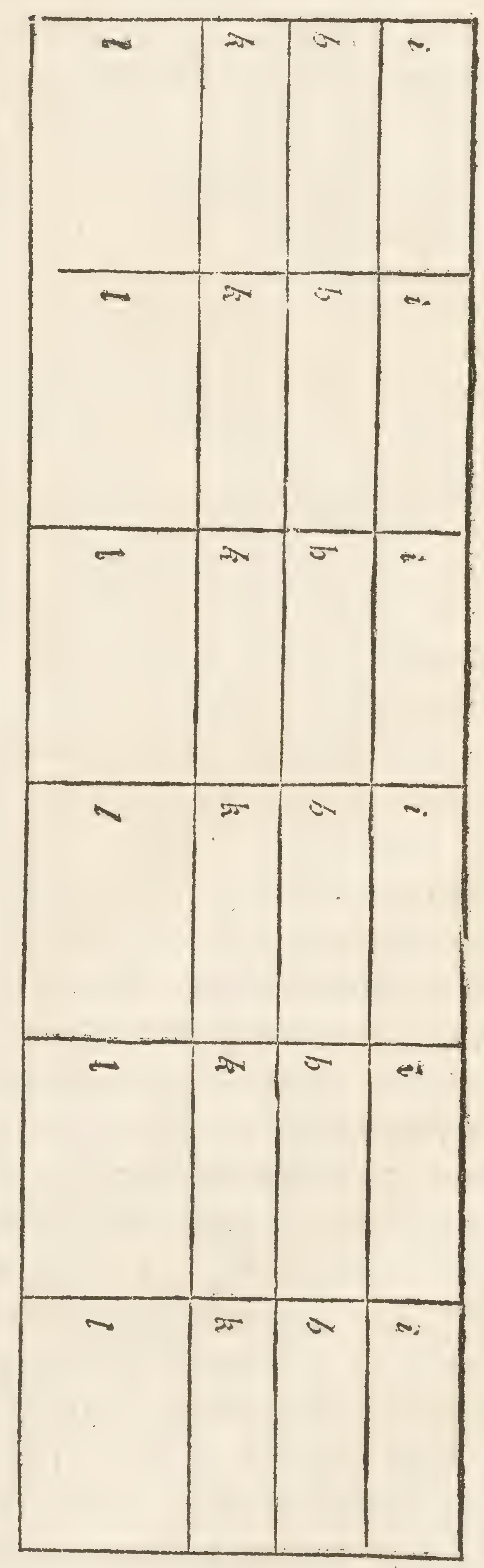


SI fuerint quotcũq; numero ſumptę magnitudines, itemq́ totidem alię numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quãcunque unaquaque prius ſumptarum ad ſuam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæq; poſterius ſumptarum ad ſuam eodem ordine proximam ſeruet, quæcunq; fuerint illæ proportiones, item prius ſumptæ magnitudines ad quaſdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuſcũq; proportionibus referantur: ſumptæ quoq; poſterius magnitudines ad quaſdã alias totidẽ, eodem ordine & eiſdem proportionibus ſint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius ſumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparãtur, eandem proportionem, quam magnitudines poſterius ſumptæ omnis habuerint,



rint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint ſimiliter comparatæ. Eſto quę dam magnitudines a b c d e f, item aliæ totidē g h i k l m, ſitq; ut unaquæq; prius ſumptarum habeat ad ſuam proximam, ſicut unaquæq; poſterius ſumptarum ad ſuam proximam. Vt uidelicet a habeat ad b eandem proportionem, quam g ad h. ipſa uero b habeat ad c, ſicut h ad ipſam i, & reliquę deinceps ſimiliter. referātur autem a b c d e f magnitudines, ad alias magnitudines n x o p r s, in quibuſcūque proportionib. ipſæ uero g h i k l m ad alias, uidelicet t u y q z ꝯ, eiſdem eodem ordine proportionibus: ut ſicut a habet ad n, ita g ad t, & ſicut b ad x, ita h ad u, & reliquæ iſtis ſimiliter. Oſtēdendū itaq; eſt, quod omnis a b c d e f, ad omnis n x o p r s eandem habent proportionem, quam habent omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z ꝯ. quoniam n ad a eandem habet proportionem, quam c ad g: ipſa uero a ad b, ſicut g ad h. uerum b ad x, ſicut h ad u. erit ſicut n ad x, ita t ad u. eadem ratione & x ad o, ſicut u ad y: & reliqua his ſimiliter. Habent autem omnes a b c d e f g ad a, ſicut g h i k l m ad g. uerum a ad n, ſicut g ad t. at uero n ad omnes n x o p r s, ſicut t ad omnes t u y q z ꝯ. Manifeſtum igitur eſt, quod omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s: ſicut omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z ꝯ. Clarum autē eſt, quod ſi ipſarū a b c d e f magnitudinum, iſtę a b c d e referantur ad n x o p r, ipſa uero f nō referatur: at ipſarū g h i k l m, iſtæ g h i k l, referantur ad t u y q z ſibi correſpondentes eiſdem proportionibus, m uero nō referatur. Et ſimiliter omnis a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habebunt proportionē, quā omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z.





3 Si lineæ quotcunq; numero, fuerint inter ſe æquales, & unicuiq; earū accedat ſpaciū, ita quod ſpaciū ſecundæ ſuperet ſpaciū primę quadrata forma, & ſic deinceps reliqua ſe habeant, ſintq; exceſſuū latera æqualē excedētia, & hic laterū exceſſus ſit æqualis minimæ huius numeri lineæ. item ſint alia ſpacia prædictis numero æqualia, quantitate uero unumquodq; maximo prædictorum æquale. Dico, tunc hęc ſimul omnia ſpacia minorem habere proportionem ad prædicta ſimul omnia, quàm linea

quæ

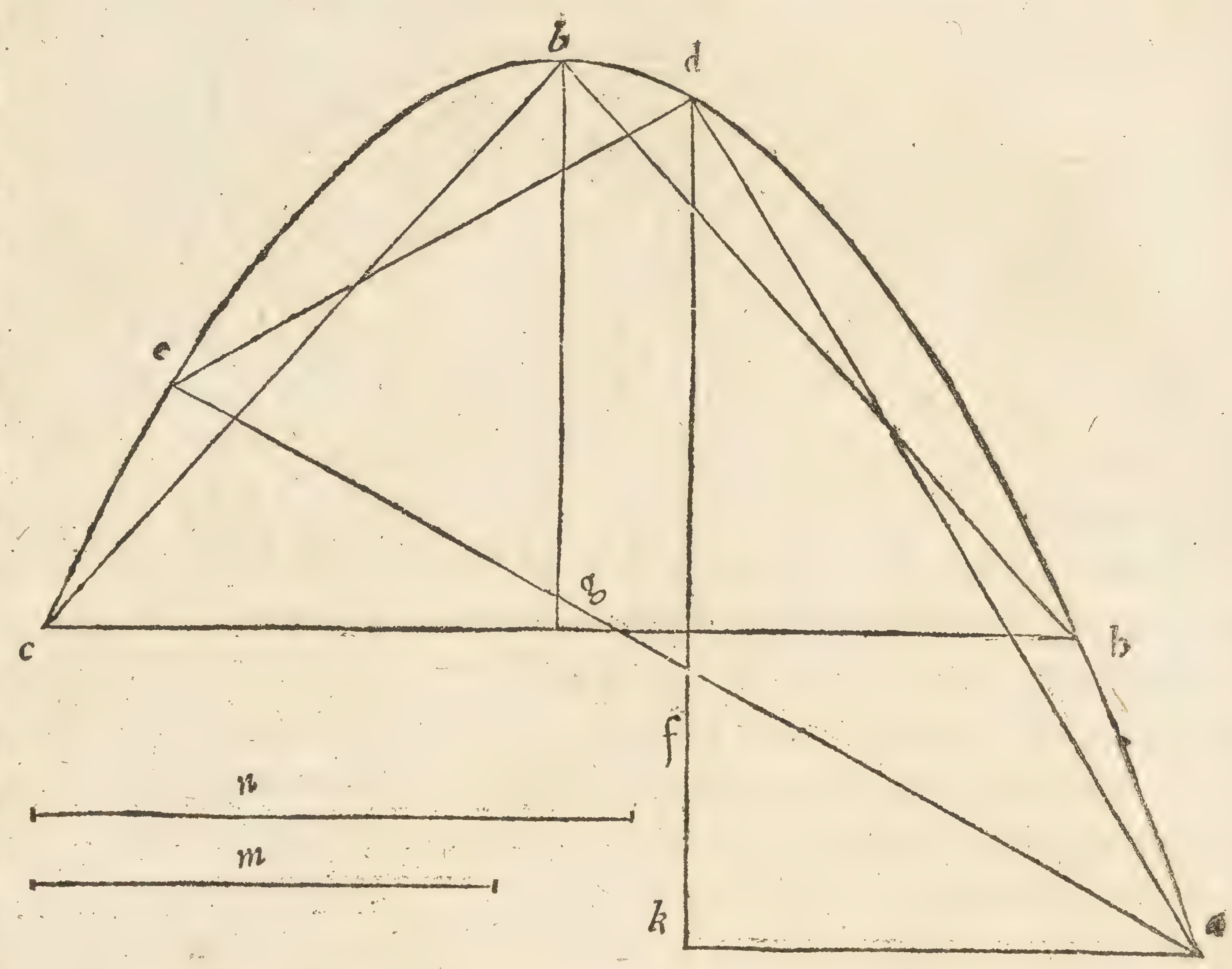
quæ ſit æqualis utriſque ſimul iſtis lineis, ei quæ eſt latus exceſſuum ſpaciorũ maximum, & uni ex lineis æqualibus habeat ad lineam æqualem utriſq; ſimul iſtis, lineæ quæ ſit tertia pars lateris exceſſus maximi, & lineæ quæ ſit unius æqualiũ dimidia. Et item hæc eadem ſpacia ad illa eadem omnia, dempto eorum maximo, maiorem habere proportionem, quàm ſit dictarum linearum proportio. Eſto lineæ rectæ quotcunque numero quantitate inter ſe æquales, in quibus a, & unicuiq; earum ſpacium accedat, ita ut creſcendo maius excedat ſibi proximum minus forma quadrata. ſint autem exceſſuum latera b c d e f g, quæ ſeſe æqualiter excedant. & exceſſus ille ſit æqualis minimæ illarum linearum, uidelicet ipſi g. ſitq; b maximum latus dictorũ exceſſuum, & g ſit minimũ latus minimi ſpacij ex dictis ſpacijs. Eſto quoq; alia ſpacia numero æqualia prædictis, quantitate uero unumquodq; æquale maximo prędictorum, quod adiacet lineæ a b. ſintq; hæc ſecunda ſpacia, in quib. h i k l lineę, ſitq; linea h i æqualis lineę a, linea uero k l æqualis lineę b: & utraq; ſimul h i ſit dupla ad lineam i. utraq; uero k l ſimul ſit tripla ad lineam k. His ita diſpoſitis, demõſtrandum eſt, quod omnia ſimul ſpacia in quibus h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm habeat linea h i k l, ad lineam i k. Item quod hæc eadẽ ſpacia ſimul omnia ad illa eadem ſimul omnia, dempto maximo eorum, maiorem habent proportionem, quàm ſit dicta lineæ ad lineam proportio. Sunt enim quędam ſpacia, in quibus a, ſeſe æqualiter excedentia: & eorum exceſſus eſt æqualis numero, quoniam adiectiones linearum & latitudines ſunt æqualiter ſeſe excedentes. ſunt itẽ alia ſpacia, in quibus h i totidem numero prædictis ſpacijs, quantitate uero unũquodq; maximo prædictorum æquale. Omnia igitur ſimul in quibus h i ſpacia ſunt, omnium ſimul in quibus a, minus quàm dupla. ſunt item eadem ſimul omnia, eorundem ſimul omnium, dempto eorum maximo, pluſquam dupla. Spacia igitur omnia ſimul in quibus i, erunt omnibus ſimul in quibus a, minora: omnibus item ſimul dempto maximo, maiora erunt quàm dupla. Rurſus quædam lineæ ſunt hæ b, c, d, e, f, g: quæ ſeſe æqualiter excedunt. & ille exceſſus eſt æqualis minimæ earum. & item aliæ lineæ, in quib. k l lineis prædictis multitudine æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum. quadrata igitur ſimul omnia linearum ſecundarum inter ſe, & lineæ prioris ordinis maximę æqualium ſunt minus quàm tripla ad quadrata ſimul omnia, linearum prioris ordinis ſeſe æqualiter excedentium. ad quadrata uero ſimul omnia reliquarum, dempto maximæ lineæ quadrato, ſunt eadem plus quàm tripla. Hoc autem eſt oſtenſum in his quę circa lineas cocleares ſunt expoſita. Spacia igitur in quibus k, ſpacijs ſimul omnibus in quibus b c d e f g, ſunt minora: ſpacijs uero ſimul omnibus in quibus c d e f g, ſunt maiora. quare & omnia ſimul ſpacia in quib. i k, ſpacijs ſimul omnib. in quibus a b c d e f g, erũt minora. Illis aũt in quibus a c d e f g ſpacijs, ſimul omnibus maiora erunt. Patet igitur, omnia ſimul ſpacia in quib. h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, eſſe minora: illis uero in quibus a c, a d, a e, a f, a g ſpacijs ſimul omnibus maiora. Ex quo clarum eſt, ſpacia ſimul omnia in quibus h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorẽ proportionem habere, quàm habeat linea h l ad lineã i k. ad reliquas uero illarũ dempta a b linea, maiorem proportionem dicta proportione ſeruare. quare, &c.

Si cuiuſcunq; coni ſectionẽ lineę rectæ ab eodem puncto exeuntes cõtigerint, ſint autem & aliæ recte lineæ intra coni ſectionẽ lineis contingentib. æquediſtãter ductæ, & ſeſe inuicẽ ſecantes quadrãgulæ ſuperficies, quæ ſub dictarũ linearũ ſectionib. cõtinentur, eandẽ habent proportionẽ ad quadrata contingentiũ, unaquæq; ad quadratũ cõtingentis illius quæ ſibi reſpondeat, quã habet ſuperficies producta ex partib. alterius lineæ una in alterã ductis, ad quadratum cõtingentis eius quæ ſibi fuerit æquediſtãs. Hoc aũt demonſtratũ iam fuit in conicis elemẽtis.

Si

4 SI ab eadem rectanguli coni ſectione duæ portiones, utcunq; contingant, abſcindantur, quæ diametros habeant æquales, ipſæ quoq; portiones æquales erunt, & trianguli ipſis inſcripti, qui eandem cum portionibus baſim & altitudinem habuerint, erunt æquales. Diametrum autem uoco cuiuſcunq; portionis lineam rectam, quæ diuidit in duo æqua omnem lineam rectam baſi ipſius portionis æquediſtantē.

Eſto rectanguli coni ſectio a b c, et ab ea abſcindantur duę portiones a d e, & h b c. Eſto autem ipſius portionis a d e, diametros d f: ipſius uero h b c diametros b g, & eſto d f æqualis ipſi b g. Oſtendendum eſt, quod portiões ipſę ſunt æquales inuicem, a d e ipſi h b c. & trianguli quoque ipſis eo modo, quo dictū eſt inſcripti, æquales inuicem.

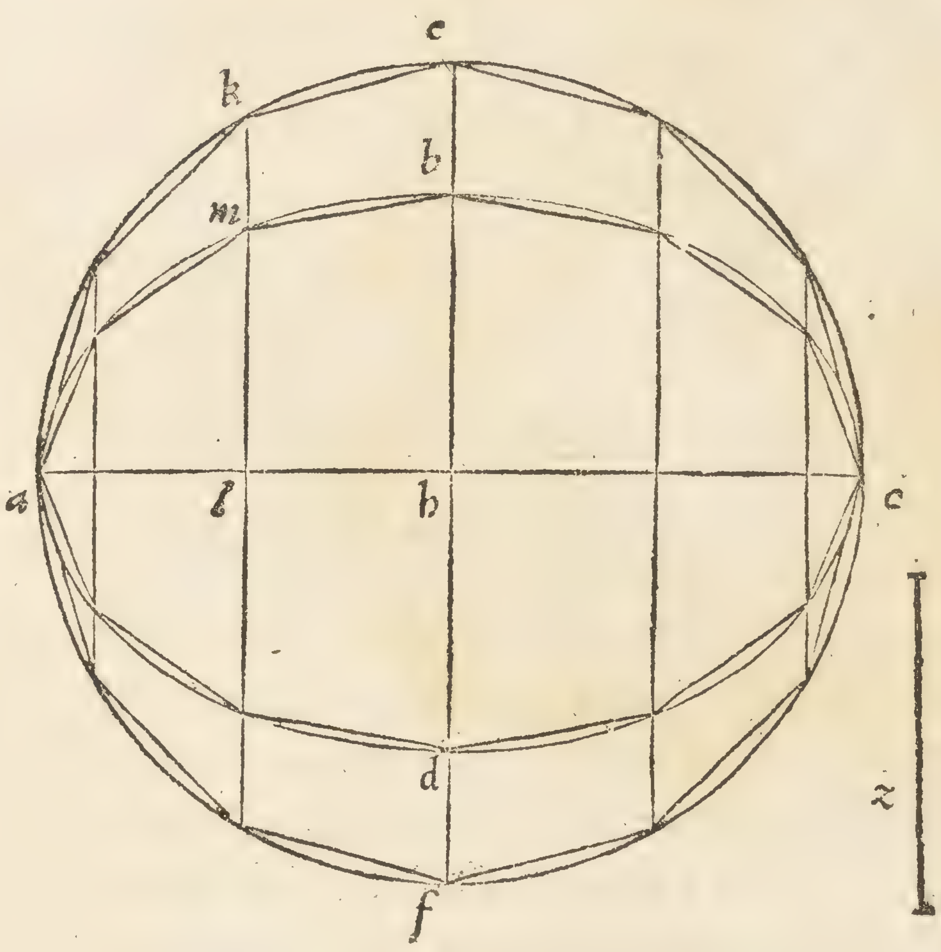


Eſto primum quæ ſcindit alteram portionem h c, ſecundum angulos rectos ad diametrum portionis coni rectanguli. ſumatur autem ea iuxta quā poſſunt illæ quæ à ſectione ducuntur dupla eius quę à ſectione ad axem ducitur, eſto illa in qua m: ducatur autem ab ipſo a perpendicularis ſuper d f, quæ ſit a k. Quoniam igitur d f eſt diametros portionis, & a e in duo æqua diuiditur in puncto f, & d f eſt æquediſtans diametro ſectionis coni rectanguli: ſic enim in duo diuidit omnes æquediſtāter ipſi a e ductas. quam itaq; proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eandem habeat m ad n. quæ autem à ſectione ad ipſam d f ducuntur æquediſtanter ipſi a e poſſunt ea ſpacia, quæ lineæ ipſi n æquali adiaceant, latitudinem habentia lineam illam, quam illæ ductæ æquediſtanter ipſi a e ex d f diametro incidunt uerſus d terminum ſumptam. Nam hoc eſt oſtenſum in conicis. Igitur a f ualet tantum, quantum continetur ſub n & d f. poteſt autem & h g æquale ei quod continetur ſub m & b g, cum h g ſit perpendicularis ſuper diametrum, & quadratum a f ad quadratum h g habeat eandem proportionem quam m habet ad n, quia d f & b g ſunt poſitæ æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam habet m ad n, erunt igitur h g & a k æquales. ſunt autem & b g, & d f ęquales: quare id quod fit ex h g in b g, æquatur ei quod fit ex a k in d f. æqualis eſt igitur triangulus h g b triangulo d a f, quare & eorum dupla æqualia ſunt. Portio autem a d e, eſt ſeſquitertia trianguli a d e: trianguli uero h b c, ſimiliter ſeſquitertia eſt portio h b c: quare patet, portiones & triangulos ipſis portionibus inſcriptos inter ſe eſſe æquales. Si uero neutra earum quæ diuidunt portiones linearum fuerit ad ipſam ſectionis diametrum ſecundum angulos rectos, ducta ex diametro ſectionis coni rectanguli uerſus eam partē à qua diametros ſectionis ab ipſa ſectione exierit, ſumatꝛ pars quæ ſit æqualis diametro portionis unius, & à puncto huius ſumptæ extremo ducatꝛ in utramq; partem ſecundū angulos rectos linea recta, quæ abſcindit portionem

utriſq;

utriq; prædictarum æqualem, ut ſuprà oſtenſum eſt. quare conſtat propoſitū.

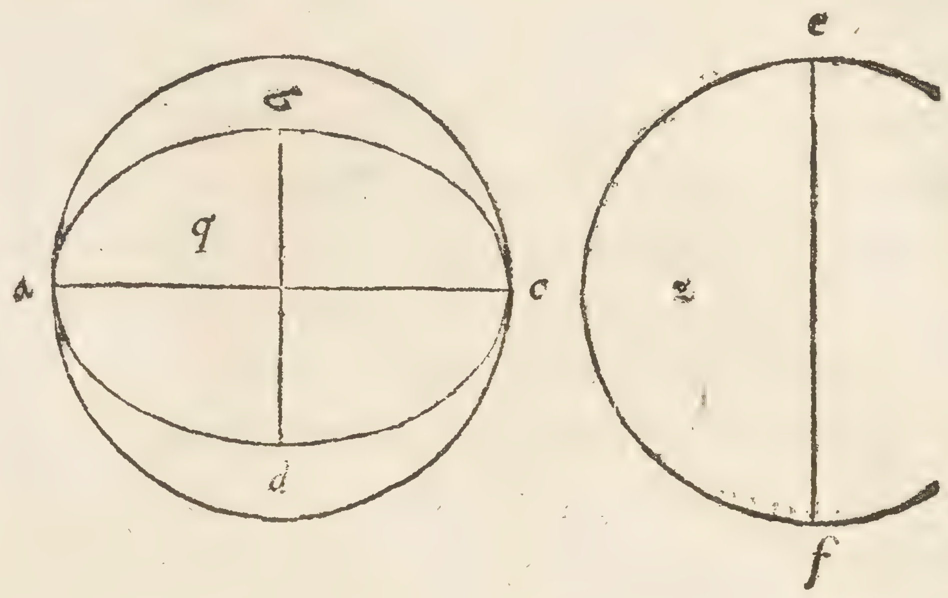
OMne ſpacium quod comprænenditur à ſectione coni acutianguli ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro ſectionis coni acutianguli, habet eam proportionem quam minor ſectionis diametros habet ad maiorem, quæ eſt circuli diametros. Eſto coni acutianguli ſectio, in qua a b c d. eius maior diametros eſto, in qua a c: minor uero, in qua b d. eſto circulus circa a c diametrū. Oſtēdendū eſt, ſpaciū à ſectione coni acutianguli comprehenſum, habere ad dictum circulum eam proportionem, quā habet b d ad a c: hoc eſt ad e f. quā itaq; habet b d ad e f, eam habeat circulus in quo z ad a e c f circulum. Dico quod circulus z eſt æqualis ſectioni coni acutianguli. Si enim circulus z non dicatꝰ equalis ſpacio cōprehēſo à ſectione coni acutiāguli, eſto primū ſi fieri poteſt maior. poteſt itaq; in circulo z figura multorum angulorum & numero pariū inſcribi, quæ ſit maior dicto ſpacio a b c d. intelligatur ergo inſcripta, 5



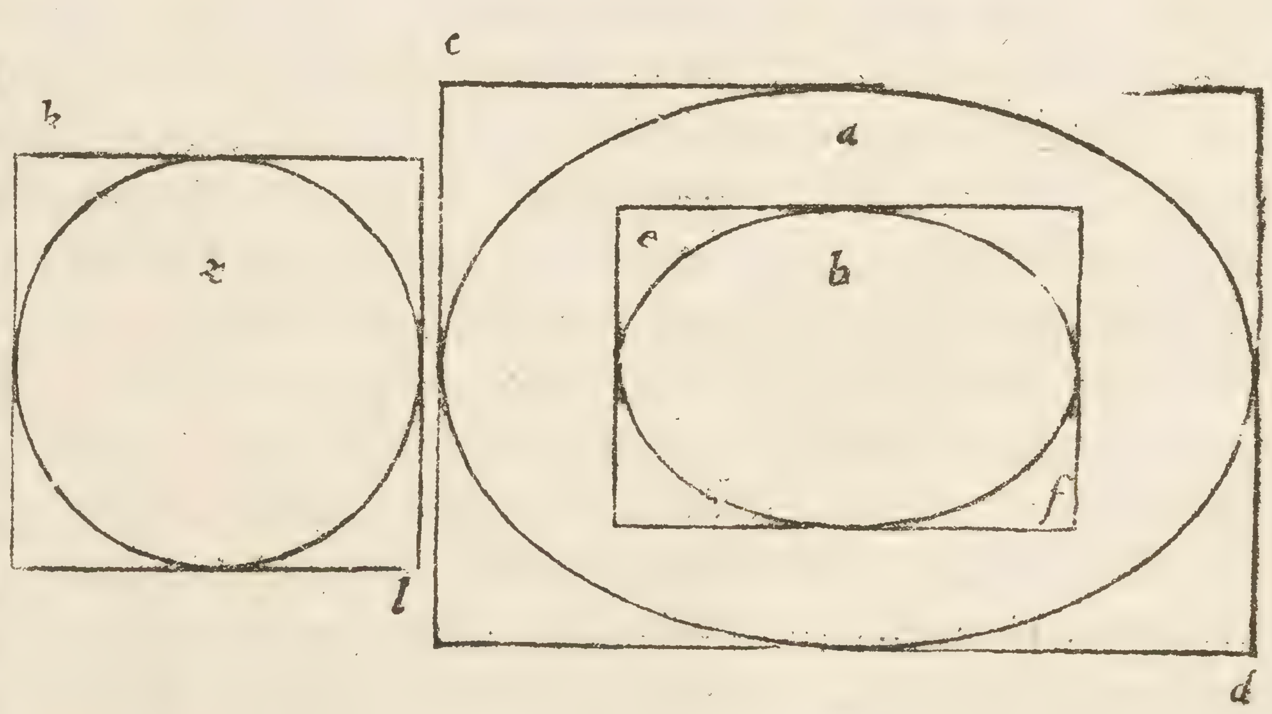
& inſcribatur circulo a e c f figura ſimilis inſcriptæ circulo z, & ab eius angulis ducantur perpendiculares ſuper a c diametrum: in quibus uero punctis perpendiculares ſcindunt ſectionem coni acutianguli, ea puncta lineis rectis iungantur. eritq; iam quædam figura in ipſa coni acutianguli ſectione inſcripta, quę figura ad rectilineam figuram circulo a e c f inſcriptam, eādem habebit proportionem, quā habet b d ad e f. quoniam e h, k l perpendiculares in eandem proportionem diuiduntur ſecundum m b: manifeſtum eſt, quod l e ſpacium tabulare, ad h m habet eam quam h e ad b h proportionem. eadem ratione & cætera ſpacia tabularia, unumquodq; eorum quæ ſunt in circulo, ad unumquodq; eorum quæ ſunt in ſectione coni acutianguli, eam habebit quæ eſt e h ad b h proportionem: habent quoq; trianguli qui ad a c exiſtunt, in circulo ad triangulos in ſectione coni acutianguli proportionem eandē. Tota igitur figura rectilinea circulo inſcripta a e c f, ad totam figuram rectilineam ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habebit eandem proportionem quam e f habet ad b d. habet autem eadem ipſa figura rectilinea ad rectilineam circulo z inſcriptam, hanc eandem proportionem, quoniam circuli eandem proportionem inter ſe retinebant. Igitur rectilinea circulo z inſcripta, eſt æqualis rectilineæ ſectioni coni acutianguli inſcriptæ: quod quidē eſſe non poteſt. nā maior erat toto ſpacio à ſectione coni anguli acuti cōpræhenſo. Sed eſto item ſi fieri poteſt minor. Rurſus poteſt in ſectione coni acutianguli inſcribi figura paribus contenta lateribus, quæ maior ſit circulo z. Eſto igitur inſcripta, & ab angulis eius perpendiculares ducantur ad a c, & educātur ad circuli circumferentiam. Rurſus igitur erit, ut rectilinea circulo a e inſcripta, ad rectilineā ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habeat eam proportionē, quam e f ad b d. ſi itaq; circulo z inſcribatur ſimilis illi, oſtendetur eam quæ in circulo z eſt inſcripta, æqualem illi eſſe quæ ſectioni coni acutianguli eſt inſcripta: quod ſanè eſſe non poteſt. Circulus igitur z neq; minor eſt ſpacio à ſectione coni acutianguli compræhenſo. Manifeſtum eſt igitur, quod dictum ſpacium habet ad a e c f circulum eandem proportionem, quam habet b d ad e f.

i Quod

6 QVodlibet ſpacium à coni acutianguli ſectione compræhenſum, ad quem cunq; circulum comparetur, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex utriſque eius ſectionis diametris producta habere percipitur, ad quadratum diametri eius circuli ad quem fuerit comparatū. Eſto ſpacium à coni acutianguli ſectione compręhenſum, in quo q. eius ſectionis diametri ſint a c, b d maior autem a c: & eſto circulus in quo z, eius autē diametros in quo eſt e f. Eſt igitur demōſtrandū, ſpacium q ad circulum z eam habere proportionem, quam ſuperficies producta ex a c diametro in b d habet, ad quadratum diametri e f. Circūſcribatur itaq; circulus ipſi a c diametro. Spacium igitur q, ad circulū cuius diametros eſt a c, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex a c in b d producta habet, ad quadratum diametri a c. circulus quoque cuius diametros eſt a c, ad circulum cuius diametros eſt e f, habet eandem proportionem, quam habet quadratū a c ad quadratum e f. Ergo manifeſtum eſt, ſpacium q ad circulum z eam proportionem habere, quam ſuperficies ex a c in a d producta, habet ad quadratum e f.

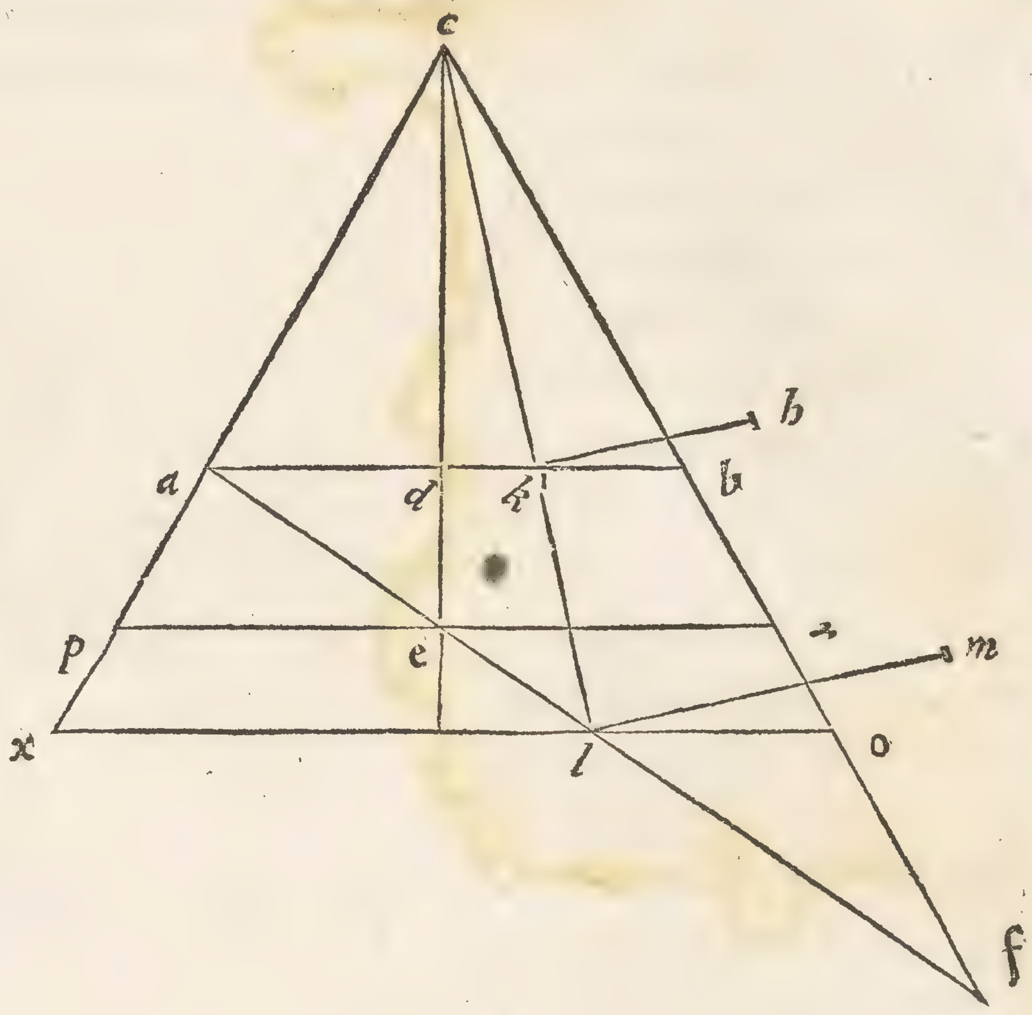


7 SPacia quæq; à coni acutianguli ſectione compræhenſa, ad alia quæq; ſpacia quæ à coni acutianguli ſectione compræhendantur comparata, eandem proportionem habere probantur, quam ſuperficies ex iſtorum diametris productæ, ad ſuperficies ex illorum diametris productas habuerit. Eſto ſpacia à coni acuti anguli ſectione cōpræhenſa, in quibus a b: eſto etiam c d ſuperficies producta ex diametris ſectionis a. eſto item e f ſuperficies producta ex diametris ſectionis b. Eſt itaq; declarandū, ſpacium a ad ſpacium b, eandem proportionem habere, quam c d habuerit ad e f. Sumatur itaque quiſpiam circulus in quo z, quadratum diametri illius eſto k l: habet itaq; a ſpacium ad circulum z eandem proportionem, quam c d ad k l: circulus autem z ad b ſpacium eandem habet proportionem, quam k l ad e f. Manifeſtum eſt igitur, a ſpacium habere ad b ſpacium eā, quam c d ad e f habuerit proportionem. Ex hoc igitur manifeſtum eſt, quod ſpacia à ſimilibus ſectionibus coni acutianguli compræhenſa, eam inter ſe proportionem ſeruabunt, quam ſectionum diametri, quæ rationis eiuſdem fuerint, potentia inuicem retinebunt.



8 DAta coni acutianguli ſectione, & ab eius centro recta linea ſuper plano in quo dicta ſectio exiſtit, perpendiculariter erecta, fieri poteſt, ut conus quidā deprehendatur, qui uerticem habeat erectæ lineæ terminum, in cuius coni ſuperficie data coni ſectio compræhendatur. Detur aliqua coni acutianguli ſectio, & de eius centro recta linea ſuper planum perpendiculariter erigatur, in quo data ſectio

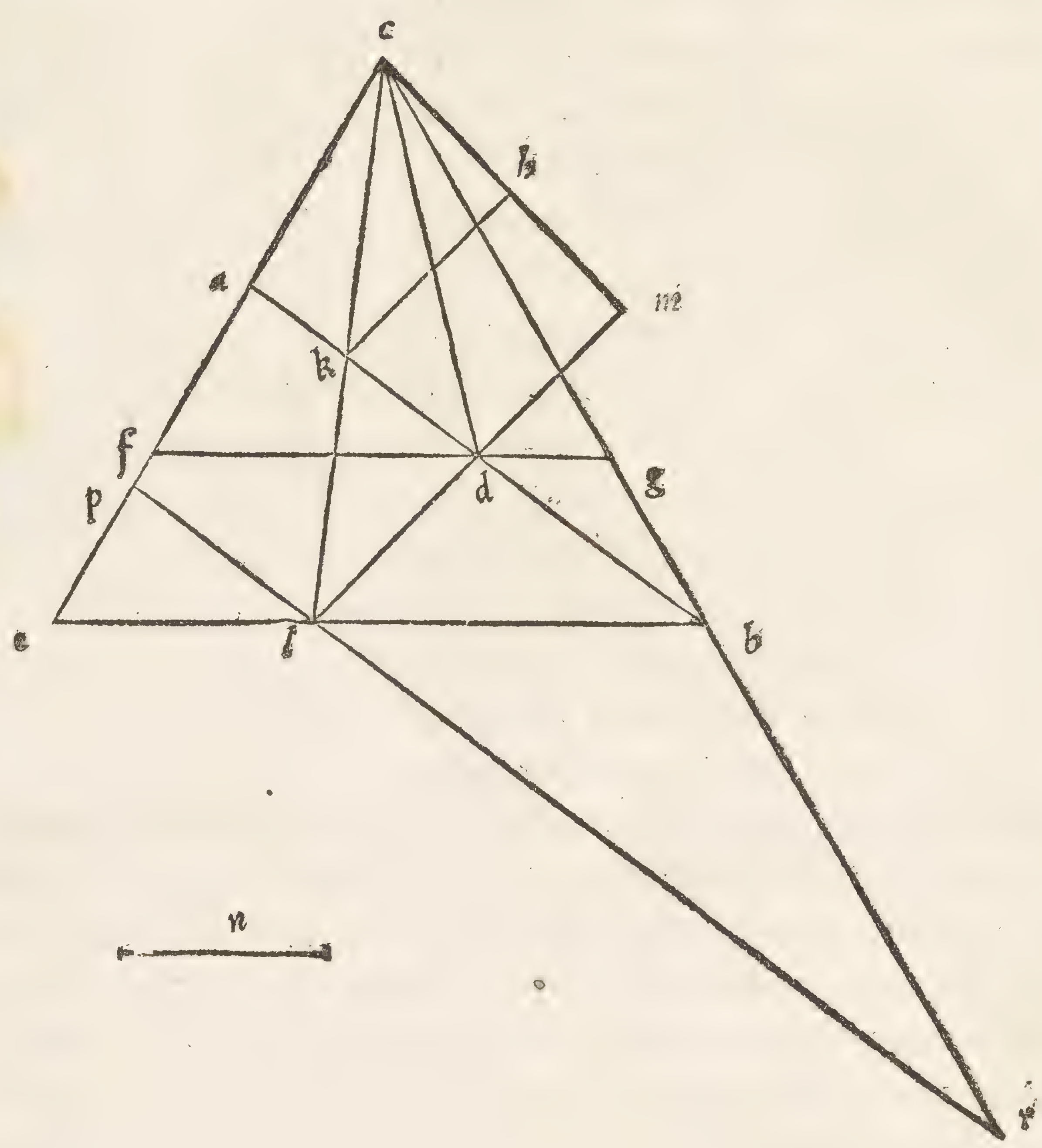
ctio continetur: per minorem uero diametrum & lineam erectam planum educatur, & ſit in ipſo minor diametros a b: centrum uero datæ ſectionis d, linea à cẽtro erecta c d, eius terminus c. ſectio autem coni acutianguli intelligatur circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto a d, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticem habeat punctum c, in cuius ſuperficie ſit coni acutianguli ſectio. Ducatur autem à pũcto c ad a b recta, quæ educatur: & à puncto a ducatur a f, ita ut id quod fit ex a e in e f, ad quadratum e c, eam habeat proportionem, quam habet quadratum dimidij maioris diametri ad quadratum d c. hoc enim fieri poteſt, cum maior ſit proportio iſta, quàm ea quam habet id quod fit ex a d in d b, ad quadratum d c. Secũdum uero a f planum erigatur, erectum ſuper planum in quo eſt a c, a f. in quo item plano circulus deſcribatur circa diametrum a f, & ab hoc circulo conus fiat qui uerticem habeat pũctum c.



in huius autem coni ſuperficie demonſtrabitur eſſe ſectio coni acutianguli. Nam ſi non fuerit, neceſſe eſt punctum aliquod eſſe in ſectione coni acutianguli, quod non erit in ſuperficie coni. intelligatur itaq; punctum quoddam in ſectione coni acutianguli ſumptum, quod ſit h, quod non ſit in ſuperficie coni, & ducatur ab ipſo h perpẽdicularis h k, erit igitur ipſa ſuper plano erecta in quo eſt a c, a f. ducta itaq; linea recta à puncto c ad k, incidet iã ipſa lineæ a f. eſto in pũcto l: et à pũcto l erigatur perpẽdicularis ſuper a f, quæ ſit l m, in circulo circa a f deſcripto. intelligatur autem m eleuatum in circũferentia eius. ducatur autem et à puncto l æquediſtans ipſi a b, quæ ſit x o: à puncto autem e, ducatur p r. Quoniam igitur id quod ſub e a & e f continetur, ad quadratum e c, eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri, ad quadratum d c: quadratum uero e c, ad id quod cõtinetur ſub e p, e r, eam habet quam quadratũ d c ad id quod fit ex a d in d b. Id igitur quod fit ex a e in e f, eã habet ad id quod ex p e in e r, quã quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad id quod fit ex a d in d b. Eſt aũt ſicut id quod fit ex a e in e f, ad id quod fit ex p e in e r: ſic id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex l x in l o. ſicut autem quadratum dimidiæ maioris diametri, ad id quod fit ex a d in d b: ſic quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Igitur eandem habet proportionem id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex x l in l o: quam quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Habet autem id quod fit ex x l in l o, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c. Igitur id quod fit ex a l in l f, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam quadratum h k ad quadratum k c. ei autem quod fit ex a l in l f, æquale eſt quadratum l m. nam in ſemicirculo circa a f deſcripto, ducta eſt l m perpendicularis. eandem igitur habet proportionem quadratum l m ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c. quare in eadem linea recta ſunt puncta tria, c h m: ipſa uero c m linea eſt in ſuperficie coni. manifeſtum igitur, quod punctum h in coni ſuperficie exiſtet. Suppoſitum autem fuerat, ibi non exiſtere: nullum igitur punctum in ſectione coni acutianguli eſt, quod non exiſtat in ſuperficie dicti co-

ni. Tota ergo coni acutianguli ſectio in ſuperficie eiuſdem coni exiſtet.

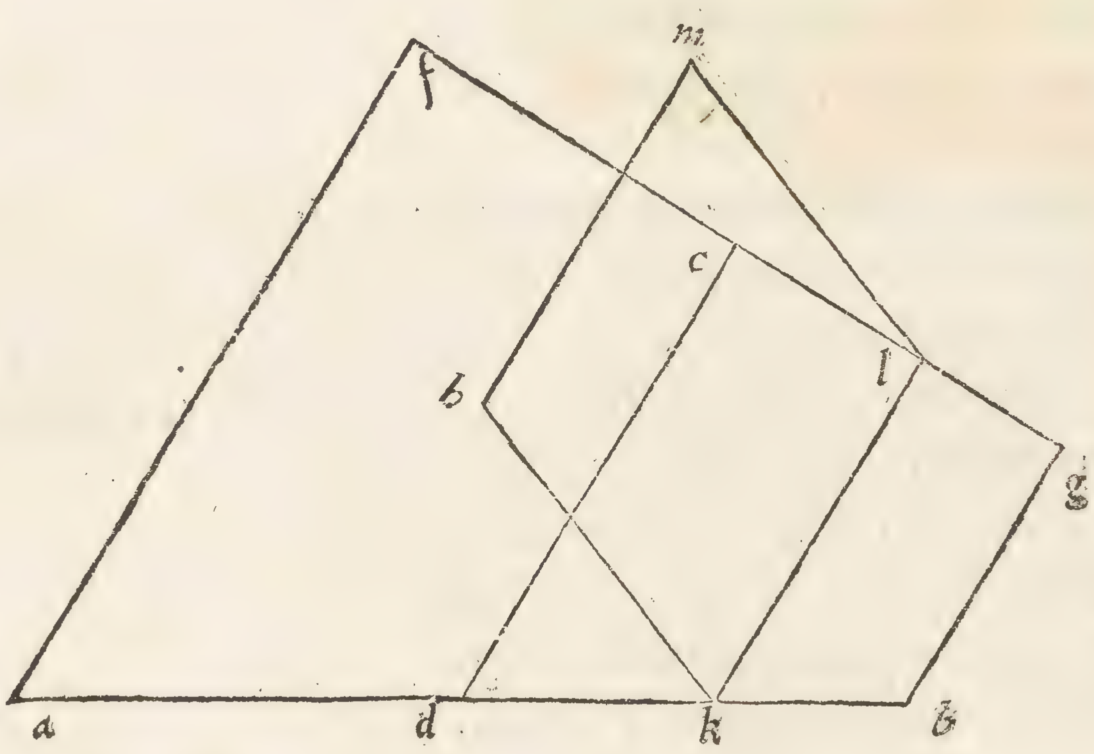
9 DAta coni acutianguli ſectione, & linea recta ex eius centro non perpendicu-lariter educta in altum, in plano quod ex altera diametro ſit erectum, ſuper plano in quo eſt coni acutianguli data ſectio, poteſt conus inueniri, qui uerticem habeat terminum lineæ eductæ, in cuius ſuperficie coni acutianguli ſectio data cō ſiſtet. Eſto itaq; datæ ſectionis coni acutianguli diametros b a, centrum autem



d. & ſit d c ex centro e-ducta, ut dictum eſt: in telligatur autem coni acutianguli ſectio quę-dam circa diametrum a b, in plano erecto ſu-per planum in quo ſūt lineæ a b, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticē habeat pun ctum c, in cuius ſuperfi cie ſit coni acutianguli data ſectio. Lineæ igi-tur a c, c b non erunt æquales: quare c d non ſtat erecta ſuper plano, in quo eſt ipſius coni acutianguli ſectio da-ta. Sit igitur ęqualis c e ipſi c b, eſto uero n re-cta æqualis dimidiæ al terius diametri, quæ eſt coniugalis ipſi a b, & per d ducatur f g ęque-diſtans ipſi e b: ab ipſo uero e b erigatur planum erectē ſtans ſuper planum in quo eſt a c, c b: & in hoc plano deſcribatur circulus circa diametrum e b, aut ellipſis. ſiquidem quadratum n eſt æquale ei quod fit ex f d in d g, fiat circulus. Sin autem fiat coni acutianguli ſectio talis, ut quadratum alterius diametri ad quadratum e b eandem habeat pro portionem, quam habet quadratum n ad id quod fit ex d f in d g: deinde conus ſumatur, qui uerticem habeat punctum c, in cuius ſuperficie erit circulus: aut co-ni acutianguli ſectio circa diametrum e b. hoc enim eſſe poteſt, quoniam linea à puncto c ad mediam e b ducta, recta eſt ad planum quod eſt ſecundum e b con-ſtitutum. in hac itaq; ſuperficie ineſt etiam coni acutianguli ſectio circa diame-trum a b. Si non exiſtit in dicta ſuperficie, dabitur aliquod punctum in coni acu-tianguli ſectione, quod non erit in dicta ſuperficie coni. Intelligatur quoddam huiuſmodi punctum ſumptum h, quod non ſit in dicta coni ſuperficie: & à pun-cto h ducatur perpendicularis h k ſuper a b: iuncta uero c k extra ducatur, & co-incidat e b in puncto l. per punctum uero l ducatur quædam in plano erecto ſe-cundum e b perpendicularis ſuper e b, quæ ſit l m: ipſum autē m punctum intelli gatur eleuatum ſuper ſuperficiem coni, & ducatur per punctum l æquediſtans ip ſi a b linea p r: erit iam ſicut quadratum n ad id quod fit ex f d in d g, ita quadratū l m ad id quod fit ex e l in l b. uerum ſicut id quod fit ex f d in d g, ad id quod fit ex a d in d b: ita quod fit ex e l in l b, ad id quod fit ex e l in l r. erit igitur ſicut quadratū n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratū l m, ad id quod fit ex p l in l r. ſicut autē qua-

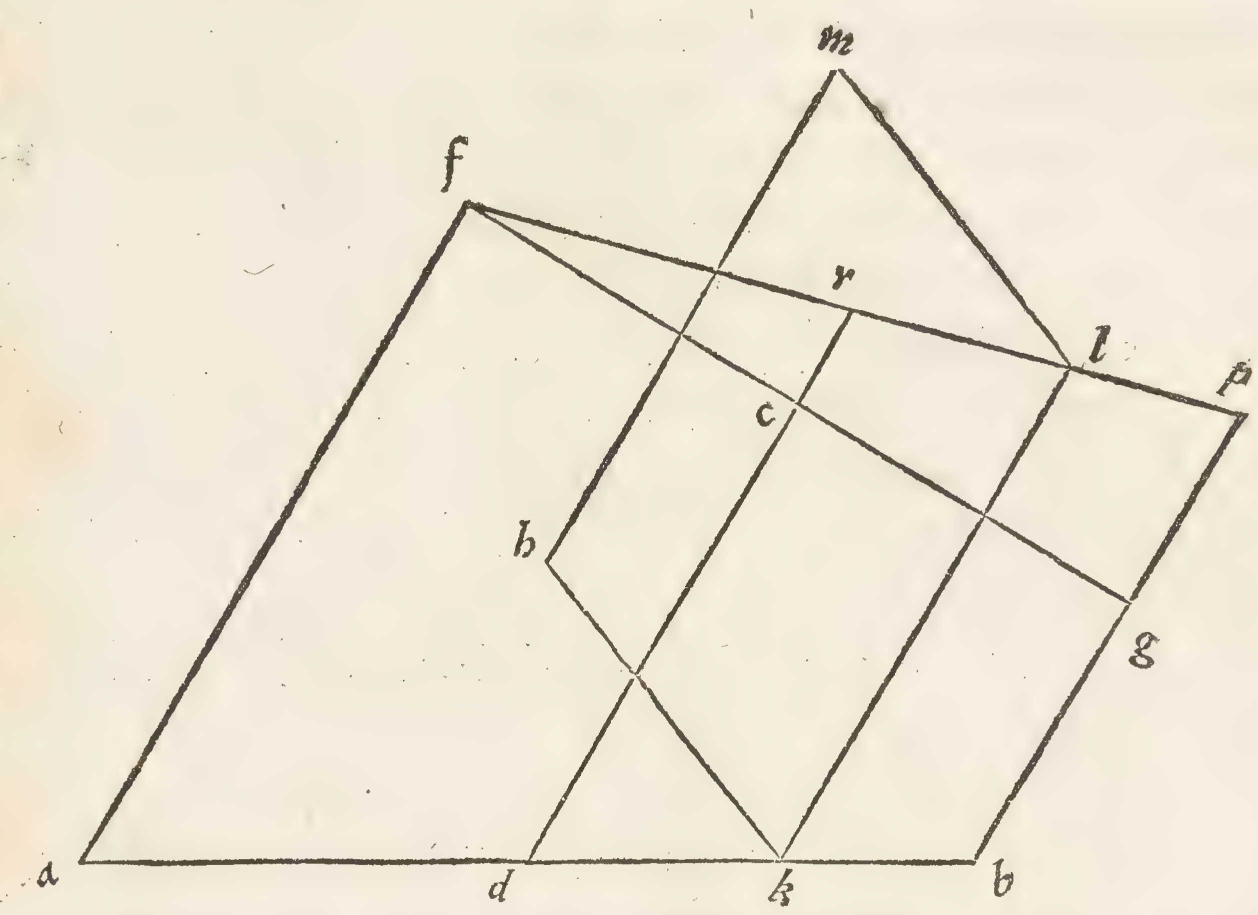
quadratum n,ad id quod fit ex a d in d b,ita quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b,quoniam in eadem coni acutianguli ſectione ductæ ſunt perpendiculares ſuper diametrum a b. eandem igitur proportionem habet quadratum l m, ad id quod fit ex p l in l r,quam habet quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b.habet autem quod fit ex p l in l r ad quadratum c l eandem proportionem,quam habet id quod fit ex a k in k b , ad quadratum k c : igitur eandem proportionem habet quadratum l m, ad quadratum l c,quam quadratum h k ad quadratum k c,quare puncta c h m erunt in eadem linea recta . ſed c m puncta ſunt in ſuperficie coni : quare manifeſtum eſt, h punctum in eadem ſuperficie exiſtere. ſuppoſitum autē fuerat, non eſſe: igitur patet, quod fuerat demonſtrandum.

DAta coni acutianguli ſectione, & linea ab eius ſectionis centro erecta in pla 10
no, quod ſit ex altera diametro eductum , quodq; erectum ſtet ſuper plano in quo eſt coni acutianguli ſectio data, poteſt cylindrus effingi, qui axem habeat directè iunctum lineæ à centro ſectionis,ut dictum fuit, erectæ , in cuius cylindri ſuperficie data coni acutianguli ſectio exiſtat. Eſto datæ ſectionis coni acutianguli altera diametros b a, cē trum eius d. eſto autem c d linea ex centro , ut dictum fuit,erecta : intelligatur autem coni acutianguli ſectio circa diametrum a b in plano illo conſtituta,quod ſtet erectū ſuper plano , in quo ſunt lineæ a b,c d. oportet itaque cylindrum effingere, qui axem habeat in directū lineæ c d coniunctum,in cuius cylindri ſuperficie data coni acutianguli ſectio exiſtat. à punctis itaq; a b educantur a f, b g, æquediſtantes ipſi c d:altera iam diametros ſectionis coni acutianguli , aut æqualis erit interuallo quod inter a f & b g lineas continetur , aut maior ,aut minor. Eſto primum æqualis f g lineæ, & linea f g ſit erecta perpendiculariter ad lineam c d : ab ipſa uero f g exeat planum, quod ſit erectum ſuper linea c d: & in hoc plano circulus eſto circa diametrum f g, & ab hoc circulo cylindrus exeat habens axem c d : in ſuperficie igitur huius cylindri erit data coni acutianguli ſectio . Nam ſi non ſit , dabitur aliquod punctum in ſectione coni acutianguli , quod non continebitur in ſuperficie dicti cylindri. ſit illud h, & ab ipſo h ducatur perpendicularis h k ſuper a b:erit autem ipſa erecta ſuper plano, in quo ſunt a b, c d lineæ.à puncto uero k ducatur k l æquediſtans ipſi c d, & à puncto l erigatur l m perpendiculariter ad f g, in circulo circa f g cōſtituto. intelligatur autem m eleuatum in ſuperficie ſemicirculi eius qui eſt circa diametrum f g. habet itaq; eandem proportionem quadratum h k perpendicularis, ad id quod fit ex a k in k b:& quadratum f c, ad id quod fit ex a d in d b. quoniam f g eſt æqualis alteri diametro . Habet autem & id quod ex f l in l g, ad id quod fit ex a k in k b,eam quam habet quadratū f c ad quadratū a d ellipſis:quare id quod fit ex f l in l g, æquatur quadrato h k, & etiam idem æquale quadrato l m : æquales igitur h k & l m perpendiculares erunt:quare lineæ l k & m h ſunt æquediſtā tes . atq; ideo d c & m h , æquediſtantes erunt. unde & in ſuperficie cylindri erit h m, quoniam ab m puncto in ſuperficie cylindri conſtituto ducta eſt m h, æquediſtans axi. ex quo ſequitur, punctum h in eadem exiſtere ſuperficie. Fuerat ſuppoſitū, non ſic eſſe , unde patet id, quod oportuit demonſtrare . Clarum iam eſt,

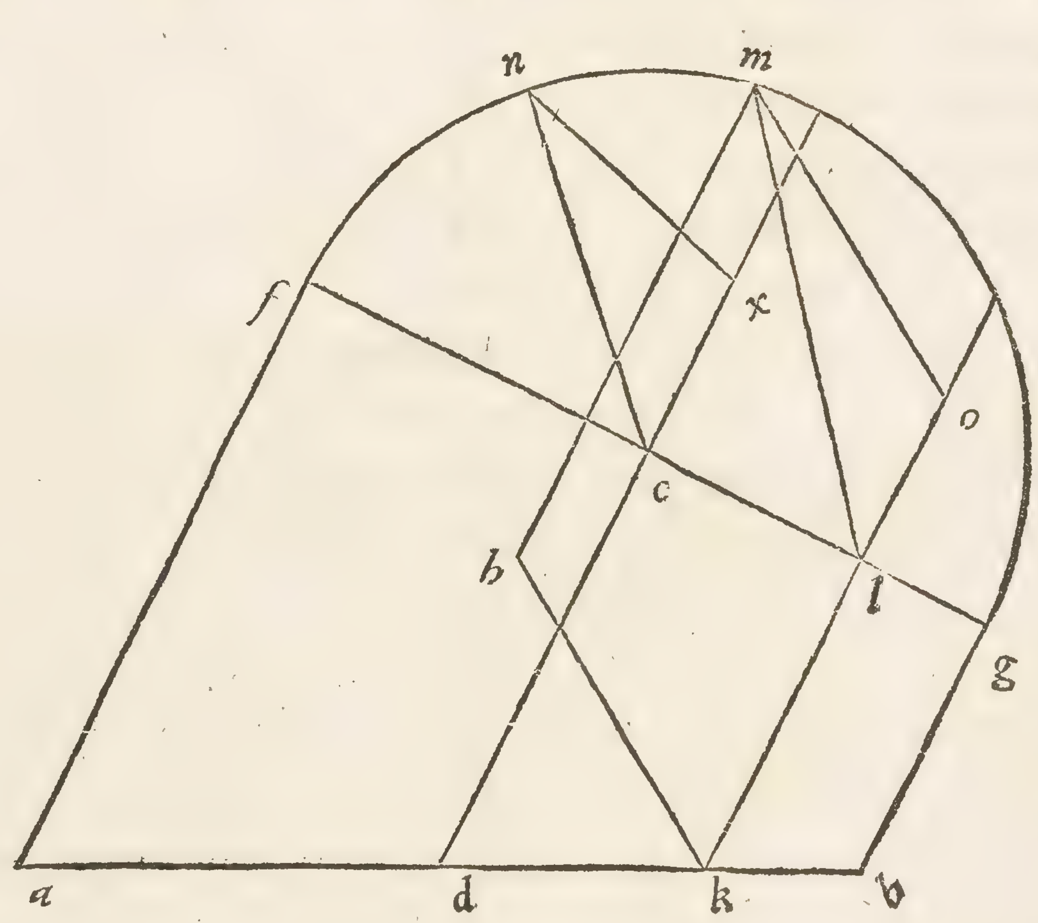


quod cylindrus compræhendens ellipſim, erit erectus, ſi altera diametros æqualis fuerit interuallo, quod interiacet inter lineas ab extremis alterius diametri ductas, ipſi lineæ ex centro erectæ æquediſtantes.

Eſto item altera diametros maior f g. et eſto æqualis f p linea alteri diametro: ab ipſa autē p f erigatur planum erecte, ſtās ſuper plano, in quo eſt b c d: & in hoc plano eſto circulus circa diametrū p f. ab hoc circulo prodeat cylindrus, qui axem habeat d r. in ſuperficie itaq; cylindri huius eadem ratione ſectio coni acutianguli exiſtere demonſtrabitur.



Eſto demum altera diametros minor f g. quantum maius poteſt f c, quām dimidium alterius diametri: eſto id c x lineæ quadratum. & à puncto x erigatur linea æqualis dimidiæ alterius diametri, erecta ſuper plano in quo ſunt lineæ rectæ a b c d, ſitq; hæc x n. intelligatur aūt punctū n eleuatū. c n igitur erit æqualis c f. in plano uero in quo eſt f g, c n circulus deſcribat̄, circa diametrum f g. iſte autem ductus erit per n punctum. & ab ipſo circulo cylindrus effingatur, qui axem habeat c d: in ſuperficie itaq; huius cylindri ſectio coni acutianguli exiſtit. Sin autem non ſic, dabitur aliquod punctum in ſectione coni acutiāguli, quod nō erit in ſuperficie cylindri. eſto illud h, & ducatur h k perpendicularis ſuper a b, & à puncto k ducatur k l æquediſtans lineæ c d. & à puncto l ducatur erecte l m ſuper f g in ſemicirculo circa diametrum f g conſtituto. intelligatur autem punctum m eleuatum in arcu ſemicirculi circa f g conſtituti, ſuper ſemicirculum circa f g conſtitutum. & à puncto m ducatur m o, perpendicularis ſuper lineam k l eductam. erit aūt hæc erecta ſuper plano in quo ſunt a b, c d, quia eſt linea k l erecta perpendiculariter ſuper lineam f g. eſt itaq; ſicut quadratū m o ad quadratū m l, ita quadratum n x ad quadratum c n: ſicut autem quadratum m l, ad id quod fit ex a k in b k, ſic quadratum c n ad quadratum a d. quia quadratum m l eſt æquale ei quod fit ex f l in l g: quadratū uero c n quadrato c f æquatur. erit igitur ſicut quadratum m o, ad id quod fit ex a k in k b, ſic quadratū x n, ad quadratum a d. Eſt aūt & quadratū k h, ad id quod fit ex a k in k b, ſicut quadratū x n ad quadratum a d: quia x n eſt æqualis dimidiæ alterius diametri. patet quod lineæ perpendiculares m o, h k,



erunt

erunt æquales: quare o k & h m erunt æquales. quoniam autem m h eſt ducta æquediſtans axi in cylindro, et punctum m eſt ſitum in ſuperficie eius, neceſſe eſt et lineam m h in cylindri eſſe ſuperficie collocatam. manifeſtum eſt igitur, quod & h punctum in eadem ſuperficie continetur. Sumptum autem fuerat, non contineri in illa. Conſtat ergo neceſſarium eſſe, ſectionem coni acutianguli in ſuperficie cylindri contineri.

OMnis coni ad quemcunq; conũ proportionem compoſitam eſſe ex proportione baſium inter ſe, & ex proportione altitudinum, demonſtratur ex his quæ prius ſunt oſtenſa: & quod omnis abſciſio coni ab abſciſione coni, habet proportionem compoſitam ex proportione baſium & proportione altitudinum: & quod omnis ſector cylindri triplus eſt ad abſciſionẽ coni quę baſim habeat eandem cum ſectore, & eandem altitudinem. Eadem enim eſt demonſtratio, & eius quod cylindrus eſt triplus ad conum, qui baſim eandem, & altitudinem habeat eandem cum cylindro. 11

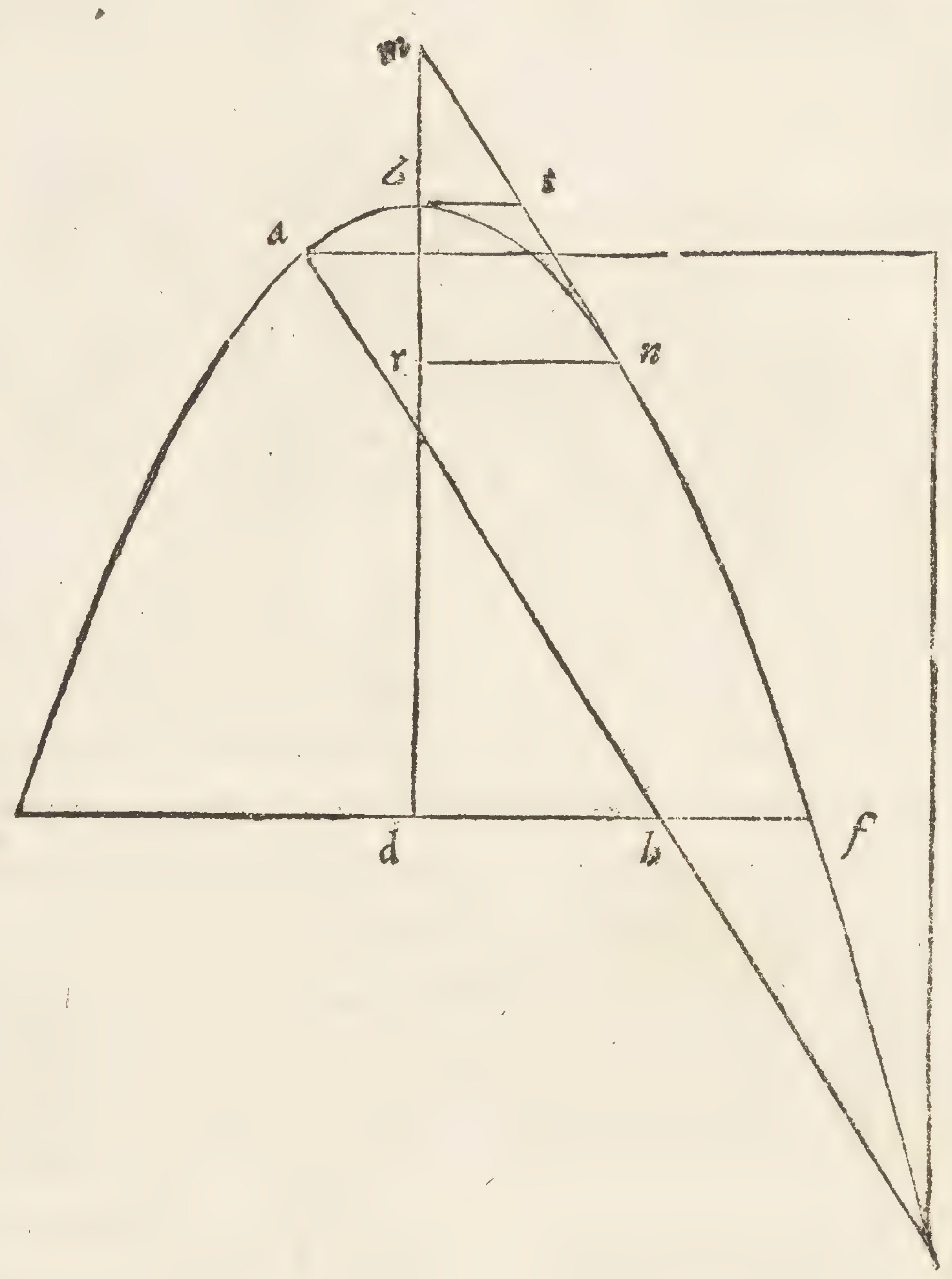
SI figura conoidalis rectangula plano per axẽ ducto ſcindatur, ſectio erit conoidalis rectanguli ſectio ipſa uidelicet eadem, quæ ipſam figuram conoidalem comprædit, ſi fuerit circumuoluta: diametros eius erit cõmunis ſectio duorũ planorum, eius quod ſcindit figuram, & eius quod per axem ducitur perpendiculariter, ſuperdiuidens alterum erectum. Quod ſi ſecetur plano ſuper axem erecto, ſectio circulus erit, qui centrum in axe habebit. Si conoidale obtuſiangulum ſcindatur plano per axem, aut æquediſtanter axi ductum, aut per uerticem coni comprædentis conoidale, ſectio erit coni obtuſianguli ſectio. Siquidem per axem ea erit quæ figuram ipſam circumuoluta deſcribit. Si autem æquediſtanter axi, erit prædictæ ſimilis. Si autem & per uerticem coni comprædentis conoidale, non erit prædictæ ſimilis: diameter uero ſectionis erit communis ſectio planorũ, diuident * figuram, & eius quod per axem ducatur erectum ſuper planum diuidens. 12

Si conoidale ſecetur plano ſuper axem erecto, ſectio erit circulus, cuius centrũ eſt in axe ſitum.

Si quæcunq; ſphæroidum figurarum ſcindatur plano per axem, aut æquediſtanter axi ducto, ſectio erit coni acutianguli ſectio: quod ſi per axem, eadem erit quæ figuram ipſam circũuoluta deſcribit: ſi autem æquediſtanter axi, erit illi ſimilis. eius uero diametros erit ſectio cõmunis duûm planorũ: eius quod ſecat, et eius quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans. Si autem ſecetur plano ſuper axem erecto, ſectio erit circulus, cuius centrum in axe ſitum habetur. Si autem quæcunq; dictarum figurarum plano per axem ducto ſecetur, lineæ à punctis quæ in figuræ ſuperficie ſunt, non in ſectione ſita ductę perpendiculariter, ad planum ſecans intra ſectionem figuræ cadent. Horum autem omnium demonſtrationes ſunt manifeſtæ.

SI conoidale rectangulum plano ſecetur, neq; per axem, neq; æquediſtanter axi ducto, neq; ſuper axem erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio. eius maior diametros erit pars in conoidali deprehenſa: pars dico ſectionis communis duûm planorum, eius quod figuram ſecuerit, & eius quod per axem ductum, erectum ſuper ſecans planum: minor uero eius diameter erit æqualis interuallo inter illas duas comprænſo, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ ſint axi æquediſtantes. Secetur itaq; conoidale rectangulum plano, uti dictum eſt, ipſo eodem prius ſciſſo à plano per axem ducto, & erecto ſuper planum ſecans. Eſto conoidalis ſectio a b c, plani autem figuram ſecantis ſit c a linea recta: axis autem conoidalis ſit, & diametros ſectionis b d. Oſtendendum eſt, ſectionem conoidalis quæ à plano circa a c fit, eſſe coni acutianguli ſectionem: & maior eius diametros eſt a c, minor autem diametros æqualis eſt ipſi a l, cum c l fuerit ipſi b d ęquediſtans. 13

ſtans, & a l fuerit ſuper c l ducta perpendicularis: intelligatur aliquod punctum k in ipſa ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper c a: erit igitur k h erecta ſuper plano perpendicularis, in quo eſt a c b coni rectanguli ſectio, quia & planum ſecans ſtat erectũ ſuper eodem plano. per h autem ducatur e f, quæ faciat angulos rectos ſuper b d, & per e f & k h rectas lineas extra ducatur planum: erit autem hoc erectum ſuper lineam b d. diuiditur itaq; figura conoidalis plano ſuper axem erecto, quare ea ſectio circulus erit cuius centrũ eſt d. igitur k h, æquum poterit ei quod fit ex f k in k e. nã quod eſt ſuper e f, ſemicirculus eſt: & k h, in eo eſt perpendicularis. nã eius quod fit ex e h in h f, eſt media proportionalis. ducatur aũt contingens coni ſectionem lineam m n, æquediſtans ipſi a c. cõtingat uero in puncto n: ducatur item b t, æquediſtans ipſi e f. id itaq; quod fit ex a h in c h, ad id quod fit ex e h in h f, eandem habet proportionem, quam quadratum n t ad quadratum b t:

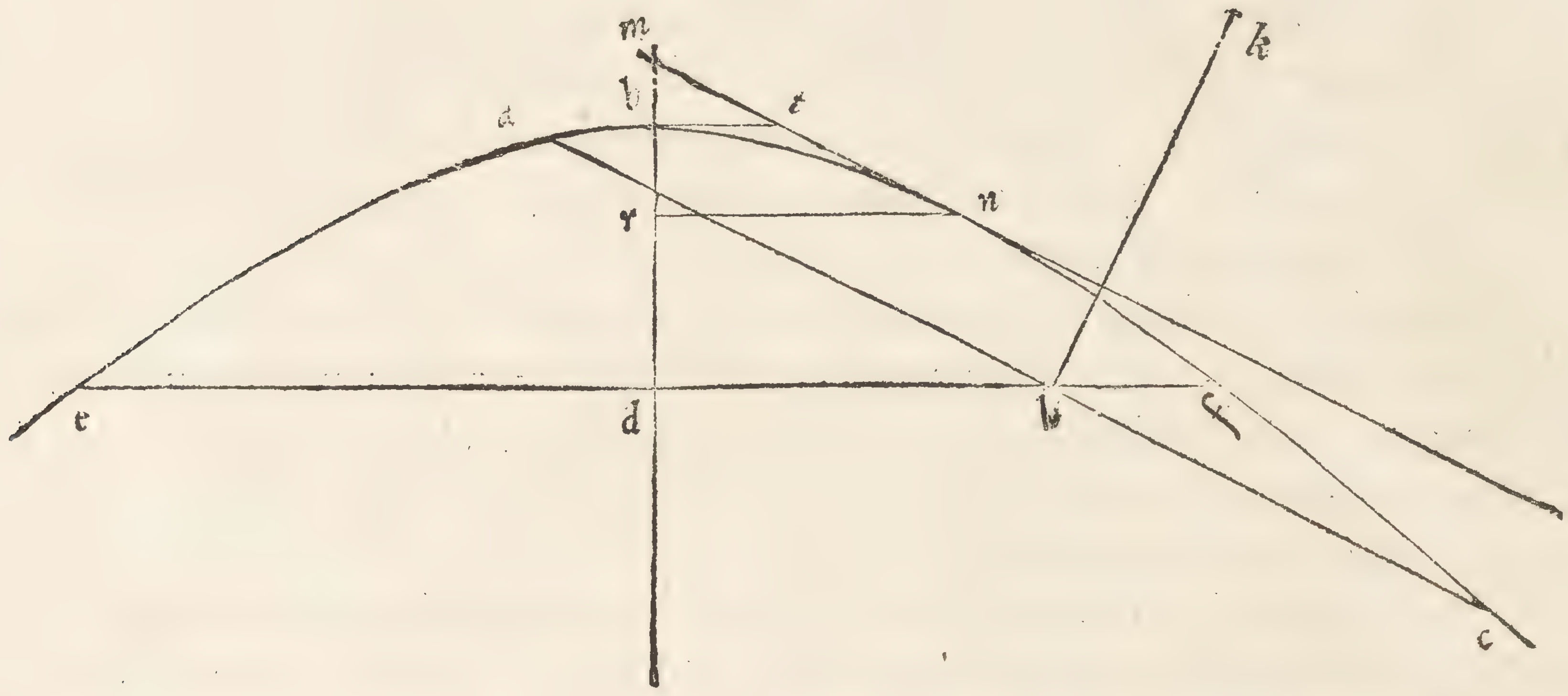


hoc enim oſtenſum eſt. linea uero n t æqualis eſt lineæ t m: quoniã & b r, ipſi b m eſt æqualis. habet igitur id quod fit ex a h in h c, ad quadratum k h, eandem proportionem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & quadratum perpẽdicularis h k, ad id quod fit ex a h in h c, habet eandem proportionem, quam quadratum b t ad quadratũ t m. Quoniã igitur trianguli c a l, t m b ſunt ſimiles, ſimiliter oſtendentur quadrata, quæ fiũt ab alijs perpendicularib. ductis à ſectione ad a c, ad ea quæ fiũt ex partibus a c, altera in alterã ductis, eandẽ habebũt proportionẽ, quã quadratũ a l ad quadratum a c. unde manifeſtũ eſt, quod ſecto eſt coni acutianguli ſectio: eius uero maior diametros eſt a c, minor uero æqualis ipſi a l.

14 Si conoidale obtuſiangulum plano ſecetur, coincidenti omnibus lateribus figuræ compræhendentis conoidale, ſitq; ipſum planum non ſuper axem erectum, huiuſmodi ſectio erit coni acutianguli ſectio, eiuſq; maior diametros erit linea intra conoidale deprehenſa, quæ pars eſt ſectionis duûm planorum: eius uidelicet quod eſt ſecans, & eius quod per axem conoidalis ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans. Secetur itaq; conoidale obtuſiangulum, ut dictum eſt, & alio item plano ducto per axem, & erecto ſuper planum ſecans, ſectio uero conoidalis eſto a b c, coni obtuſianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit linea recta a c, axis autem conoidalis & diametros ſectionis b d. intelligatur iam punctũ aliquod k in ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper a c: ipſa iam erit erecta ſuper plano in quo eſt a b c ſectio coni: per punctum uero h ducatur perpendiculariter e f ad b d, & per e f & k h lineas rectas planũ ducatur ſecans conoidale, ſecabitur iam planum recto ſuper axem. quare huiuſmodi ſectio erit circulus, cuius centrum eſt d: igitur k h perpendicularis, æquum poterit ei quod fit ex h e in h f. Ducatur item m n æquediſtans ipſi a c, & contingens

ſe-

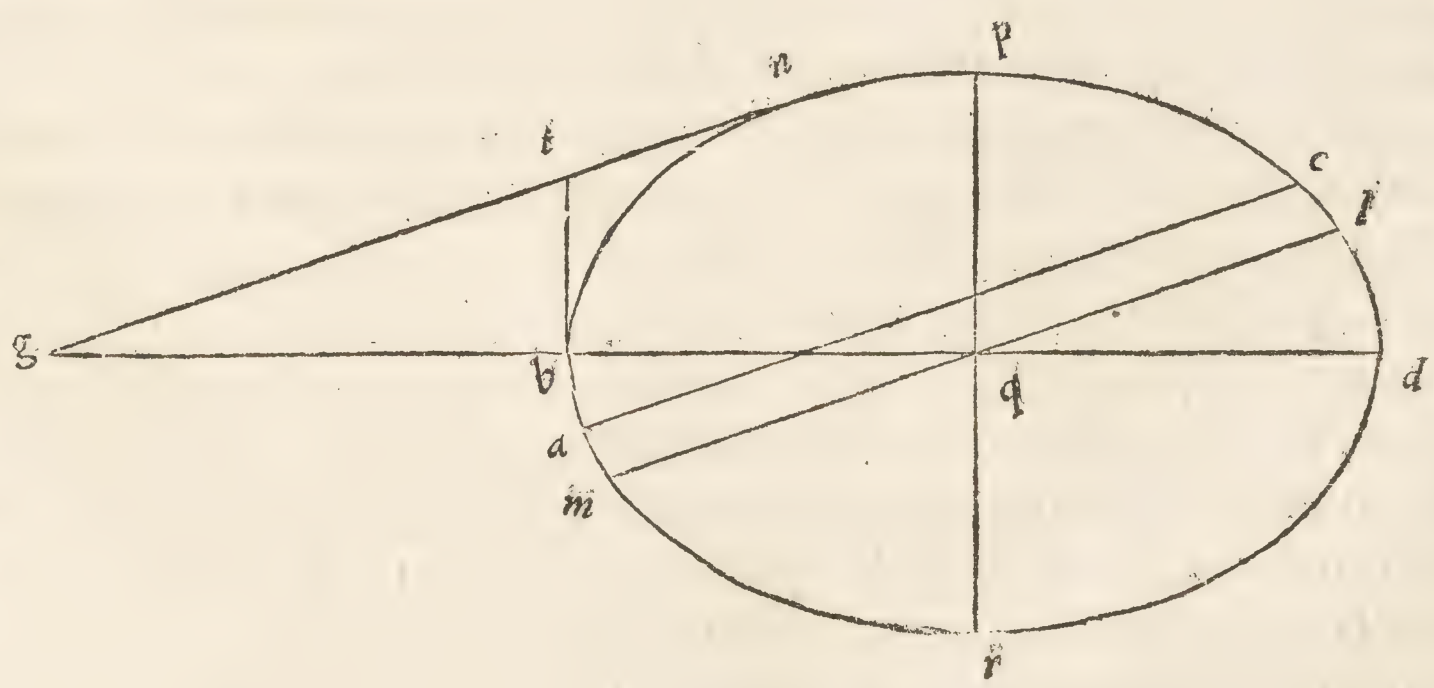
ſectionem coni in puncto n, ducatur b t æquediſtans ipſi e f. Id iam quod fit ex e h in h f, ad id quod fit ex a h in h c, eãdem habet proportionem, quam quadratũ b t, ad quadratum t n. quare quadratũ k h perpendicularis ad id quod fit ex a h in h c,



eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Similiter igitur oſtenditur, quod & quadrata aliarũ perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, ad ea quæ fiunt ex partib. a c, altera in alteram ductis, quæ partes ab ipſis fiunt perpendicularibus, eam habent proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. & b t, minor eſt ipſa t n, quoniam & m t minor eſt ipſa t n: etenim m b minor eſt b r. Hoc enim eſt in ſectionib. coni obtuſianguli accidens. Conſtat igitur, ſectionem eſſe coni acutianguli ſectionem, & maior eius diametros a c. Similiter exeunte n r perpendiculari in ſectione coni obtuſianguli, diametros eius maior erit c l.

SI ſphæroides oblongum plano ſecetur ſuper axem non erecto, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio, eius maior diametros erit linea quæ pars cõmunis ſectionis duûm planorum exiſtit, eius quod ſecat, & eius quod per axem ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans, quæ linea intra ſphæroides in ſecando intercipitur. Si enim ſecetur per axem, aut axi æquediſtãter, manifeſtum eſt. 15

Secetur autem alio plano per axem ducto, erecto ſuper alterum ſecans, & eſto ſphæroidis ſectio a b c d, ſectio coni acutiãguli: plani autem ſecantis eſto c a linea recta. axis autẽ ſphæroidis, & diametros ſe



ctionis coni acutianguli eſto b d, centrum autem q, & minor diametros eſto p r. Ducatur autẽ b t perpẽdicularis ad b d, & g n æquediſtans ipſi a c, cõtingens coni acutianguli ſectionem in puncto n. ducatur & m l per punctum q, æquediſtãs ipſi a c. Similiter iam his quæ prius dicta ſunt oſtendetur, quadrata perpendicularium earum quæ à ſectione ad a c ducuntur, ad ea quæ fiunt ex partibus a c altera in alteram ductis, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad qua-

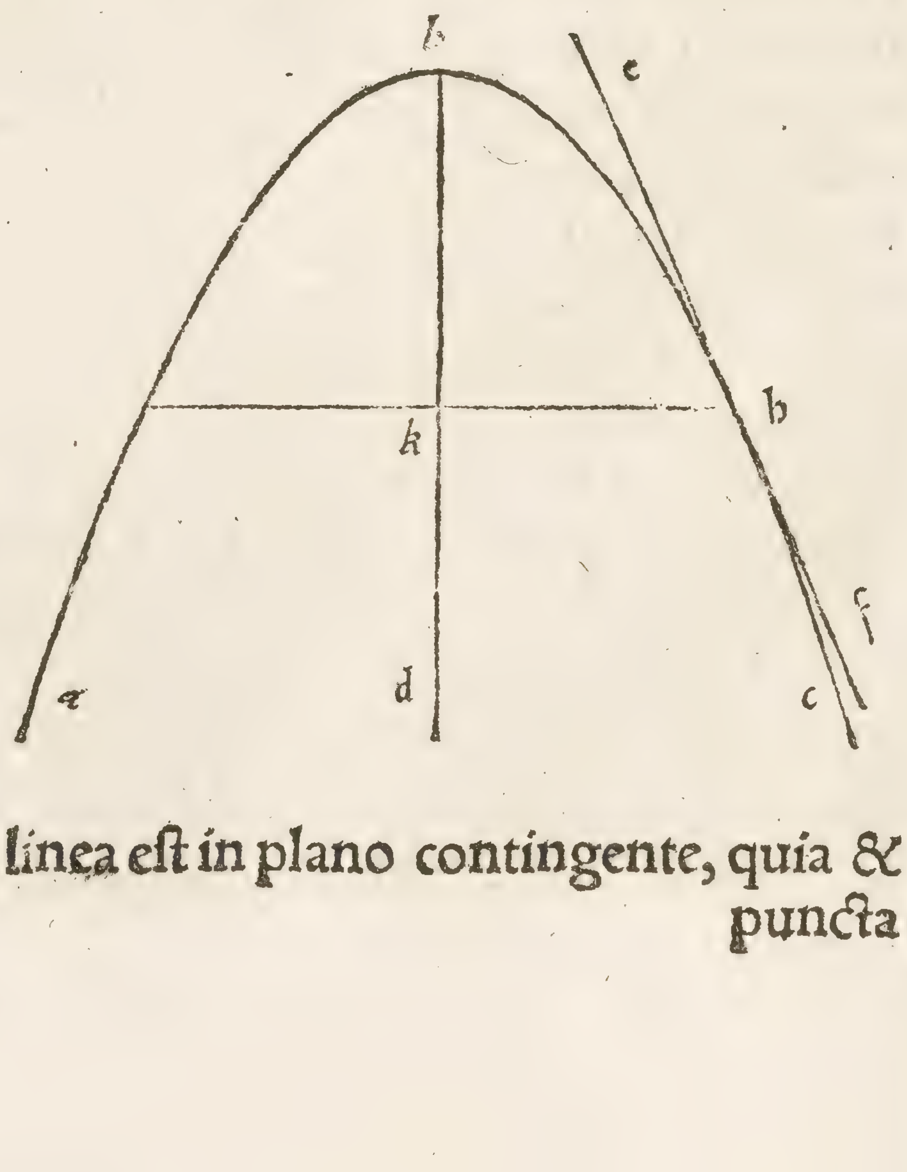
dratum t n. quod itaque huiuſmodi ſectio ſit coni acutianguli ſectio, patet: & quod diametros eius ſit a c, item patet. Quod autem ſit maior, oſtendendum eſt. quod enim fit ex p q in q r, ad id quod fit ex m q in q l, eandem habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: quia æquediſtantes contingentibus ſunt m l, & r p. minus autem eſt quod fit ex p q in q r, eo quod fit ex m q in q l, cum r q minor ſit q l. Minus igitur eſt quadratum b t, quadrato m t: quare & quadrata perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, uel ductæ ſunt, minora erunt his quæ fiunt ex partibus a c, altera in alteram ductis. Manifeſtum igitur, quod a c eſt maior diametros.

Si ſphæroides prolatum plano ſecetur, cætera erunt eadem ſupradictis: diametros uero minor erit, ea quæ intra ſphæroides comprehendetur. Ex iſtis autē manifeſtum eſt, quod ſi planis æquediſtantibus ſecentur, eorum ſectiones erunt ſimiles. Nam quadrata perpēdicularium ad ea quæ fiunt ex partibus, eandem inter ſe proportionem retinebunt.

16 SI in cuiuſcunque conoidis rectanguli ſuperficie puncta quæcunq; notentur, lineæ quæ ab eis ducentur, æquediſtantes axi in eam partem in qua conoidis conuexa ſunt, extra ipſum conoides cadunt: quæ autem in alteram partem trahuntur, eas intra ipſum cadere neceſſe eſt. Ducto enim plano per axem et per pūctum, à quo æquediſtās axi ducta eſt, huiuſmodi ſectio eſt coni rectanguli ſectio, diametrus uero eius axis conoidis. Verum in ſectione coni rectanguli à quocunque ſigno in ſectione ſito, lineæ ducantur axi æquediſtātes, quæ uerſus eam partem in qua ſunt eius conuexa trahuntur, extra ſectionem cadere neceſſe eſt: quæ uero in alteram, intra cadunt. patet igitur propoſitum.

In conoidali obtuſiangulo à quocunq; puncto in ſuperficie eius ſito lineæ ducantur, æquediſtātes lineæ cuipiam quæ in conoidali exiſtit, ducta à uertice coni eius qui conoidale complectitur, quæ in eam partem ducentur in qua eius conuexa exiſtunt, extra conoidale cadunt: quæ uero in alteram partem, intra cadere neceſſe eſt. Ducto enim plano per lineam quæ à uertice coni complectentis conoidale intra conoidale ducta ſit, & per punctum à quo ducitur æquediſtans illi, huiuſmodi ſectio erit ſectio coni obtuſianguli, diametros eius linea quæ à uertice coni intra conoidale ducta eſt. In ſectione autem coni obtuſianguli, à quocunq; puncto in ſectione ſito ducantur lineæ æquediſtantes, lineæ ſic ductæ à uertice quæ in eam partem ducentur, ubi ſunt eius conuexa, extra: quę uero in alterā partem trahentur, intra ſectionem cadere neceſſe eſt.

Si quaſcunq; conoidales figuras planum quodcunq; contingat, non ſcindēs conoidale, in uno ſolo puncto cōtinget, & planū per axem, & per contactum ductū erectū erit ſuper plano cōtingente. Cōtingat itaq; ſi fieri poteſt, in pluribus punctis: ſumptis igitur duob. punctis, in quibus planum cōtingat conoidale, ab utroq; ducemus æquediſtantes axi lineas, & ab his ductis educetur planum æquediſtans axi. aut enim per axem, aut ęquediſtanter axi ductum erit. quare ſectionem faciet coni ſectionem, & pūcta erunt in coni ſectione ſita. quoniam igitur ſunt in una ſuperficie, & in plano linea recta, quæ inter illa cadit, erit intra coni ſectionem: quare & intra conoidalis

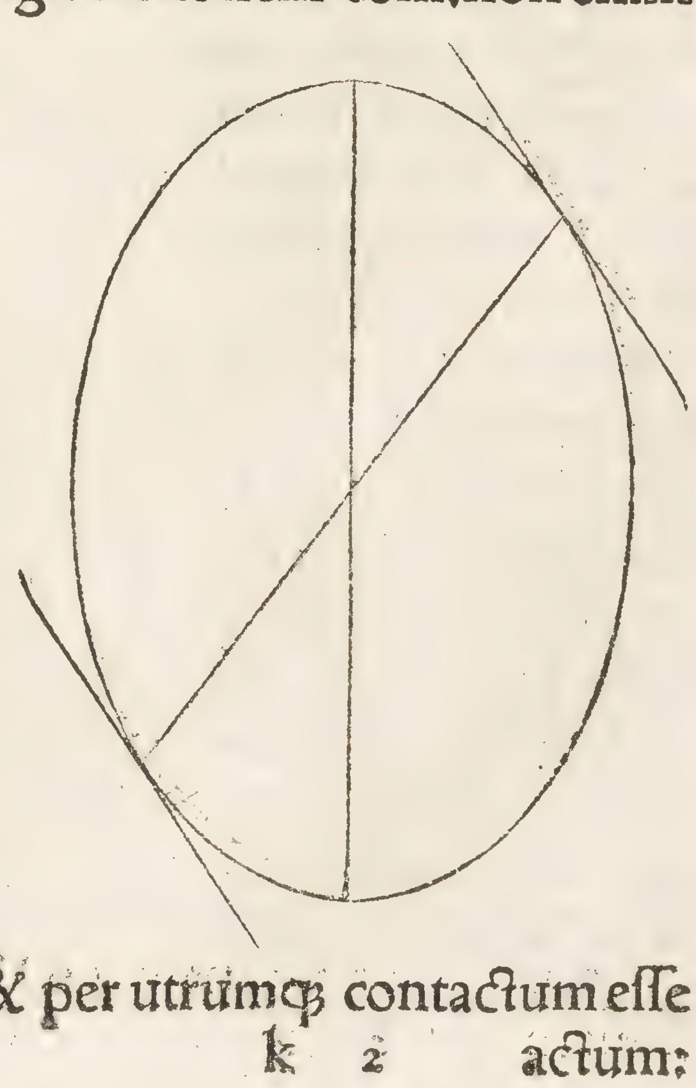


ſuperficiem exiſtat, ipſa uero eadem recta linea eſt in plano contingente, quia & puncta

pũcta in ea ſunt. erit igitur ut aliquid plani contingentis ſit intra conoidale, quod eſſe non poteſt. nam ſupponebatur, non ſecare: in uno igitur ſolo puncto continget. Quod autem planũ per contactum & per axem ductũ, erectum ſit ſuper contingens planum. Si enim in puncto uerticis conoidale cõtingat, patet. nam duobus planis per axem ductis conoidalis ſectionis, erunt coni ſectiones, quæ diametrum habent ipſum axem: lineæ uero plani contingentis ſunt, quæ ſectiones conorum contingunt in extremitate diametri, quæ angulos rectos faciũt diametro ſectionum. erunt igitur in plano contingenti duæ lineæ rectæ, angulis rectis ad axem directæ: erit igitur planum ipſum ſuper axem erectũ. quare & planum per axem ductum, erit ſuper illud erectum. Sed eſto non contingat in uertice conoidalis planum. ducatur iam planum per contactum & axem, & ſectio conoidalis ſit b c coni ſectio, axis autem ſit & diametros ſectionis b d: contingentis autem plani ſectio ſit e h f, linea recta contingens coni ſectionem in puncto h: & perpẽdicularis ab ipſo h ducatur h k ad b d, & planum ſtatuatur erectum ſuper axem. efficiat autem hoc planum ſectionem, circulum cuius centrum ſit k, ſectio autem communis huius & contingentis plani erit contingens circulum: ergo faciet angulos rectos ad h k. quare erecta erit ſuper plano, in quo ſunt k h, b d. Cõſtat igitur, planum contingens eſſe erectum ſuper plano, cũ & lineæ rectæ ſint in eodẽ.

17 SI utramuis figurarũ ſphæroidum planum contingat, nõ ſcindendo figuram, in uno ſolo puncto eam cõtinget: & id planum quod per axem & cõtactum fuerit ductum, erit ſuper plano contingenti erectum. Eſto, ſi fieri poteſt, contingat in pluribus punctis. notentur itaq; hæc puncta, in quibus planum contingit ſphæroidem, & ab utroq; horum ducantur lineæ rectæ æquediſtantes axi: & ducto per illas plano, ſectio fiet coni acutianguli ſectio, & pũcta erũt in ſectione coni: linea igĩt recta media inter pũcta, erit intra coni ſectionem: quare & intra ſphęroidis ſuperficiem exiſtet. ipſa autem recta linea in plano cõtingente ſituatur, quoniam & puncta ſita ſunt in eodẽ: plani igitur contingentis aliquid erit intra ſphæroidem. non eſt aũt hoc uerum. nam ſuppoſitum fuit, planum nõ ſecare ſphæroidem. Igitur manifeſtum eſt, quod in uno ſolo puncto contingit. Quod autem planum per axem & contactum actum, ſit erectum ſuper plano contingente, ſimiliter ſicut in conoidali figura oſtenſum fuit, & in hoc demonſtrabimus.

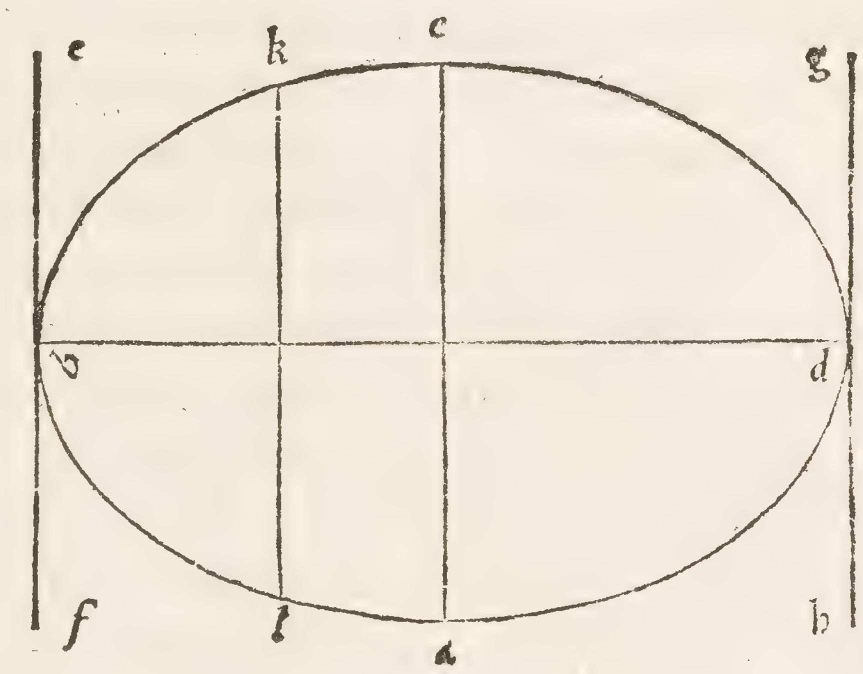
Si & ſphæroidum figurarum utrauis plano ſcindatur, per axem ducto, & ſectionem inde factam aliqua contingens linea recta ducatur, & per contingentem planum ſtatuatur erectum ſuper plano quod ſecet figuram, continget figuram ſecundum idem punctum, in quo linea eam contingit ſectionem coni. non enim in alio puncto ſuperficiei ſuæ eam cõtinget. Sin autem ducta perpendicularis à pũcto ſuper planum ſcindens, incidet intra coni ſectionem: nã ſuper cõtingentem cadet, quoniam plana alternatim alterum ſuper altero ſunt erecta: quod eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt quod intra cadet.



18 SI aliquam ſphæroidem figuram duo plana inter ſe æquediſtantia contingant, linea recta quæ contactuum puncta coniunget, per centrum ſphæroidis permeabit. Si plana fuerint ſuper axem erecta, manifeſtum eſt quod dicitur. Cæterum eſto non ſint plana cõtingentia ſuper axem erecta, planum ductum per axem, & alterum contactuum erectum erit ſuper planum contingentis: quare & ſuper æquediſtans illi. neceſſe eſt igitur, planum per axem ductum, & per utrumq; contactum eſſe

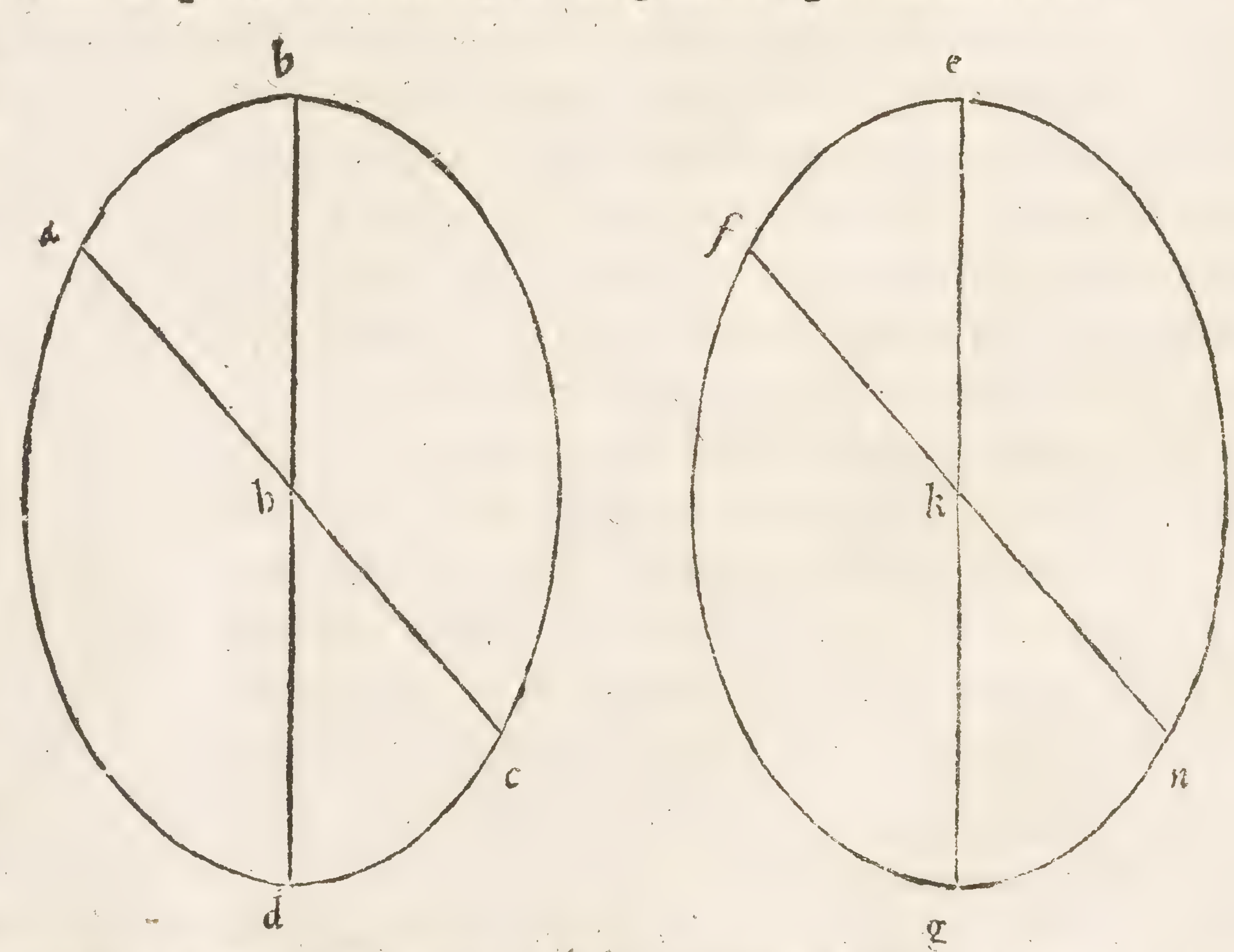
actum: ſi autem non, erunt duo plana ſuper idem planum erecta, per eandem lineam ducta, quæ non ſit ſuper planum erecta. nam ſuppoſitum eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquediſtantia. in eodem igitur erunt plano, axiſq; & cō tactus ipſi, & ſecta erit ſphæroides ſuper axem: ſectio igitur huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum contingentium æquediſtantes erunt, quæ contingent coni acutianguli ſectiones in contactibus planorum. & ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquediſtantes contingant coni acutianguli ſectionem, centrum ſectionis coni acutianguli, & puncta contactuum in eadem recta linea erunt ſita.

19 SI quamcunq; figuram ſphæroidem duo plana æquediſtantia contingant, ducatur autem planum quoddam per centrum ſphæroidis, æquediſtans planis contingentibus lineæ rectæ, quæ ex facta ſectione ducentur æquediſtantes ei lineæ quæ ipſos contactus coniungat, extra ſphæroidē cadēt. Supponanť quæ dicta ſunt, & notetur pūctum aliquod in ſectione facta. Ex puncto igitur notato, & ex linea recta quę iungit cō tactus, ducatur planum. ſcindet autē hoc & ſphæroidem, & plana æquediſtantia. Eſto igitur ſphæroidis ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum cōtingentium, ſint e f, g h lineę rectæ. ſignum autem notatum a. ea uero quæ contactus cō iungit, ſit b d. Ipſa igitur per centrū tranſibit. ſectio uero plani æquediſtā tis contingentibus eſto a c. ipſa quoq;



in centrum cadet. nam et planum ipſum in quo ipſa eſt, per centrū trāſit. Quoniā igitur a b c d, uel circulus eſt, uel coni acutianguli ſectio, & ipſam contingunt duę rectæ e f g h, per centrum autem ducta eſt eis æquediſtans a c: manifeſtū eſt quod ductæ à punctis a c, æquediſtantes ipſi b d, contingent ſectionem, & extra ſphæroidē cadent. Si aūt planum æquediſtans punctis contingentib. non ſit per centrum actū, eſto k l. manifeſtū eſt, illæ quæ à recta ex ſectione facta in eam partem efficientur, in qua portio minor exiſtat, extra ſpheroidem cadent: quę autem in alteram partem ducentur, intra ſphæroidem cadere oportere probatum eſt.

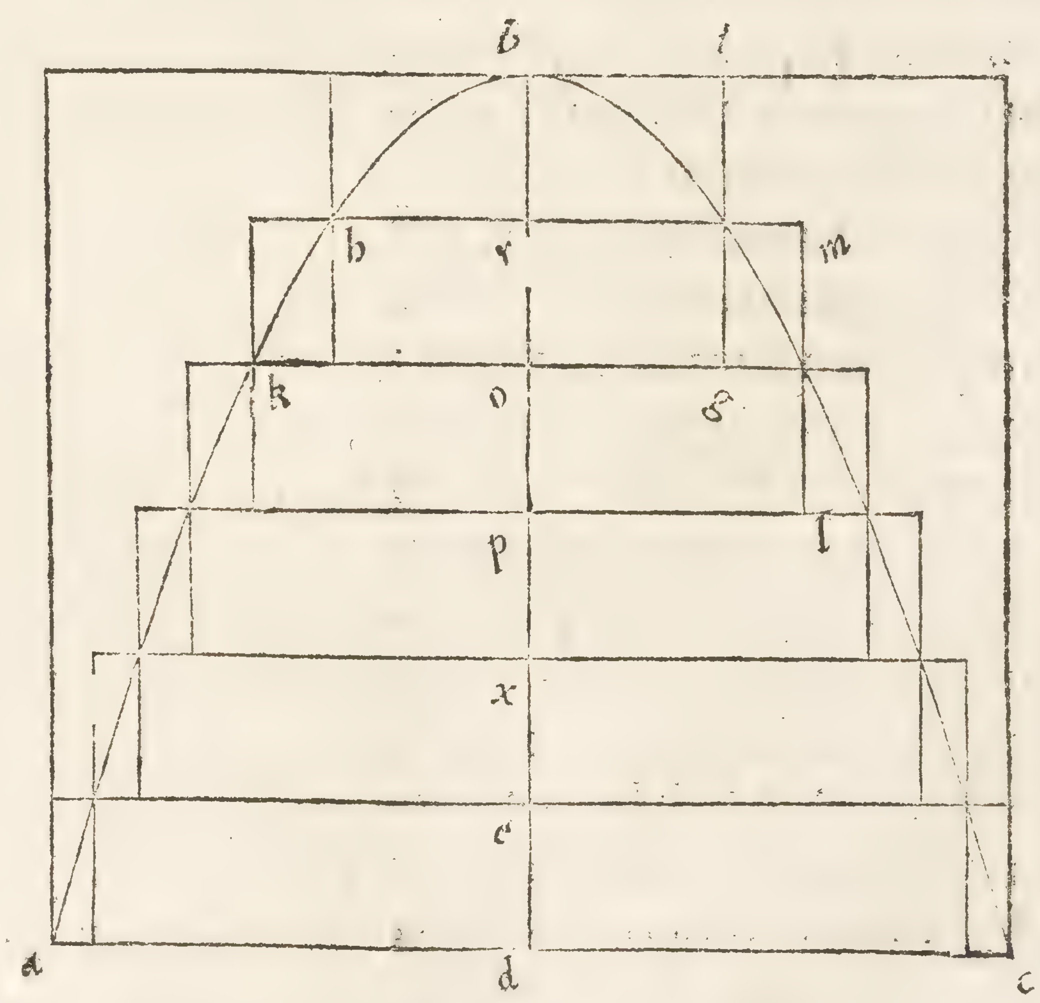
20 QValibet figura ſphæroides plano per centrū ducto ſecta in duo æqua, ipſa & eius ſuperficies ſecatur à plano.



Secetur itaq; figura ſphæroides à plano per centrum ducto, aut ſecundum axem, aut erecto, aut non erecto ſuper axem plano ſecabitur. ſi ſecundum axem, uel plano ſuper axē erecto fuerit ſecta, patet quod ipſa & eius ſuperficies in duo æqua diuiditur. nam manifeſtum eſt, quod altera

eius pars alteri coaptat̃, & alterius partis ſuperficies ſuperficiei alterius. Sed eſto non ſecundum axem, neq; plano ſuper axem erecto ſecetur: ſecta ipſa ſphæroide à plano ſuper primum planum ſecans erecto, ſit ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: eius diametros & axis ſphręoidis eſto b d, & centrũ h: plani aũt quod per centrũ ſphæroidẽ diuiſerit, eſto ſectio a c linea recta. Sumatur item altera ſphæroides huic ſimilis & ęqualis, & ſecta ipſa ſecundũ axem à plano, eſto eius ſectio e f g n, coni acutianguli ſectio: diametros uero eius & axis ſphæroidis eſto e g, centrum k. & per k ducatur f n, faciens angulum k æqualem angulo h: à linea uero f n, educatur planum erectum ſuper planum in quo eſt e f g n ſectio: erunt iam conorum acutianguli ſectiones a b c d, f g n, æquales & ſimiles. aptatur itaq; altera alteri, poſita e g ſuper b d, & f n ſuper a c. aptatur etiam planum quod eſt ſecundum n f, plano quod eſt ſecundum a c: quoniam ab eadem linea ſuper idem planũ conſiſtit utrumq;. aptabitur ergo & portio ſecta ex ſphæroide à plano ſecundum n f conſtituto, quæ eſt in parte ubi eſt e, alteri portioni ſectę ex altera ſphæroide à plano ſecundum a c ducto, quæ eſt in parte in qua eſt b: & reliqua ſectio reliquæ ſectioni, & ſuperficies portionum ſuperficiebus ſimiliter. Rurſus e g poſita ſuper b d, ſic ut e ſuper d ſitum ſit, & g ſuper b, linea media inter punctum f n, ſuper lineam inter puncta a c conſtituta: manifeſtum eſt, quod & conorum acutianguli ſectiones inuicẽ aptabunt̃ altera ſuper alterã, & f cadet ſuper c, & n ſuper a. ſimiliter autem & planum quod eſt ſecundum n f, aptabitur plano ſecundum a c ducto: & portionum quæ à plano ſecundum n f ducto ſectæ ſunt, illa quidem quæ ad partem g, aptabitur portioni à plano ſecundũ a c acto ſectæ, quæ eſt in parte b. illa uero quæ eſt in parte e, aptabitur illi quæ eſt in parte d. quoniam igitur eadem portio utriq; portionum adæquabitur, manifeſtum eſt quod portiones erunt æquales, & eadem ratione earum erunt ſuperficies æquales.

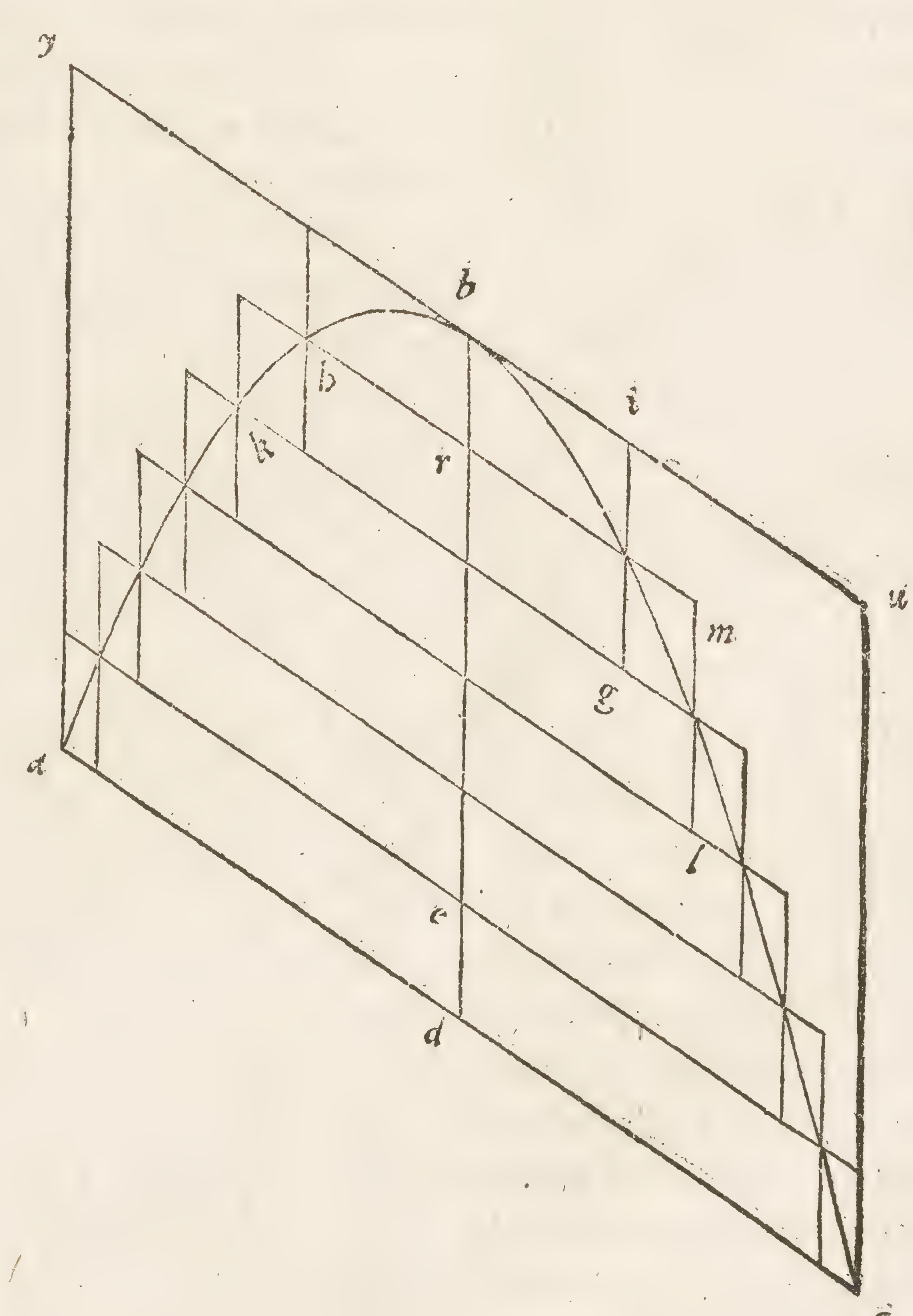
DAta quacunq; conoidalis portione, quæ ſit abſciſa à plano ſuper axem ere- 21
cto, data etiam quacunq; ſphæroidis portione ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut portio ſolida una ei inſcribat̃, altera circumſcribatur ex cylindris habentibus altitudinem æqualem confecta, ita ut figura circumſcripta addat ſuper figuram inſcriptam, quacunq; ſolida quantitate minus. Detur portio qualis eſt a b c: ſecta aũt ipſa plano ſecundum axẽ ducto, eſto portiõis ſectio a b c, coni ſectio: plani autẽ quod portionẽ ſecuit, ſit ſectio a c linea recta: & eſto portionis axis, & diametros ſectionis b d. quoniam igitur ſuppoſitum eſt, planum ſecãs eſſe erectum ſuper axem, ſectio circulus erit. eius diametros ſit a c: & ab hoc circulo cylindrus extruatur, qui axem habeat b d: ſuperficies autem eius cadet extra portionem. quia eſt aut conoidale, aut ſphæroides, non maius dimidio ſphæroide. hoc cylindro aſſiduè in duo æqua ſecto, à plano ſuper axem erecto, fiet



tandem ut reſiduum erit ſolida quantitate data minus. Eſto reliquum ab eo cylindrus, qui baſem habeat circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem autẽ e d:

minorq; ſit data quantitate ſolida. diuidatur itaq; b d in partes æquales e d, punctis r o p x: & à diuiſionibus ducantur lineæ rectæ æquediſtantes ipſi a c ad coni ſectionem. ab his autem ductis, educantur plana erecta ſuper b d: erunt igitur quæ inde fient ſectiones, circuli quorum centra erunt in b d linea. ab utroq; itaq; horum circulorum duo cylindri extruantur, quorũ uterq; habeat axem æqualem ipſi e d, alter quidem in parte cylindri uerſus d, alter uero in parte uerſus b, erit iã quædam in portione ſolida figura inſcripta ex cylindris cõpoſita, qui in eam partem effecti ſunt in qua eſt d: & altera item circumſcripta, compoſita ex illis cylindris, qui in partem in qua eſt b, ſunt ducti. Reliquũ eſt ut oſtendamus, quod circumſcripta addit ſuper inſcriptam, data ſolida quantitate minus. Vnuſquiſque ergo cylindrorum qui figuræ ſunt inſcripti, eſt ęqualis cylindro qui ab eodem circulo uerſus partem b exeat, ſicut h g ipſi h i, & k l ipſi k m, & reliqui tantundem, & omnes cylindri omnibus ſunt æquales. manifeſtum eſt igitur, quod figura circumſcripta inſcriptam ſuperat cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrũ a c conſtitutum, axem uero e d. hic autem minor eſt ſolida quantitate propoſita.

22 PORtione conoidalis quacunq; data, quæ à plano ſuper axem non erecto abſciſa fuerit, & data item ſphæroidis portione quacunq;, ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut altera portioni inſcribatur ſolida figura, altera uero circũſcribatur ex cylindris, ſectionibus, altitudinem altitudini ſectionis æqualem habentibus compoſitam: hoc pacto, ut figura circũſcripta addat ſuper inſcriptam minus quacunq; ſolida quantitate data. Detur portio qualis dicta eſt: ipſa uero figura ſecta alio plano ſecũdum axem ducto, & erecto ſuper plano portionem ſecante, ipſius quidẽ figuræ ſectio ſit a b c d, coni ſectio: ipſius aũt plani, quod portionẽ abſcidit, eſto ſectio c a linea recta. quia igitur poſitum eſt, planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit coni acutianguli ſectio, eius autem diametros a d: ſit u y contingens ſectionem coni in puncto b, & ſecundum ipſam u y educatur planum æquediſtãs plano ſecundum a c ducto: hoc continget figuram in puncto b: & ſiquidem fuerit portio conoidalis rectanguli, à pũcto b ducatur æquediſtãs axi b d. Si uero fuerit conoidalis obtuſianguli, à uertice coni comprę hendentis conoidale, recta linea ducta ad b, extra ducatur b d: ſi autem ſphæroidis linea recta ducta ad b, ſit intercepta

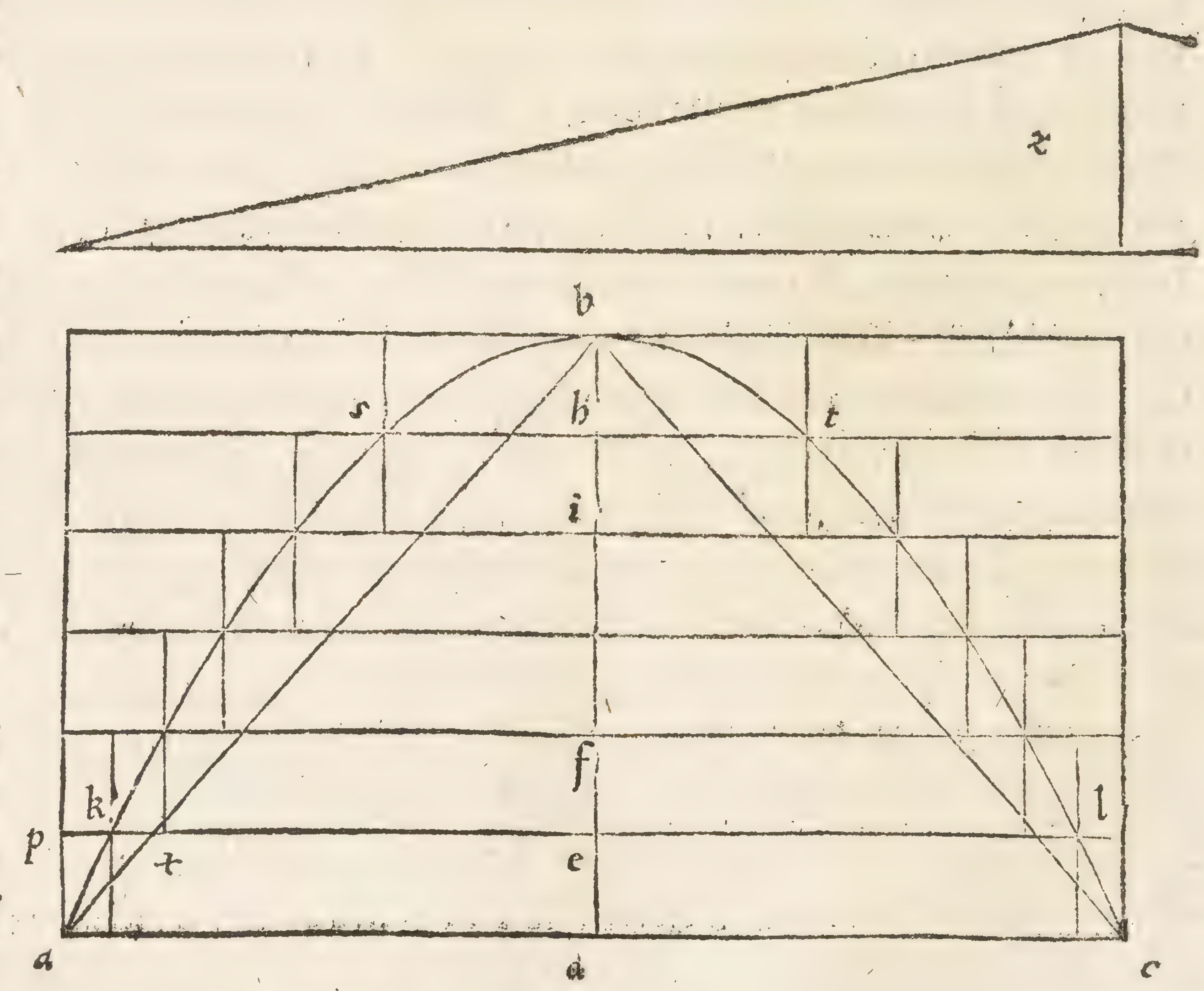


b d: manifeſtũ eſt quod b d diuidit a c in duo æqua. erit igitur b uertex portionis, & b d axis. Iam eſt coni acutianguli ſectio circa diametrum a c, & linea b d à centro erecta in plano, erecto ſuper planum in quo eſt coni acutianguli ſectio, alio

plano ſecundum alterum diametrum conſtituto: poteſt igitur cylindrus conſtrui qui axem habeat b d, in cuius ſuperficie erit data coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cōſtituta. eius autem ſuperficies cadet extra portionem, quoniam eſt aut conoidalis aut ſphæroidis portio, & non maior dimidia ſphæroide. Erit igitur quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem circa a c diametrum conſtitutam, axem uero d b. hoc autem fruſto in duo diuiſo planis æquediſtātibus, plano ſecundum a c ducto, erit reſiduum minus ſolida quantitate propoſita. Eſto fruſtum, quod habeat baſim coni acutianguli ſectionem, diametrum a c, axem uero e d, minus ſolida quantitate propoſita: diuidatur a b in partes æquales e d, & à punctis diuiſionum ducantur lineæ rectæ, quæ æquediſtent a c, erunt erectæ ſuper coni ſectionem: ab his exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. ſecant itaq; hæc ſuperficiem portionis, & erunt huiuſmodi conorum acutianguli ſectiones ſimiles illi quæ eſt circa diametrum a c: quia plana æquediſtantia ſunt. In unaquaq; igitur coni acutianguli ſectione extruantur cylindri fruſta duo, hoc quidem in parte ſectionis coni acutianguli uerſus d, illud autem uerſus b, quæ axem habeat æqualem d e: erunt itaq; quædam figuræ ſolidæ, hæc quidem inſcripta portioni, illa uero circūſcripta eidem, quæ ex cylindri fruſtis componuntur. Reliquum autem eſt, ut oſtendamus quod figura circumſcripta ſuper figuram inſcriptam, minus addat ſolida quantitate propoſita. Oſtendetur autem hoc ſimiliter priori, quod figura circumſcripta excedit inſcriptam fruſto, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem, quæ circa diametrum a c conſiſtit, axem uero e d. hoc autem minus exiſtit propoſita quantitate ſolida.

His itaq; hoc ordine præſtitutis, demonſtrabimus ea quæ de figuris propoſita fuerunt.

OMnis portio conoidalis rectanguli, quod ſectum fuerit plano ſuper axem erecto, ſeſquialtera eſſe probatur coni, qui baſim & axem eandem habeat cum portione. 23 Eſto itaq; portio conoidalis rectanguli abſciſa plano ſuper axē erecto, & ſecto ipſo conoidali ab altero plano ſecūdum axem ducto. eſto quidem ſuperficiei ſectio a b c, coni rectanguli ſectio. plani autem portionem abſcindentis ſit ſectio linea a c recta: axis uero portionis, b d. eſto item conus eandem baſim & eundem axem cum portione habēs, cuius uertex ſit b. demonſtrādū eſt, quod portio conoidalis ſeſqaltera eſt huius coni. Exponat̄ itaq; conus z, q ſeſquialter ſit huius coni, cuius baſis circulus circa a c diametrum cōſtitutus: axis uero b d. Eſto autem cylindrus, qui baſim habeat circulum circa a c diametrum cōſtitutum, axem autem b d: erit igitur conus z dimidium huius cylindri, cum conus z ſit ſeſquialter eiuſdem coni. Dico igitur, portionem conoidalis æqualem eſſe cono z. nam ſi non eſt equalis, uel maior uel minor exiſtet.

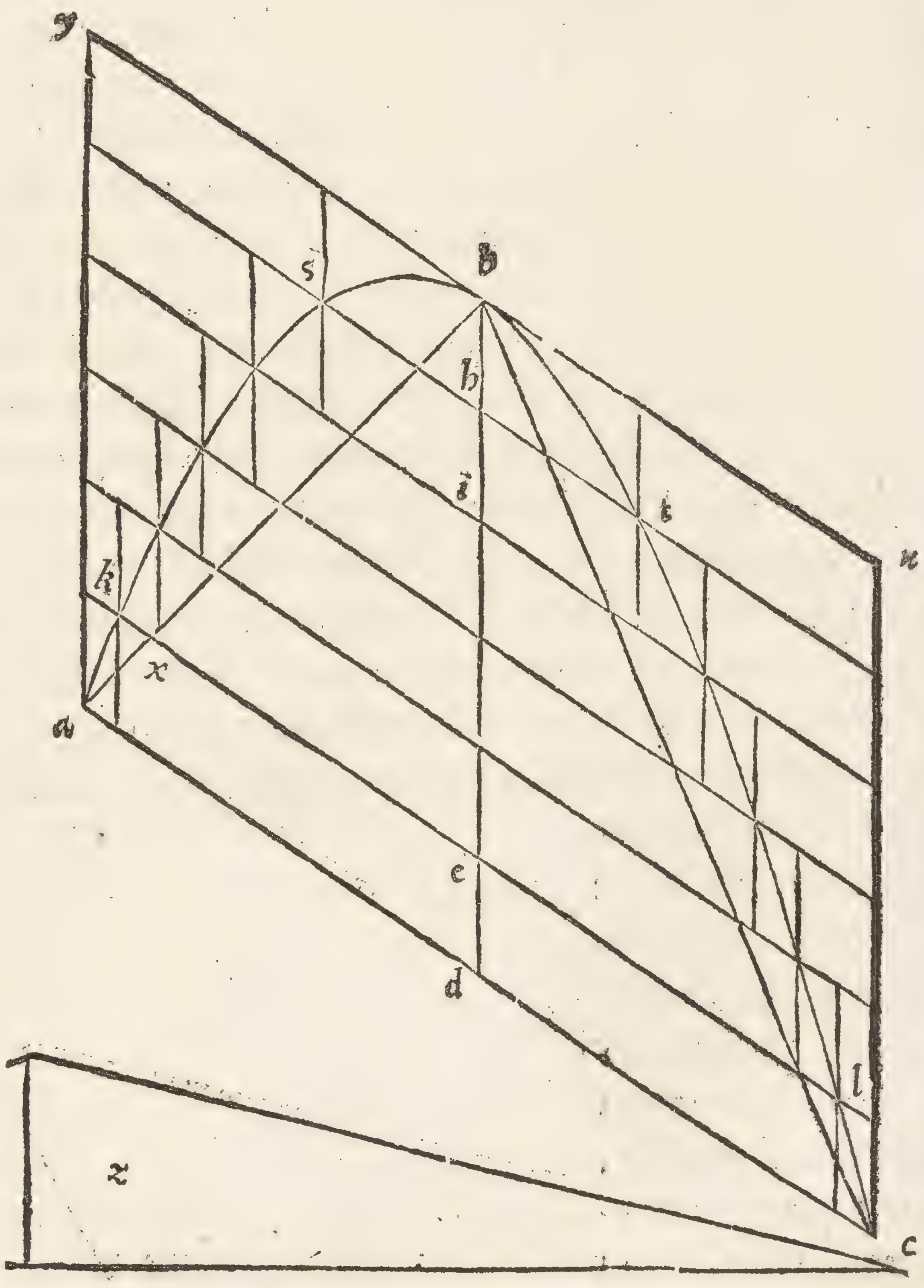


exiſtet. Eſto itaq; ſi fieri poteſt, maior: inſcribatur aũt portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus, cõpoſitam hoc pacto, ut circumſcripta ſuper inſcriptam minus addat eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & ſit maximus cylindrorum ex quibus figura circũſcripta componitur, qui baſim habeat circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem uero e d. eorum autem minimus ſit ille qui baſim habeat circulum circa s t diametrum deſcriptum, axem uero b i. Cylindrorum uero ex quibus figura inſcripta componitur, maximus ſit ille, qui baſim habeat circulum circa k l conſtitutum, axem uero d e. minimus autẽ, qui baſim habeat circulum circa s t diametrũ, axem autem h i. Educantur autem plana omnium cylindrorum ad ſuperficiem cylindri, qui baſim habeat circulum circa a c diametrum deſcriptum, axem uero b d: erit iam totus cylindrus diſſectus in cylindros, qui multitudine erunt æquales illis qui ſunt in figura inſcripta compræhenſi, magnitudine uero æquales eorum maximo. & quoniam circumſcripta figura portioni minus addit ſuper inſcriptam, quàm portio ſuper conum, conſtat figuram inſcriptam maiorem haberi cono z. Primus autem cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura portioni inſcripta habentur, habentem axem d e, eãdem habet proportionem, quam d a habet ad k e poteſtate. Hæc autem eadem eſt illi quam habet b d ad b e, & quam habet d a ad e x. ſimiliter oſtenditur, ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui axem habet e f, ad ſecundum cylindrũ eorum qui ſunt in figura inſcripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc eſt d a, ad q f. & unuſquiſq; cæterorũ qui ſunt in toto cylindro, ad cylindrum in figura inſcripta, qui baſim habeant eandem, eãdem habebit proportionem, quam dimidia diametros baſis ſuæ, habet ad eam ſui partem quæ intermedia linearum rectarum a b, b d compræhenditur. & omnis cylindri, qui in cylindro compræhenduntur, cuius baſis eſt circulus circa a c diametrum deſcriptus, axis uero d i linea recta, ad omnes cylindros in figura inſcripta compræhenſos, eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ex centris circulorum eductę, qui ſunt in baſibus dictorum cylindrorum, ad omnes lineas rectas inter medium a b & b d interceptas. Dictæ uero lineæ rectæ ſunt dictis, dempta a d, pluſquam dupla. quare & cylindri ſimul omnes qui in toto ſunt cylindro, cuius axis eſt d i, erunt plus quàm dupli figuræ inſcriptæ: multo magis autem totus cylindrus, cuius axis eſt b d, exiſtet plus quàm duplus figuræ inſcriptæ. Idem uero erat coni z duplus. figura igitur inſcripta minor erit cono z, quod eſt contra id quod poſitum fuerat. nam poſita fuerat maior: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Similiter autem neq; minor. Rurſus enim inſcribatur figura, & circumſcribatur hoc pacto ut altera alteram excedat minus eo quo conus z excedit portionem conoidalis, & cætera ut ſupra ſimiliter diſponantur. Quoniam igitur inſcripta figura portione minor exiſtit, & inſcripta minus exceditur à circumſcripta, quàm portio à cono, patet quod circumſcripta minor eſt cono. Item primus cylindrus in toto cylindro exiſtens, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumſcripta exiſtunt, eundem qui habet axem e d, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ipſum idem. Secundus autem cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui habet axem e f, ad ſecũdum cylindrum in figura circumſcripta collocatum, qui baſim habet e f, eandem habet proportionem quam d a ad k e poteſtate: hæc autem eſt eadem ei quam habet b d ad b e, & ei quam habet d a ad e x. & reliquorum cylindrorum unuſquiſque qui in toto cylindro ſunt, qui habeant axem æqualem d e, ad unumquemque cylindrorum qui ſunt in figura circumſcripta, qui habent eandem axem, habebit eam proportionem quam dimidia baſis eius ad eam ſui partem, quæ inter a b, b d interducitur media: & omnis cylindri in toto cylindro exiſtẽtes, quorũ axis eſt b d

linea

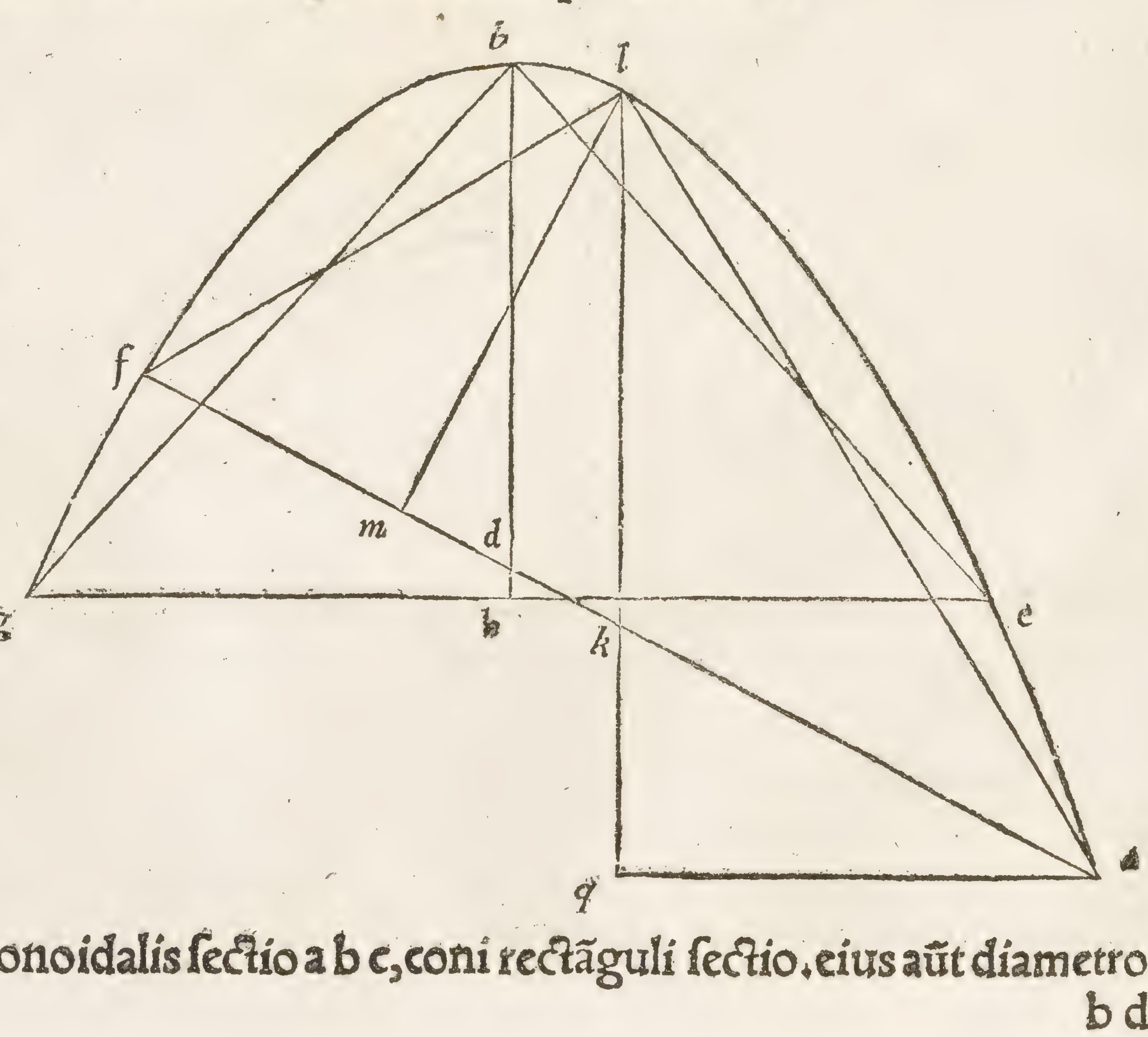
lineà recta, ad omnis cylindros in figura circumſcripta collocatos eam habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes lineas rectas: ipſæ autem omnes rectæ, quæ ex centris circulorum exeunt, qui baſes ſunt cylindrorum ad rectas lineas omnes quæ ab ipſis aſſumptę ſunt, ſimul cum a d minores ſunt, quàm duplæ. manifeſtum igitur, quod cylindri omnes qui in toto cylindro exiſtunt, minores erũt quàm dupli ad cylindros in figura circumſcripta exiſtentes. cylindrus igitur, qui baſim habet circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem autem b d, minor exiſtet quàm duplus circumſcriptæ figuræ. non eſt autem ſic, uerum maior quàm duplus eadem. nam coni z duplus exiſtit. Et oſtenſum eſt figurã circumſcriptam cono z eſſe minorem. non igitur conoidalis portio cono z minor. & oſtenſum eſt, quod neq; eo maior habetur. quare eam eſſe ſeſquialteram coni habentis baſim, & axem cum portione eundem, neceſſariò concluſum eſt.

SI à conoidali rectangulo portio abſcindatur plano ſuper axem non erecto, ſimiliter ſeſquialtera eſſe probatur portionis abſciſſæ à cono quæ baſim & axẽ eundem habet, cum ipſa portione. 24 Eſto portio conoidalis rectanguli abſciſſa uti proponitur, & ipſo secto à plano ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planam quod abſcindit portionem, figuræ quidem ſectio eſto a b c, coni rectanguli ſectio: plani uero abſcindentis portionem eſto a c linea recta. ducatur autem u y æquediſtans ipſi a c, et contingens coni rectanguli ſectionem in puncto b. & ducatur b d æquediſtans axi. Hæc autẽ iam in duo diuidit ipſam a c. planum autem ab u y educatur, æquediſtãs plano quod eſt ſecundum a d. cõtinget autem hoc conoidalem in puncto b, & erit portionis uertex punctum b, axis autem b d. Quoniam igitur planũ quod eſt ſecundum a c, nõ erectum ſuper axẽ, ſecat conoidalem, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio. eius autem maior diametros a c. Cum itaque ſit circa a c diametrum coni acutianguli ſectio, & linea b d ſit à centro ſectionis coni acutianguli erecta, in plano erecto ex diametro ſuper plano in quo ipſa eſt coni acutianguli ſectio, cylindrus poterit effingi qui axem habeat in linea recta a b d, in cuius ſuperficie exiſtet ipſa coni acutianguli ſectio: poterit etiã conus effici, qui uerticẽ habeat pũctum b, in cuius ſuperficie exiſtet ipſa coni acutianguli ſectio, & fruſtũ cylindri quoddam quod baſim habeat ipſam coni acutianguli ſectionem circa a c diametrum collocatam, axem autẽ b d: & portio coni qui baſim habeat eandem cum fruſto & portione, & axem eũdem. Eſt igitur oſtendendum, conoidalis portionem huiuſmodi abſciſoris coni eſſe ſeſquialteram. Eſto itaq; z conus ſeſquial-



ter huius abſciſoris coni prædicti. erit igitur cylindri fruſtum, quod baſim habeat eandem cum abſciſore, & axem eundem, duplus coni z. hic namq; ſeſquialter exiſtit abſciſoris coni, baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. abſciſor autem coni dictus tertia pars exiſtit fruſti cylindri, baſim & axem habentis eũdem cũ portione. Dico itaq; neceſſe eſſe portionẽ conoidalis cono z eſſe æqualẽ. nã ſi non ęqualis erit, maior aut minor eo exiſtet. Eſto primũ maior, ſi fieri poteſt: inſcribatur itaq; portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindrorũ compoſita, quæ baſim habeant & altitudinem æqualem inter ſe, hoc pacto, ut figura circũſcripta ſuper inſcriptam figuram addat minus eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & plana fruſtorum erunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. Rurſus itaq; primũ fruſtum eorum quæ in toto fruſto quod habet axem d e, ad primum fruſtum eorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habet axem d e, eam habet proportionem quam quadratum a d, ad quadratum k e. nam ſi fruſta æquam altitudinem habentia, eandem inuicem proportionem ſuis baſibus habeant, baſes autẽ eorum cum ſint ſimiles conorum acutianguli ſectiones, eandem habent inter ſe proportionem, quam diametri eius rationis ſuæ poteſtate: ſunt autem diametrorũ eiuſdem rationis dimidiæ lineæ a d, k e. quam autem habet proportionem a d ad ipſam k e poteſtate, eam habet b d ad b e lõgitudine, cum b d diametro æquediſtet. ipſæ uero a d, k e æquediſtant ei quæ ſecundum a c, puncto b contingit: quam autem proportionem habet b d ad b e, hanc habet a d ad e x. Primum igitur fruſtum eorum qui ſunt in toto fruſto, ad primũ fruſtum in figura inſcripta collocatum, eam habet proportionẽ, quam a d ad e x: & reliquorum eorum quæ ſunt in toto fruſto unumquodq;, quod habet axem æqualem ipſi d e, ad unumquodque fruſtorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habeat axem eundem, habet eãdem proportionẽ quam dimidia diametri baſium eius ad eam quæ ab ipſa eſt media, interſecta inter a b, b d. Oſtendetur autem ſimiliter ſuperioribus inſcriptam figuram maiorem eſſe cono z, & cylindri fruſtum quod baſim habeat & axem cũ portione eundem, maius eſſe quàm duplum figuræ inſcriptæ: quare etiam coni z maius eſſe quàm duplum. Hoc autem non eſt uerum, ſed duplum exiſtit: non eſt igitur maior portio conoidalis cono z. Eadem ratione oſtẽdetur, quod neq; minor. Vnde conſtat, eſſe æqualem. & ideo portio conoidalis coni baſim eandem, & axẽ cum portione eundem habentis, ſeſquialtera eſſe probata eſt.

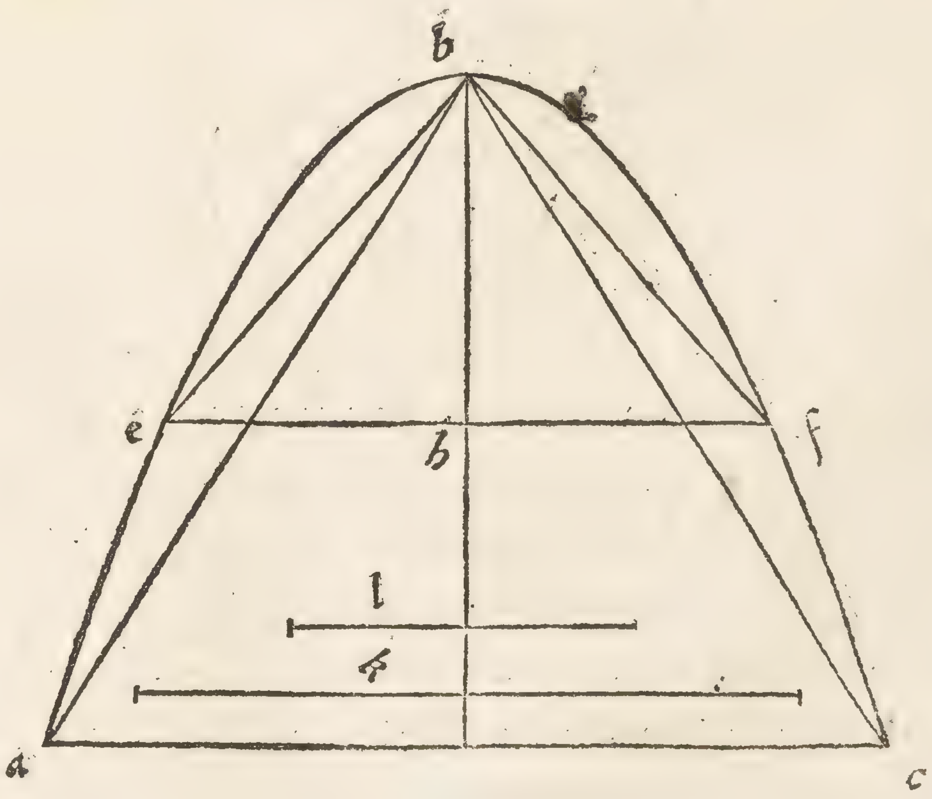
25 SI conoidalis rectanguli duæ portiones abſcindantur, duob. planis, altero ſup axẽ erecto, altero non ſuper axẽ erecto, ſintq; portionũ axes ęquales, ipſas quoq; portiones ęquales eſſe neceſſe eſt. Abſcindantũ itaque à conoidali duę portiões, ut dictũ eſt: ſecto itaq; conoidali ſecũdũ axẽ plano ducto, & altero plano ſuper axẽ erecto, eſto conoidalis ſectio a b c, coni rectãguli ſectio, eius aũt diametros



b d:

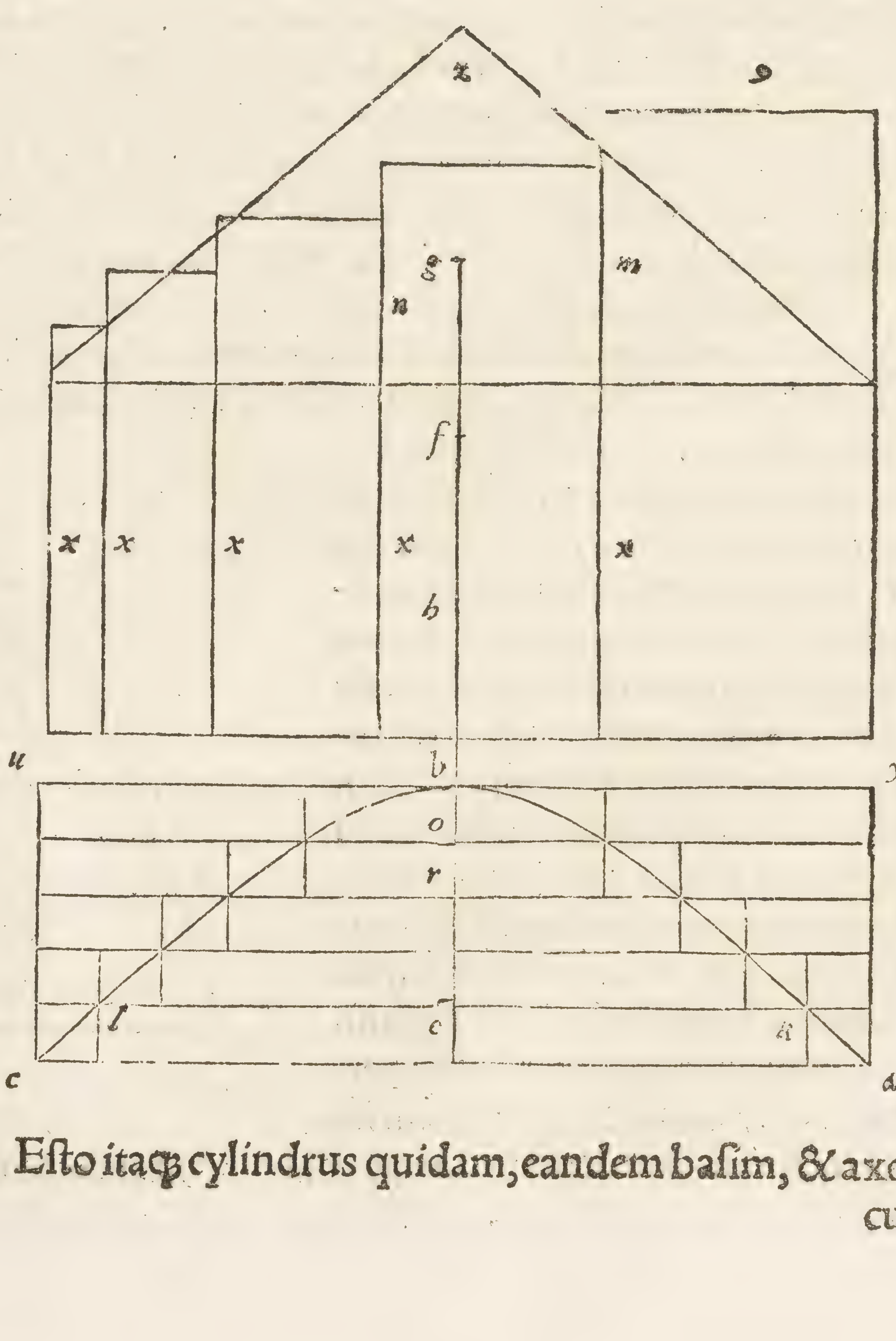
b d: planorum uero ſint ſectiones a f, e c lineæ rectæ: eius quidem quod eſt ſuper axem erectum ſit e c, nõ erecti uero ſuper axem ſit a f. axes autem portionum ſunto b h, k l inuicem æquales, uertices uero puncta b l: demonſtrandum eſt, quod portio conoidalis cuius uertex eſt b, portioni conoidalis cuius uertex eſt l, exiſtit æqualis. Quoniam igitur ab eadem coni rectanguli ſectione coni duæ portiones ſunt abſciſæ, a l f, & e b c, & earum ſunt diametri æquales k l, b h, triãgulus a l k æqualis eſt triangulo e h b. oſtenſum eſt enim, triangulum a l f triangulo e b c eſſe æqualem. ducatur iam a q perpendicularis ſuper k l eductam: & quoniam b h, & k l ſunt ęquales, ſunt quoq; e h & a q æquales. Eſto itaq; in portione cuius uertex eſt b conus inſcriptus, eandem baſim & axem eundem habens cum portione: in portione uero cuius uertex l, ſit abſciſor coni eandem baſim & axem eundem cũ portione habens: ducatur autem perpendicularis ab l ſuper a f, quæ ſit l n: erit iã ipſa altitudo abſciſoris coni, cuius uertex eſt l. abſciſor autem coni cuius uertex l, & conus cuius uertex b, habent inter ſe proportionem compoſitam, ex baſiũ proportione, & ex altitudinum proportione. habent itaq; proportionem compoſitam ex proportione, quam habet ſpacium contentum à ſectione coni acutianguli circa diametrum a f conſtituta, ad circulum circa diametrum e c deſcriptum, & ex proportione quam habet n l ad b h. ſpacium autem ab coni acutianguli ſectione contentum ad eundem circulum eam habet proportionem, quam id quod fit ex diametris altera in alteram ductis ad quadratum e c. & abſciſor coni cuius uertex eſt l, ad conum cuius uertex eſt b, habet proportionem compoſitam ex proportione, quam habet k a ad e h, & ex proportione quam habet n l ad b h. at uero k a dimidia eſt diametri baſis abſciſoris coni, cuius uertex eſt l: ipſa uero e h, dimidia eſt diametri baſis coni: ipſe autem l n, b h ſunt eorum altitudines. habet autem l n ad b h eandem proportionem, quam habet ad k l, cum b h ſit ipſi k l æqualis: habet etiam l n ad k l eam, quam q a ad a k: habet quoq; abſciſor coni ad conũ proportionem compoſitam, ex ea quam habet a k ad a q. nam a q ęquatur ipſi e h, & ex ea quam habet l n ad h b. Compoſita autem ex dictis proportio, ſcilicet a k, ad a q, eadem eſt ei quam habet l n ad l k. abſciſor ergo habet ad conum eam proportionem, quam l n ad l k, & quam habet l n ad b h. b h autem æquatur ipſi l k. manifeſtum eſt igitur, quod abſciſor coni cuius uertex eſt l, æquatur cono cuius uertex eſt b. Ex quo conſtat portiones quoq; æquas eſſe, cum altera earum coni ſeſquialtera ſit, altera item abſciſoris coni ſeſquialtera, cũ hic & ille ſint æquales.

SI à conoidali rectangulo duæ portiones abſcindantur planis utcunq; ductis, 26
portiones habebunt eam inter ſe proportionem, quam quadrata axium inter ſe retinuerint. Abſcindantur itaque duæ à conoidali rectãgulo portiones, utcunq; contigerit. Eſto autem k æqualis axi alterius portionis: l uero axi alterius item æqualis. Demonſtrandum eſt, quod portiones eam habent proportionem inter ſe, quam habent quadrata k & l. ſectio itaq; conoidali à plano ſecundum axem ducto, portionis eſto ſectio a b c, coni rectanguli ſectio: axis autem b d. & aſſumatur b d æqualis ipſi k, & ſecundum d planũ educatur ſuper axem erectum: portio autem conoidalis, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptũ, axem uero b d, æqualis eſt portioni a-



xem habenti æqualem ipſi k. Siquidem igitur ipſa k ſit æqualis ipſi l, manifeſtũ eſt portiones quoq; inter ſe eſſe ęquales. nam utraq; ipſarum erit æqualis uni & eidẽ, & quadrata ipſarum l k æqualia. quare eandem habebunt proportionem portiones, quam habuerint quadrata axium. Si aũt l non ſit æqualis ipſi k, eſto æqualis ipſa l ipſi b h. & per punctum h ducatur planum erectum ſuper axem: portio autem, quæ baſim habuerit circulum circa diametrum e f deſcriptum, axem autem b h, æquatur portioni habenti axem æqualem ipſi l. Deſcribantur iam coni, qui baſes habeãt circulos circa diametros a c, e f conſtitutos, uerticem uero b punctũ. Conus aũt habens axem b d, ad conũ habentẽ axem b h, proportionem habet cõpoſitam ex ea quam habet a d ad h e poteſtate, & ex ea quam habet d b ad b h longitudine. quam autem proportionem habet d a ad h e poteſtate, eam habet b d ad b h longitudine. conus igitur habẽs axem b d, ad conum habentem axem b h, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet d b ad b h, & ex ea quam habet d b ad b h. hæc autem eſt eadem illi quam habet quadratum d b, ad quadratũ h b. quam proportionem autem habet conus axem habens b d, ad conum habentem axem h b, hanc habet eandem portio conoidalis habens axem b d, ad portionem habentem axem h b. utraq; enim utriq; eſt ſeſquialtera: & portioni axem habenti b d æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k. portioni autem habenti axem ipſam h b, æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi l, & ipſi b d æquatur k, ipſi uero h b æquatur ipſa l. Clarum eſt ergo, quod portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k, eandem habet proportionem ad portionem conoidalis habentem axem æqualem ipſi l, quam quadratum k ad quadratum l.

27 QVælibet portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem erecto, habet ad conum, qui eandem baſim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quã habet utraque ſimul linea quæ ſit æqualis axi portionis, et ea quæ ſit tripla lineę ad axem adiectæ, ad lineã his utriſque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam.



Eſto aliqua portio conoidalis cuiuſpiam obtuſianguli, abſciſa plano ſuper axẽ erecto, & ipſo conoidali ſecto à plano ſecundum axem ducto. eius ſectio ſit a b c coni obtuſianguli ſectio: plani autem abſcindẽtis portionem eſto a c, & axis item portionis eſto b d: linea uero axi adiecta ſit b h, & ipſi b h ſit æqualis f h & g f. Demonſtrãdum eſt itaq;, portionem ad conum eandem baſim cum portione, & axem eundem habẽtem, eam habere proportionem, quam g d ad d f. Eſto itaq; cylindrus quidam, eandem baſim, & axem cum

cum portione eundem habens: eius uero latera eſto u a, c y. Eſto item conus quis in quo z, & hic ad conum habentem eandem baſim cum portione, & axem b d, eam habeat proportionem, quam habet g d ad d f. Dico tunc portionem conoidalis æqualem eſſe cono z. Quod ſi non fuerit ei æqualis, aut maiorem eo, aut minorem eſſe neceſſe eſt. Eſto primum, ut ſit ea maior ſi fieri poteſt: inſcribatur autem in portione quædam figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus compoſita, hoc pacto, ut figura circumſcripta ſuper inſcriptam minus eo addat, quo conoidalis portio ſuperat conum z. educantur iam plana omnium cylindrorum ad ſuperficiem cylindri, qui habeat baſim circulum circa diametrum a c conſtitutum, & axem b d: erit tunc hic cylindrus totus diſtributus in cylindros numero ęquales cylindris, qui in figura inſcripta ſunt extructi: magnitudine uero æquales maximo illorum. & quoniam circumſcripta figura minus excedit inſcriptam, quàm portio conum z, & figura circumſcripta maior eſt portione, conſtat inſcriptam quoq; cono z eſſe maiorem. eſto itaq; b r pars tertia ipſius b d, erit ergo g d tripla ad h r. Et quoniam cylindrus qui baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptum, axem uero b d, ad conum eandē baſim & axem eundem habentem, habet eam proportionem quam g d ad h r: dictus autem conus habet ad z conum, eam quam f d ad g d: proportionibus non menſis ſimiliter permutatis, habebit dictus cylindrus ad z conum eādem proportionem, quam f d ad h r. Sunto autem lineæ poſitæ, in quibus x numero æquales portionibus eis quæ ſunt in b d linea recta, magnitudine uero unaquæq; æqualis f b: & ad unamquamq; ipſarum accedat ſpacium, ſuperans alterum forma quadrata, & eorum maximum eſto in quo f b d, minimum uero quod ſub f r b continetur: latera autem exceſſuum ſeſe æqualiter excedūt. nam illæ ſunt iſtis æquales, quæ in b d linea recta ſeſe pariter excedunt. Et eſto maximi exceſſus latus, in quo m æquale b d, minoris uero æquale b i. Sunto item alia ſpacia in quibus ꝯ multitudine iſtis æqualia, magnitudine uero unumquodq; æquale maximo quod cōtinetur ſub f d b. at uero cylindrus qui baſim habet circulum circa a c diametrum conſtitutum, axem autem d e, ad cylindrum qui baſim habet circulum circa k l diametrū deſcriptum, axem aūt d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e poteſtate. Hæc autem eadem eſt ei quam habet ſpaciū contentum ſub f d, b d, ad cōtentum ſub f e, b e. in omni enim coni obtuſianguli ſectione hoc contingit. nam dupla eius quæ adiecta eſt, hoc eſt eius quæ ex centro obliquū eſt formæ latus, & ſpacium x m, eſt æquale ei quod continetur ſub f d, b d. ei uero quod ſub f e, b e ęquale eſt ſpacium x n. eſt enim b d linea æqualis ipſi m. b e autem ipſi n æqualis. Cylindrus igitur qui baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptū, axem autem d e, habet ad cylindrum qui baſim habet circulum circa diametrum k l conſtitutum, axem uero d e, eam proportionē, quam ſpacium ꝯ ad x m. Similiter autem oſtendetur & unuſquiſq; aliorum cylindrorum qui in toto cylindro exiſtūt, axem æqualem habens ipſi d e, habere ad cylindrum exiſtentem in figura inſcripta, habentem eundem axem, eam proportionem, quam habet ſpacium ꝯ ad ſibi correſpondens, eorum quæ ad ipſam n x acceſſerunt, cætera excedens quadrato. Sunt autem quędam magnitudines hi cylindri, qui in toto cylindro exiſtūt, quorum unuſquiſq; axem habet æqualem ipſi d e: & aliæ item magnitudines ea ſpacia, quæ ſunt in quibus ꝯ numero, illis æquales quæ ſecundum binas & binas eandem habent proportionem, cum cylindri ſint inter ſe æquales, & ſpacia ſimiliter in quibus ꝯ inuicem æqualia. Referūtur autem cylindrorum quidam ad alios quoſdam cylindros, qui in figura inſcripta exiſtunt: extremus autem nullo pacto refertur: & ſpacia in quibus ꝯ ad alia ſpacia, ea ſcilicet quæ ad m x acceſſerūt, excedentia forma quadrata, ſimilia ſunt in proportionibus: extremū autem nullo pacto refertur. manifeſtum eſt, quod omnis cylindri qui in toto cylindro exi-

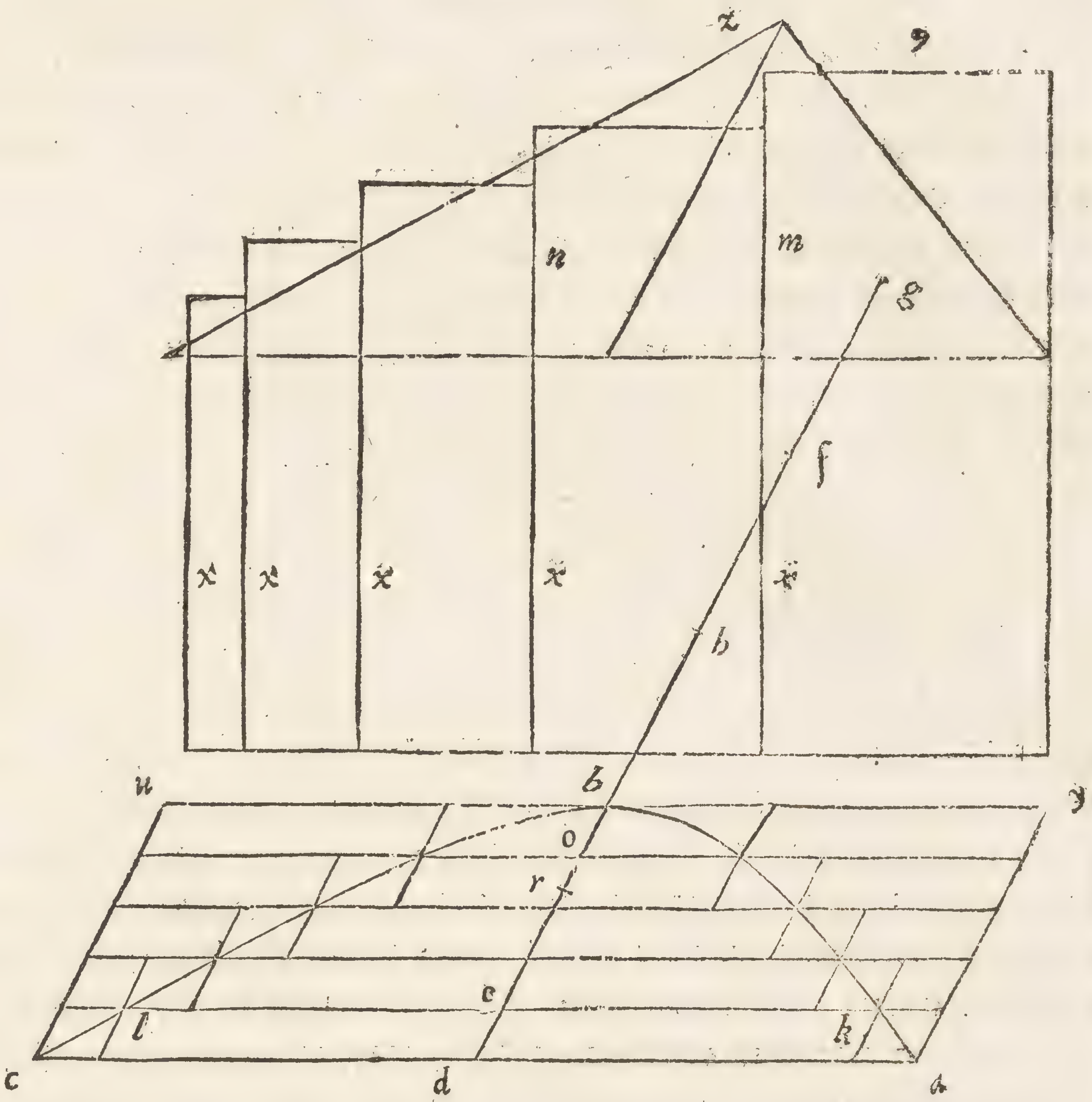
 ſtunt,

ſtunt, ad omnis cylindros in figura inſcripta conſtitutos eam habebũt proportionem, quã ſpacia in quibus 9 ad omnia exceſſa, dempto maximo. Oſtenſum eſt autem, quod omnia ſpacia in quibus 9, ad omnia acceſſa dempto maximo maiorem habent proportionem, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. quare & totus cylindrus ad figuram inſcriptam maiorem habet proportionem, quàm f d ad h r, quam totus cylindrus oſtenſus eſt habere ad conum z. totus ergo cylindrus maiorẽ habet proportionem ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, conum z maiorem eſſe figura inſcripta: quod quidẽ eſſe nõ poteſt. nam ſuprà oſtenſum fuit, figuram inſcriptã cono z eſſe maiorem: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Neq; utiq; minor. Eſto enim, ſi eſſe poteſt. rurſus inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto, ut circumſcripta figura addat ſuper inſcriptam minus eo quo conus portionem excedit, & cętera præparentur ut prius. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, & circumſcripta inſcriptam minus excedit quàm conus z portionem, manifeſtum eſt, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, habentem axem d e, eam habet proportionem quam ſpacium 9 ad m x. nam utrumq; eſt æquale: & cæterorum cylindrorum unuſquiſq;, eorum qui ſunt in toto cylindro, habens axem æqualem d e, ad cylindrum qui eſt in circumſcripta figura, in eandem partem exeũtem, & eundem axem habentem, eam habebit proportionem, quam ſpaciũ 9 ad ſpacium ſibi correſpondens, quod eſt adiectum ad m x ſimul cum exceſſu: propterea quod unumquodq; circumſcriptorum, dempto maximo, æquale eſt unicuiq; inſcriptorum ſimul cum maximo. Habebit igitur totus cylindrus ad figuram circumſcriptã eam proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, ſimul cũ exceſsibus. Oſtenſum eſt rurſus, omnia ſpacia 9 ad omnia alia minorem habere proportionẽ, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq;, ſimul dimidiæ x & tertię parti m, quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit proportionem, quàm f d ad h r. uerum ſicut f d ad h r, ſic totus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit proportionem ipſe cylindrus ad figuram circumſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, figuram circumſcriptam cono z eſſe maiorem: quod quidem eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta oſtenſa eſt eſſe minor cono z. non eſt igitur portio conoidalis cono z minor. Cum igitur neque maior, neq; minor eſſe poſſit, conſtat propoſitum eſſe demonſtratum.

28 SI portio conoidalis obtuſianguli abſcindatur plano etiam ſuper axem non erecto, eam proportionem habebit ad abſciſſorem coni, baſim eãdem & axem eundem cum portione habentem, quam habent utræq; ſimul, linea æqualis axi portionis, & tripla ad adiectã axi, ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, axi, & eius quæ dupla ſit ad axi adiectã. Eſto portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem non erecto: ipſa uero figura alio plano abſciſa ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planum abſcindens portionem figuræ quidem: eſto ſectio a b c coni obtuſianguli ſectio, plani autem abſcindentis portionem eſto linea recta c a: uertex autem coni complectentis conoidale eſto punctum h, & ducatur u y per b æquediſtans ipſi a c, & contingens coni ſectionem in puncto b, & ducatur ab h ad b coniungens, & educatur in longum: diuidet propter eadem f æqualia ipſam a c, diuidet uerſus eam partem a c, & erit uertex portionis b punctum, axis autem b d. adiecta uero axi b h: ipſi autem b h æqualis eſto h f & f g, ab ipſa uero u y exeat planum æquediſtans plano ſecundum a c educto. continget autem conoidale in puncto b, & erit planum ſecũdum a c eductum non ſuper axem erectum, & diuidet conoidale cuius ſectio erit coni acutianguli ſectio, diametros autem

eius

eius maior c a, cum ſit alia coni acutianguli ſectio circa diametrum a c, & recta linea b d à centro erecta in plano quod eſt à diametro erectum, ſuper planũ in quo eſt coni acutianguli ſectio. Poteſt igitur cylindrus effingi, qui axem habeat in linea recta b d, in cuius ſuperficie ſit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtituta. hoc igitur effecto, erit quoddã cylindri fruſtũ, eandem habẽs cũ portiõe baſim, & axem eundem: altera uero eius baſis erit planũ, quod eſt ſecundum u y ductum. Item poterit etiam conus extrui, qui uerticem habeat pũctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtructa, & axis idem. Hoc inuento, oſtendendum eſt portionem conoidalis ad coni abſciſorem dictum, eam habere proportionem, quam g d ad d f. ſicut enim g d ad d f, ita ſit conus z ad abſciſorem coni. Dico portionem conoidalis eſſe æqualem cono z. Si igitur non eſt æqualis portio conoidalis cono z, ſi eſſe poteſt, ſit maior. inſcribatur autem figuræ conoidali figura ſolida, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindri eandem altitudinem habentibus compoſita, hac ratione, ut circumſcripta figura ſuper inſcriptam minus addat, quàm portio conoidalis ſuper conum z. Cum igitur figura circumſcripta ſit maior portione, & minus excedat inſcriptam figuram, quàm portio conum z: manifeſtum eſt ſequi, inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem. educantur autem plana fruſtorum omnium, quæ in figura ſunt inſcripta, exibunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem: & eſto b r tertia pars ipſius b d, & cętera omnia ſimiliter ſuperioribus diſponantur. Rurſus itaq; primum fruſtum eorum quæ ſunt in toto cylindri fruſto, quod habet axem d e, ad primum fruſtum in figura inſcripta conſtitutum, habens axem d e, eã proportionem habet, quam quadratum a d ad quadratum k e. nam fruſta æqualem altitudinem habentia eam habent inter ſe proportionem, quam eorum baſes habere contigerit: cum ſint coni acutianguli ſectiones ſimiles, habebunt inuicem eam proportionem, quam earum diametri eiuſdem rationis habuerint poteſtate: quam autem habet quadratum a d proportionem ad quadratum k e, eam habet id quod ſub f d, d b continetur, ad id quod ſub f e, e b: cum f d ſit ducta per h, ſecundum eas quæ proxime concidunt & concurrunt: ipſæ uero a d, k e æquediſtantes ſunt eis, quæ ſecundum b contingunt. Eſt autem id quod ſub f d,

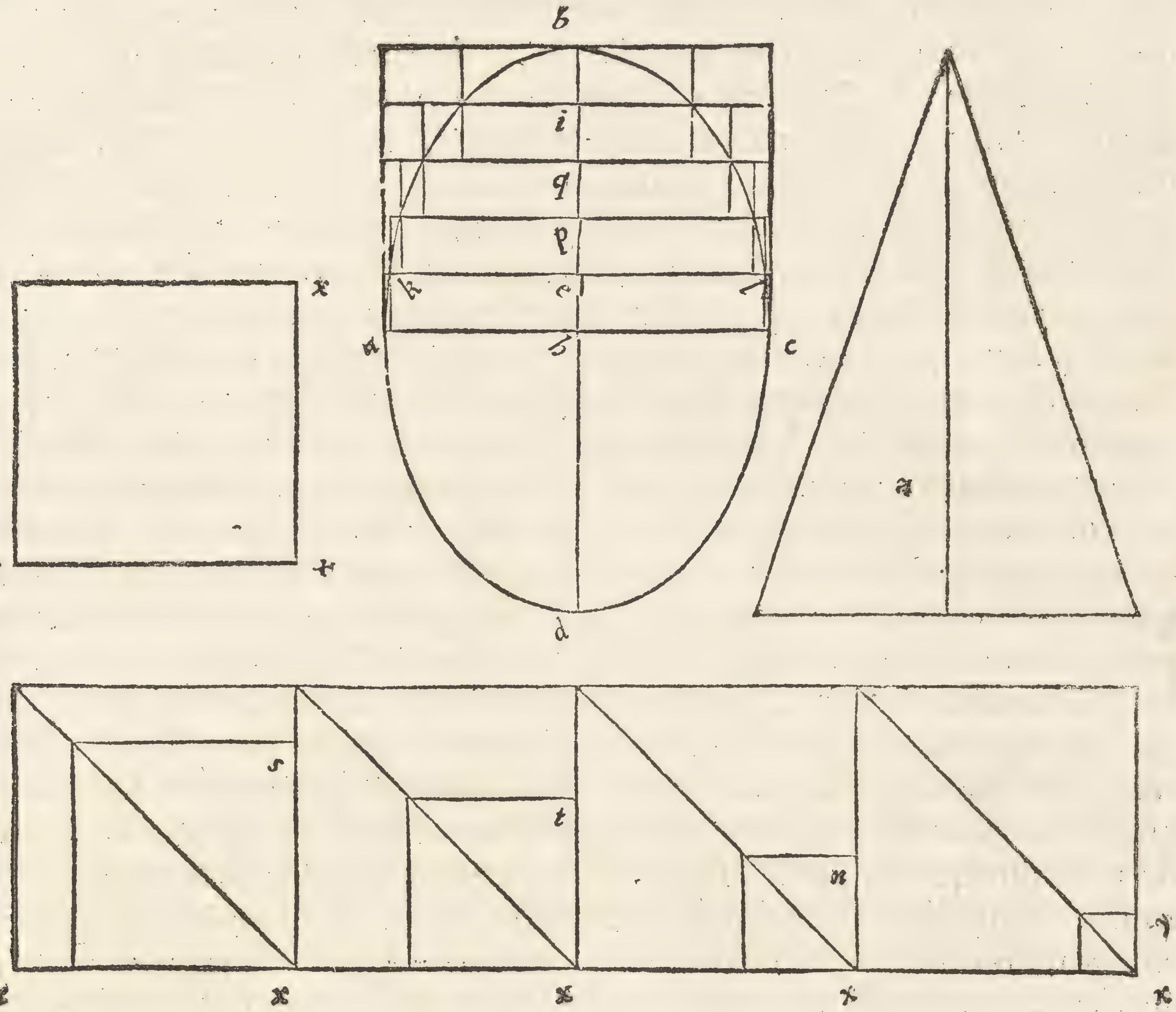


d b,

d b,continetur æquale ſpacio 9:quod autem ſub f e,e b,æquale x n.Habet igitur primum fruſtum,in toto fruſto exiſtens, quod axem habet d e,ad primum fruſtũ in figura inſcripta conſtitutum,quod axem habet d e, eam proportionem, quam ſpacium 9 ad x n,& aliorum unumquodq; in fruſto toto exiſtentium,axem habẽtium æqualem ipſi d e,ad fruſtũ quod exiſtit in figura inſcripta,illi correſpondẽs, & axem habens æqualem ipſi d e, eam proportionem, quam 9 ſpacium ad ſibi correſpondens,eorum quæ acceſſerunt ad n x, quæ ſeſe excedunt forma quadrata.Similiter ſunt quædam magnitudines, quæ ſunt in toto fruſto : & aliæ rurſus magnitudines,ſpacia uidelicet,in quibus 9 numero quidem ęquales ipſis fruſtis, & binæ,eandem habent proportionem ipſis fruſtis. Dicuntur autem fruſta ad alia fruſta in figura inſcripta conſtituta, extremum autem fruſtum nullo pacto dicitur: ſpacia uero 9 ad alia ſpacia dicuntur,ad ea quæ ad m x acceſſerunt quadrata forma ſuperantia,ſimilia ſimilibus proportionibus.extremum aũt nullo pacto dicit̃. Conſtat igitur quod omnia fruſta ad omnia eandem habebunt proportionem,quã omnia ſpacia ad omnia adiecta,dẽpto maximo. Omnia uero ſpacia ad omnia adiecta, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm n x ad eam quæ ſit utriſque ſimul æqualis, dimidiæ x & tertiæ parti m.quare & maiorẽ eà quam habet f d ad h r : maiorem ergo habet proportionem fruſtum totum ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quod quidem eſſe non poteſt. Nam figura inſcripta fuit demonſtrata maior eſſe cono z.Non eſt igitur conoidalis portio cono z maior. Si autem ponatur conoidalis portio minor eſſe cono z,figura ſolida in portione deſcripta,& alia circumſcripta,ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptã eo minus excedat, quo conus z ponitur excedere portionem.Rurſus oſtendetur,ſimiliter circumſcriptã figuram cono z eſſe minorem, & fruſtũ cylindri quod baſim habeat cum portione eandem,& axem eundem,ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem,quàm ad conum z:quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur portio conoidalis maior cono z,neq; minor eſſe poteſt.Neceſſe ergo eſt, æqualem eſſe.quare patet propoſitum.

29 CVIuslibet figuræ ſphæroidis plano per cẽtrum ducto, & erecto ſuper axem ſectæ,dimidium ſphæroidis duplum eſt coni qui baſim habet eandem cum portione,& axem eundem. Eſto ſphæroidis portio plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem abſciſſa: ſecta uero ſphæroide alio plano ſecundum axem ducto,huius portionis ſectio ſit a b c d,coni acutianguli ſectio: eius autem diametros & axis ſphæroidis b d,centrum uero h.nihil autem intererit ſiue b d ſit maior diametros, ſiue minor ſectionis coni acutianguli: plani uero abſcindentis figuram ſectio ſit a c linea recta, & ipſa tranſibit per h,& rectos angulos faciet ad b d, cum planum ponatur per centrum duci,& ſuper axem eſſe erectum. Oſtendendum itaq;,dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptum,uerticem uero punctum b,duplam eſſe coni eius qui baſim habeat cum portione eandem,& axem eũdem. Eſto igitur conus quis,in quo z duplus coni baſim habentis cum portione eãdem,& axem eundem,ſcilicet h b. Dico dimidium ſphæroidis cono z eſſe æquale. Si enim dimidium dictum dicatur cono dicto minime æquale eſſe, eſto primũ ſi fieri poteſt maius eo, & iam inſcribatur portioni dimidiæ ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita,ita ut circumſcripta inſcriptam minus excedat eo quo dimidium ſphæroidis conum ſuperat. Cum igitur circumſcripta figura maior ſit dimidio ſphæroidis,& minus excedat figuram inſcriptam,quàm ſphæroidis dimidium excedat conum z,ſequitur figuram portioni inſcriptam cono z eſſe maiorem. Eſto iam cylindrus,qui baſim habeat circulũ circa diametrum a c conſtitutũ, axem uero b h. Quoniã igitur hic cylindrus triplus

plus habetur coni, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem: conus uero z eiuſdem coni duplus exiſtit, conſtat cylindrum hunc cono z ſeſqui alterum haberi. Educantur itaq; plana omnia cylindrorum, ex quibus figura por



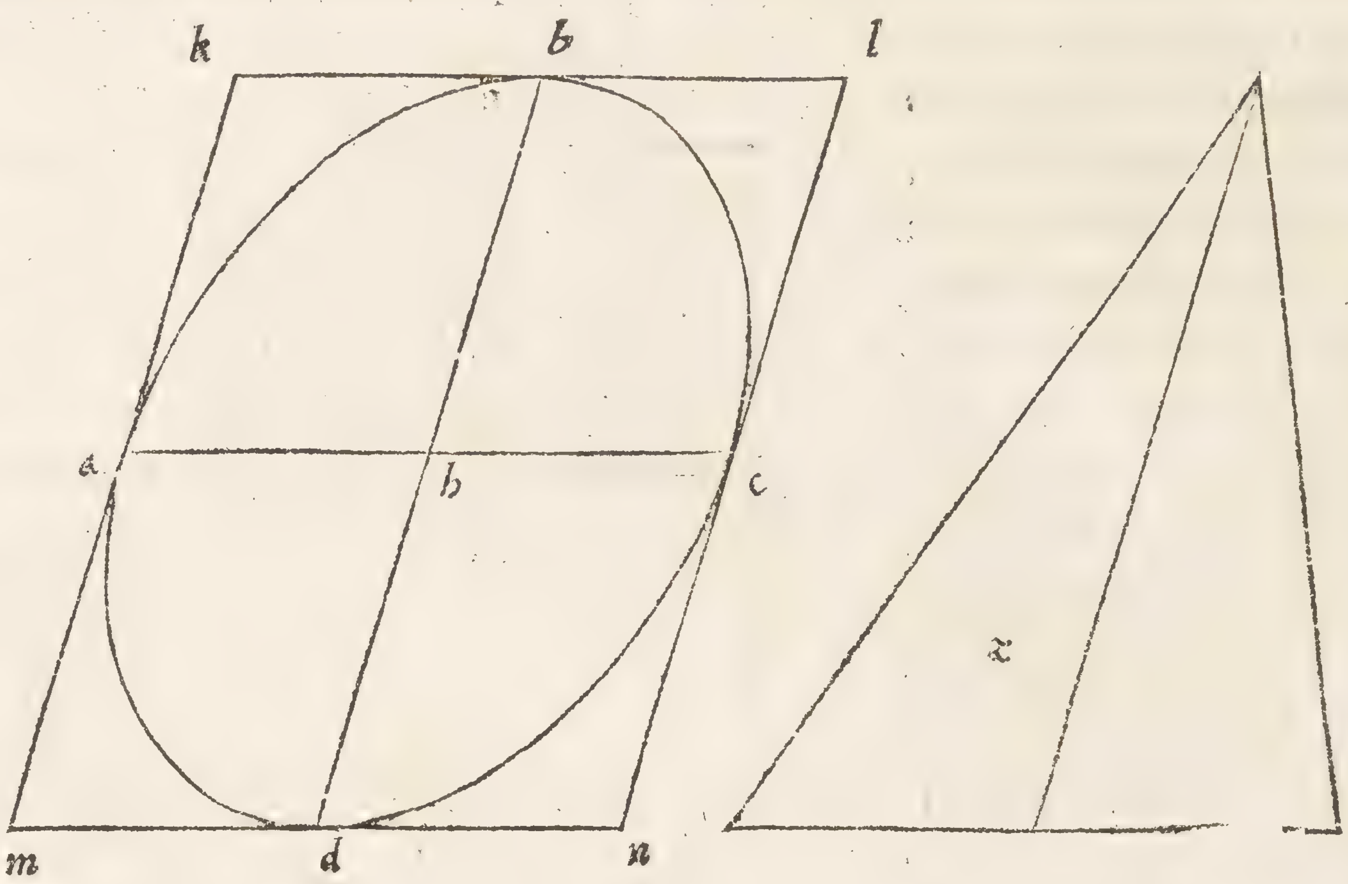
tioni inſcripta conficitur, exibunt ad ſuperficiem cylindri baſim habentis cũ portione eandem, & axem eundem. erit iam totus cylindrus in cylindros diſtributus, qui multitudine ſunt æquales in figura inſcripta conſtitutis: magnitudine autem maximo illorum æquales. Sunto iam lineæ poſitæ, in quibus x multitudine æquales portionibus lineæ b h rectæ, magnitudine uero unaquæque æqualis b h: & ab unaquaq; quadratum conſtituatur, ab ultimo uero quadrato auferatur gnomon qui latitudinem habeat æqualem b i. erit autem hic æqualis ei quod continetur ſub b i, i d: à quadrato autem ei proximo auferatur gnomon, latitudinem habens duplam ipſius b i: erit & hic ęqualis contento ſub e q, q d. & perpetuò à quadrato ſequente gnomon auferatur, latitudinem habens pręcedentis eum gnomonis, & ante eum ablati portionem maiorem: eritq; utiq; eorum unuſquiſq; æqualis ei quod ſub portionibus b d continetur, quarum altera portio æqualis fuerit latitudini gnomonis. erit etiam à quadrato ſecundo reliquum quadratum, latus habens æquale h q. Cylindrus autem primus eorum qui in toto cylindro conſtant, axem habens h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura inſcripta continentur, eundem axem h e habentem, eam habet proportionem, quam quadratũ a h ad quadratum k e: quare & quam contentum ſub b d, d h, ad contentum ſub b e, e d: habet igitur cylindrus ad cylindrum eam proportionem, quam quadratum primum habet ad gnomonem, à quadrato ſecundo ablatum. Similiter autem & aliorum cylindrorum unuſquiſq;, qui axem habeat æqualem ipſi h e, ad cylindrum in figura inſcripta cõſtitutum, axem cum eo eundem habentem, eam pro-

portionem habet, quam quadratum ſibi ſimiliter ordinatũ, ad gnomonem à quadrato ſibi proxime ſubſequenti ablatum: erunt iam quædam magnitudines, uidelicet cylindri qui ſunt in toto cylindro, & item aliæ, ſcilicet quadrata linearum x x. æquales multitudine cylindris: & binæ & binæ eandem habent proportionem. Dicuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros uidelicet in figura inſcripta conſtitutos: extremus nullo pacto dicitur. & quadrata quoq; ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, ſimilia ſimilibus relata eiſdem proportionibus: ultimũ autem quadratum nullo pacto dicitur. Omnis igitur cylindri in toto cylindro compręhenſi, ad omnes cylindros alios eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad omnis gnomones ab eis ablatos. quare cylindrus qui baſim habet eandem cum portione, & axem eũdem, ad figuram inſcriptam eam habet proportionem, quam quadrata omnia ad gnomones omnis ab eis ablatos. quadrata uero omnibus gnomonibus, qui ab ipſis ablati fuerunt, ſunt pluſquam ſeſquialtera: ſunt enim quædã lineæ poſitæ hæ x r, x s, x t, x y, x u, æquali ſeſe excedentes, & minima earum æquatur exceſſui. Sunt autem & aliæ lineæ, in quibus x x multitudine quidẽ iſtis æquales, magnitudine uero unaquęq; æqualis earum maximæ. quadrata igitur quæ ab illis efficiuntur, quarum unaquæq; æqualis eſt maximæ, ad quadrata omnia quæ ab illis naſcũtur, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperãt, minus quàm tripla eſſe probatum eſt: ad reliqua uero, dẽpto maximo, pluſquam tripla exiſtunt. hoc enim in his quæ circa elicas ſunt expoſita, demonſtratum eſt. Quoniam autem omnia quadrata minus ſunt quàm tripla, ad alia quadrata quæ ab ipſis ablata fuerunt, manifeſtum eſt quod reſiduorũ erunt pluſquam ſeſquialtera: quare erunt omnium gnomonum pluſquam ſeſquialtera. quare & cylindrus qui baſim habet eandem cum portione, & axem eũdem, eſt pluſquã ſeſquialter figuræ inſcriptæ: quod quidem eſſe nõ poteſt. Nam coni z ſeſquialter exiſtit. figura uero inſcripta oſtenſa eſt maior eſſe cono z. non eſt igitur dimidium ſphæroidis cono z maius: neq; profectò minus. Nam eſto ſi fieri poteſt, minus. Rurſus inſcribatur dimidio ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta ſuper inſcriptam minus addat quàm conus z ſuper dimidium ſphæroidis: & reliqua ſint prioribus ſimiliter diſpoſita. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, ſequitur circumſcriptam figuram cono z eſſe minorẽ. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumſcripta cõſtructi ſunt, qui habet axem e h, eam habet proportionem, quam quadratum primum ad ipſum met. Secundus autem cylindrus eorum qui in toto cylindro, habens axem e p, ad ſecundum cylindrum eorum qui in circumſcripta figura exiſtunt, habentem axem e p, eam habet proportionem, quam ſecundum quadratum ad gnomonẽ ab eo ablatum, & reliquorum cylindrorum, qui in toto cylindro continentur unuſquiſq; qui axem habeat æqualem h e, ad cylindrum ſibi coniunctum, eorum qui ſunt in figura inſcripta, eandem habet proportionem, quam habet quadratum ſibi correſpondens ad gnomonem ab eo ablatum. Omnis igitur cylindri in toto cylindro conſtituti, ad omnis cylindros in figura circumſcripta compręhẽſos, eam habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id quod primo quadrato æquale eſt, & ad omnes gnomones à reliquis quadratis ablatos: & quadrata omnia ſunt minus quàm ſeſquialtera eius quod primo quadrato æquale exiſtit, & gnomonum à reliquis ablatorũ: propterea quod quadratis quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus ſunt producta, dempto quadrato à maxima earũ producto, pluſquam tripla exiſtunt. Cylindrus igitur qui baſim cum portione habet eandem, & axem eũdem, eſt minor quàm ſeſquialter figura circumſcripta: quod quidem eſſe non poteſt, nam cono z ſeſquialter habetur: circumſcripta uero figu-

ra

ra oſtenſa eſt cono z minor eſſe: non erit igitur dimidium ſphæroidis cono z minus: uerum neq; maius. neceſſe eſt igitur eſſe æquale.

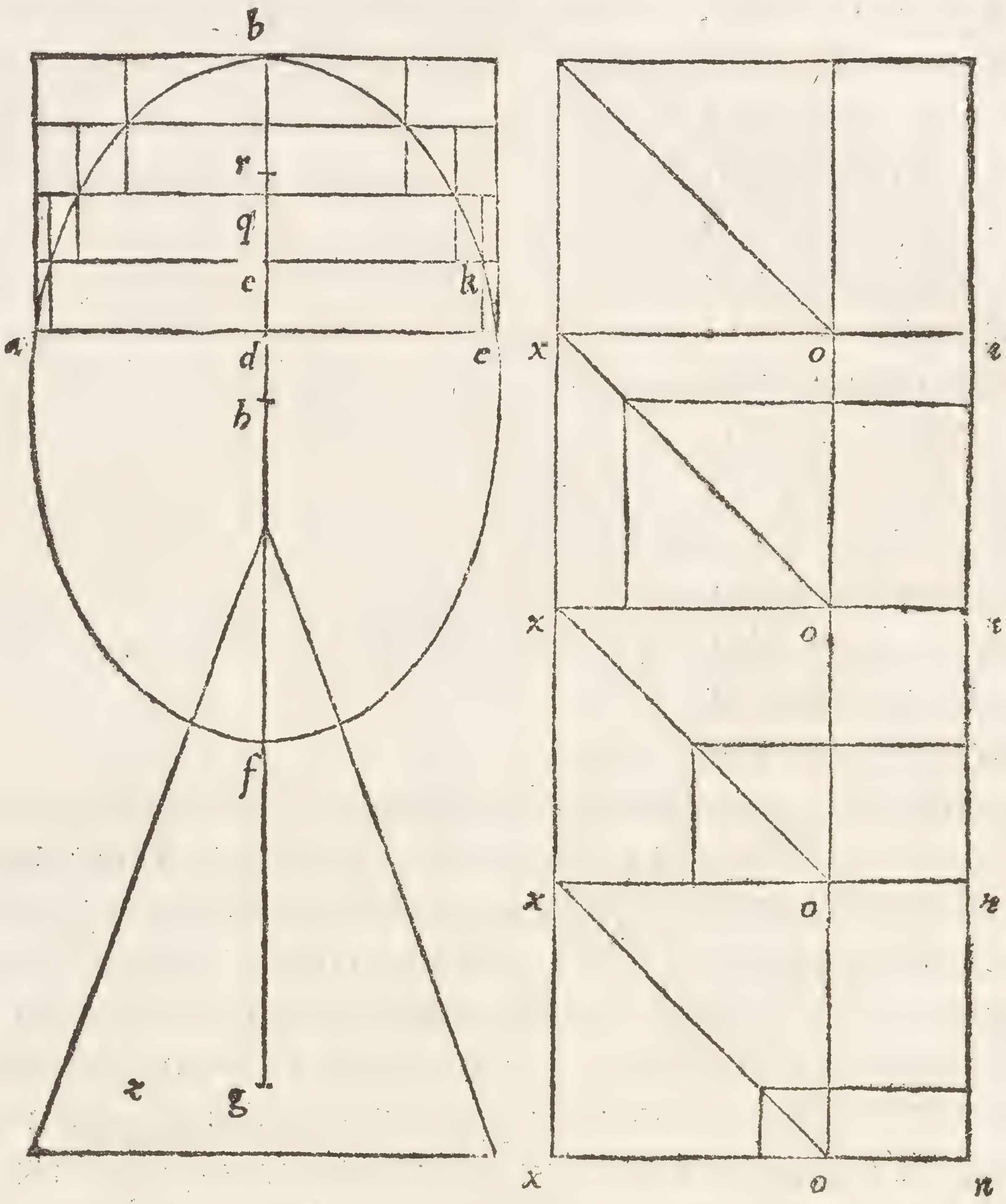
SI figura ſphæroidis plano ſecetur per centrum ducto, ſuper axem non erecto, 30
dimidium ſphæroidis ſimiliter duplum exiſtet abſciſoris coni, qui quidem abſciſor baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem. Secetur itaq; portio ſphæroidis, ſecta ipſa ſpheroide alio plano ſecundũ axem ducto, & ſuper planum ſecans erecto, ipſius figuræ ſectio ſit a b c d, coni acutiãguli ſectio: cuius centrum ſit h: plani autẽ abſcindentis figurã eſto a c linea recta: erit ipſa per h ducta, cum planum poſitum ſit per centrum duci. erit igitur quædam coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta. nam planum abſcindens poſitum eſt, non ſuper axem erectum eſſe. Ducantur iam quædam k l, m n, æquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni acutianguli in punctis b, d: & ab ipſis k l, m n plana prodeant æquediſtantia plano ſecundum a c ducto, quæ & ipſam ſectionem ſphæroidem contingent in punctis b, d: & quæ iungit b d linea tranſibit per h, & erunt portionum uertices puncta b, d: axes uero b h, h b. Poteſt itaq; cylindrus effingi, qui axem habeat b h, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli continetur, quæ circa diametrum a c eſt conſtituta. eo autem effecto, erit quoddam cylindri fruſtum, quod eandem habeat cum dimidia ſphæroide baſim, & axem eundem. Rurſus & conus effici poteſt, qui uerticem habeat punctum b, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli exiſtet à diametro a c. eo pacto erit abſciſor coni, qui eandem cum portione baſim, & eũdem axem habebit. Dico iam, quòd ſphæroidis dimidium huius coni duplum exiſtet. Eſto conus z duplus ad abſciſorem coni. ſi dimidium ſphæroidis dicatur cono z non eſſe æquale, eſto primum ſi fieri poteſt maius. inſcribatur autem in dimidia ſphæroide figura ſolida, & altera circũſcribatur ex cylindricis fruſtis altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto ut figura circumſcripta excedat figuram inſcriptã, minus eo quo dimidia ſphęroidis excedit conum z. Iam ſimili ratione qua ſuperius factum eſt, oſtendetur figuram inſcriptam cono z maiorem exiſtere, & fruſtum quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem cono z ſeſquialterum exiſtens, figura inſcripta dimidiæ ſphæroidi maius quàm ſeſquialterum eſſe, quod eſſe non poteſt. non erit ergo dimidia ſphæroidis cono z maior. Si uero minor illo ponatur eſſe, inſcribatur dimidiæ ſphæroidi figura ſolida, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindri æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit dimidiam ſphæroidem. Rurſus ſimiliter ſuperioribus demonſtrabitur, figuram circumſcriptam minorem eſſe cono z, & fruſtum cylindri quod baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, cono z ſeſquialterum eſſe: circumſcriptæ uero figuræ minus quàm ſeſquialterum haberi, quod eſſe non poteſt. Conus itaq;



z,neq; minor dimidia ſphæroide poterit,neq; maior haberi.æqualis igitur eſſe illi neceſſario reliquitur,quod demonſtrare uolebamus.

31 CVIuſcunq; figuræ ſphæroidis plano ſectæ non per centrum ducto,ſed ſuper axem erecto, minor portio ad conum qui eandem habeat cum portione baſem,& axem eundem,eam proportionem habere probatur, quam utraque ſimul dimidia axis ſphæroidis,& axis maioris portionis, ad axem maioris portionis.

Eſto itaq; portio ſphæroidis abſciſſa, plano non per centrũ ducto, ſed ſuper axem erecto: ipſa uero ſphæroides, ſecta plano alio ſecundum axem ducto, ipſius figurę ſit ſectio a b c, coni acutiãguli ſectio: diametros autẽ ſectionis, & axis ſphæroidis ſit b f, centrum autem h:plani autem abſcindentis portionem eſto ſectio a c linea recta. faciet autem cum ipſa rectos angulos ad b f,cũ planum ſit ſupet axem erectum,ut ponitur.eſto autem portio abſciſſa,cuius uertex ſit punctum b minor dimidia ſphæroide figura,& ipſi b h æqualis eſto f g. Oſtendendũ eſt,quod portio cuius uertex eſt



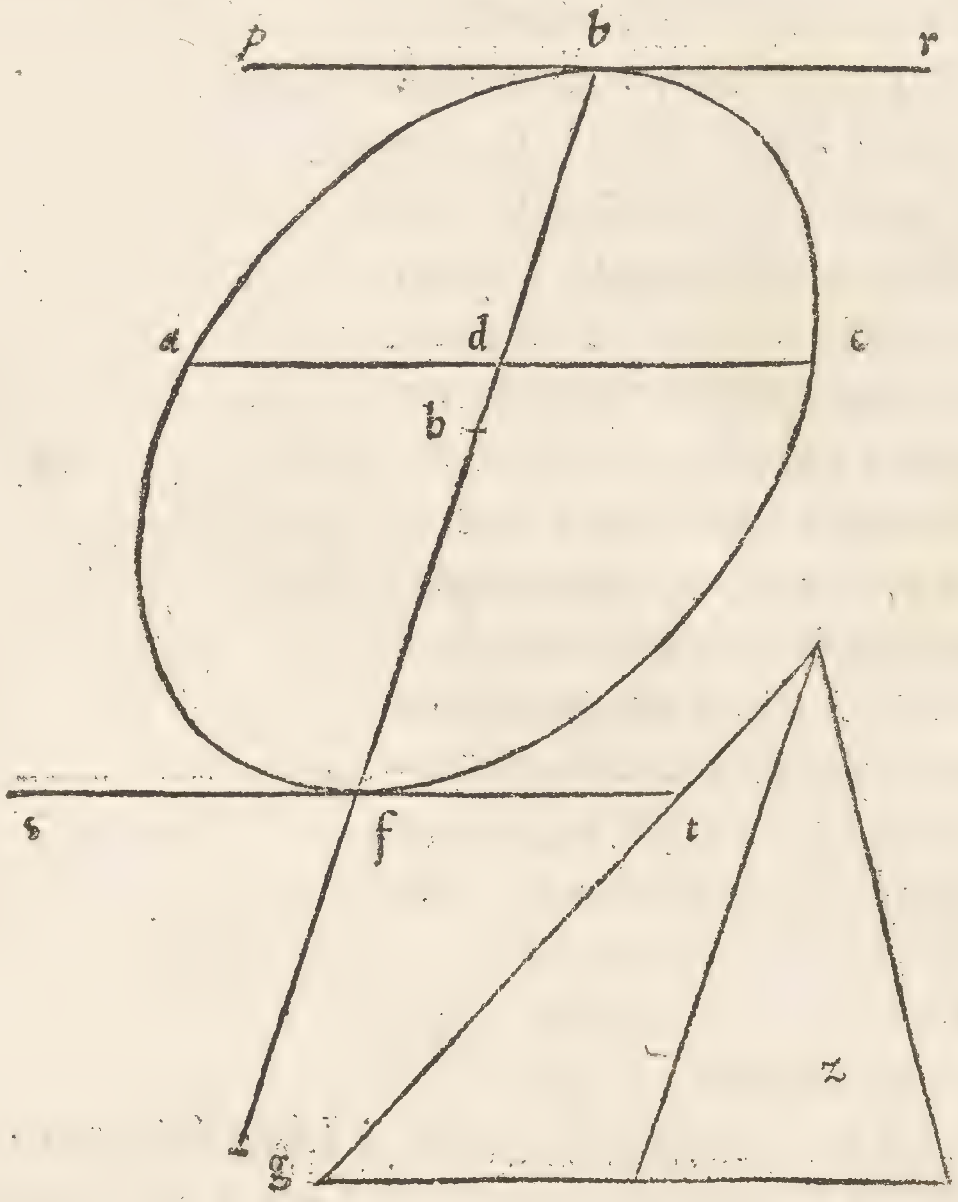
punctum b,ad conum qui baſim habet cum portione eandem,& axem eundem, habet eam proportionem,quam d g ad d f.Eſto itaq; cylindrus qui eandem habeat baſim cum portione minori,& axem eundem : eſto item conus,in quo z ad conum baſim eandem habentem, eam habeat proportionem,quam d g ad d f.Dico iam conum z portioni eſſe æqualem illi, quæ uerticem habeat punctum b. nã ſi non eſt æqualis, eſto primò ſi fieri poteſt,minor. Inſcribatur iam portioni figura ſolida,& alia circumſcribatur, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita,hoc pacto,ut circumſcripta inſcriptam minus excedat,quàm ſphæroidis portio conum z . Cum igitur circumſcripta figura portione maior exiſtat, & inſcriptam minus excedat, quàm portio conum z , ſequitur figuram inſcriptam cono z maiorem haberi.Eſto deinde b r tertia pars ipſius b d:cum igitur ipſius b h ſit tripla b g,& d g ipſius h r tripla erit. cylindrus itaq; qui baſim habeat cum portione eandem,& axem b d,ad conum habentem eandem baſim, & axem eũdem, habebit eam proportionem,quam habet d g ad h r.Dictus autem conus ad conũ z eandem habet proportionem,quam d g ad d f.Habebit igitur cylindrus,qui baſim habeat cum portione eandem,& axem eundem , proportionibus diſſimiliter ordinatis,eam proportionem ad conum z,quam d f ad h r. Sunto itaq; lineæ poſitæ, in quibus x n multitudine quidem æquales portionibus ipſius b d,magnitudine uero unaquæq; ipſi d f.ſit autem & unaquæq; x o ęqualis ipſi b d:erit igitur unaquæq;

naquæque n o dupla ipſius h d. Accedat igitur ad unamquanq; earum ſpacium quoddam, cuius latitudo ſit æqualis ipſi b d, ita ut ſint diametri quadratorum diametros habentium . auferatur autem à primo gnomon, qui latitudinem habeat æqualem ipſi b e: à ſecundo uero gnomon, latitudinem habens æquam ipſi b q: & ab unoquoq; eodem modo ſequente ſpacio gnomon auferatur, latitudinem habens una parte minorem latitudine præcedentis eum gnomonis ablati. Gnomon itaq; à primo ſpacio ablatus, æqualis erit ei quod ſub b e, e f continetur: & reliquum ſpacium accedens ad ipſam n o, ſuperat forma quadrata latus exceſſus habens æquale ipſi d e: gnomon uero à ſecundo ſpacio ablatus, æquatur ei quod cõtinetur ſub f q, q b: & reliquum ſpacium quod adiacet ipſi n o, excedens forma quadrata, & reliqua iſtis ſimiliter. His ſic ſe habentibus, plana omnium cylindrorum ex quibus inſcripta figura componitur, ad ſuperficiem cylindri baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem educantur. Iam totus cylindrus in cylindros diſtributus erit, multitudine æquales illis qui ſunt in figura circumſcripta conſtituti, magnitudine uero maximo illorũ æquales. Primus itaq; cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura inſcripta conſtitutum, qui habeat d e axem, eam habet proportionem, quã quadratum d c, ad quadratum k e. Hæc autem eſt eadem ei quam habet contentum ſub b d, d f, ad contentum ſub b e, e f. Cylindrus igitur ad cylindrum habet eam proportionem, quam primum quadratum ad primum gnomonem, ablatũ ab eo. Similiter autem & aliorum cylindrorum, qui ſunt in toto cylindro, unuſquiſq; axem habens æqualem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura inſcripta conſtitutum, axem habentem eundem, habebit eam proportionem, quã ſpacium ſibi correſpondens, ad gnomonem ablatum ab eo. Erunt quædam magnitudines cylindri, qui ſunt in toto cylindro: & aliæ item magnitudines, ſpacia ad n x adiecta, latitudinem habentia æqualem ipſi b d, multitudine cylindris æqualia, & bina & bina habent eandem proportionem . dicuntur autem cylindri ad alios cylindros in figura inſcripta conſtitutos, ultimus autem nullo pacto dicitur: & ſpacia dicuntur ad alia ſpacia, ad gnomones ablatos ab eis quæq; duo ſimilis rationis in eadem proportione: ultimum uero ſpacium nullo pacto dicitur. Conſtat igitur, cylindros omnes ad alios omnes eam habere proportionem, quã omnia ſpacia ad omnis gnomones. Cylindrus igitur, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inſcriptã, eam habebit proportionem, quã ſpacia omnia ad omnes gnomones. Et quoniam erant lineæ quędam poſitæ æquales, in quibus n o, & ad unamquanq; acceſſit ſpacium ſuperãs forma quadrata, latera uero exceſſuum inter ſe æqualiter ſeſe excedentia, & erãt exceſſus eorum æquales illarum minimæ: & alia item erant ſpacia ad ipſam n x adiacentia, latitudinem ipſi b d æqualem habentia, multitudine æqualia ſpacijs prius dictis, magnitudine uero unumquodq; maximo illorum æquale, manifeſtum eſt quod omnia ſimul ſpacia quorum unumquodq; æquale eſt maximo, ad omnia alia ſpacia minorem habent proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Conſtat igitur, eadem ſpacia ad omnis gnomones maiorem habere proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & duabus tertijs ipſius x o . Cylindrus ergo qui baſim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inſcriptam, maiorem habet proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & duabus tertijs x o. Eſt autem n x æqualis d f, dimidia uero n o æqualis ipſi d h: ipſis autem tertijs ipſius x o, æqualis eſt ipſa d r. totus ergo cylindrus ad figuram portioni inſcriptã, maiorem habet proportionem, quàm d f ad h r: quam uero proportionem d f habet ad h r, eandem oſtenſum eſt habere cylindrum ad conum z: maiorem ergo proportionem habebit cylindrus ad figuram portioni

inſcriptam, quàm ad conum z, quod eſſe non poteſt: nam oſtenſum eſt, figuram inſcriptam cono z eſſe maiorem. Non eſt ergo portio ſphæroidis cono maior. Verum ſi fieri poteſt, eſto minor eodem. Rurſus autem inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita hoc pacto, ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit portionem, & cætera ſuperioribus eadem diſponantur. Cum itaque inſcripta figura ſit portione minor, & circūſcripta minus excedit inſcriptam, quàm conus z portionem: ſequetur ex hoc, figuram circumſcriptam cono z minorem eſſe. Item primus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, & axem eandem habētem, eam habet proportionem, quam ultimum ſpacium eorum quæ ad x n adiacent, latitudinem habentiū æqualem ipſi b d ad ſe ipſum. utraq; enim ſunt æqualia. & ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in cylindro toto, axem habens æqualem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſecundum ſpacium eorum quæ ipſi n x adiacēt, latitudinem ipſi b d æqualem habentium, habet ad gnomonem ablatum ab eo, & aliorum cylindrorum in toto cylindro conſtantium, qui axem habent ipſi d e æqualem: unuſquiſq; ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſpacium ſibi correſpondens eorū quæ ad n x adiacent, ad gnomonem ablatum ab eo ante ultimum dictum. Omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro conſiſtunt, ad omnis cylindros in figura circumſcripta conſtitutos eam habebunt proportionem, quam omnia ſpacia ad n x adiacentia, ad ſpacium æquale ſpacio ultimo poſito, & gnomonibus ablatis ab alijs eadem ratione, ut ſuprà factum eſt. Cum igitur oſtenſum ſit, ſpacia omnia ad n o adiacentia, ad ſpacia omnia excedentia forma quadrata, dēpto maximo, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o, conſtat eadem ſpacia ad reliqua quæ ſunt æqualia ultimo ſpacio poſito, & gnominibus qui à reliquis ſunt ablati, minorem proportionem habere, quam n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidię n o, & duabus tertijs ipſius x o. Vnde ſequitur, cylindrū quoq; qui baſim habeat cum portione eandē, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm f d ad h r. quam autem proportionem habet f d ad h r, eam habet dictus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit dictus cylindrus ad circumſcriptam figuram, quàm ad conum z: quod quidem eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt, figuram circumſcriptam cono z eſſe minorem. Non eſt igitur portio ſphæroidis minor cono z: neque, ut prius oſtendimus, maior: neceſſe eſt igitur, eidem eſſe æqualem.

32 SI figura ſphęroidis plano ſecetur non ſuper axem erecto, neq; per centrum ducto, eius portio minor ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habebit proportionem, quam utraq; ſimul linea dimidia eius quæ iunget uertices portionum effectarum, & axis maioris portionis ad axem portionis maioris. Diuidatur itaq; aliqua figura ſphæroides, ut dictū eſt: & diuiſa ipſa alio plano per axem ducto, erecto ſuper planū ſecans, eſto figuræ ſectio a b c d coni acutianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit a c linea recta. & ducantur p r, s t ęquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni in punctis b, f: & ab eis exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingent quoq; ipſam ſphæroidem in punctis e, f: & erunt uertices portionum cōiuncti, ducta b f linea. ipſa uero tranſibit per centrum: & eſto centrum ſphęroidis & ſectionis coni acutianguli h. Quoniam igitur poſitum eſt, figuram ſecari plano ſuper axem non erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio, & eius diametros c d. Sumatur cylindrus axem habens in directum b d, in cuius ſuperficie erit coniacutian-

cutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: & conus qui habeat uerticē punctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: erit iam quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem: & abſciſor coni qui habeat eãdem cum portione baſim, & axē eundē. Oſtendendum eſt igitur, quod portio ſphæroidis, cuius uertex eſt punctum b, ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cū portione eandem, & axem eūdem, eam habebit proportionem, quam d g ad d f. Eſto autem f g æqualis h f. Sumatur itaque conus quidam, in quo z, qui habeat ad abſciſorem coni baſim habentis cum portione eandē, & axem eundem, eam proportionem, quam d g ad d f. Si dicatur, portionem ſphæroidis non eſſe æqualem cono z, eſto primum, ſi fieri poteſt, maior eo: & inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur, ex cylindrorum fruſtis altitudinē æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo portio ſphæroidis excedit conum z. Similiter iam præcedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem, & fruſtum cylindri quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram inſcriptam maiorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non erit ergo portio ſphæroidis cono z maior. Sed eſto item, ſi eſſe poteſt, minor: & rurſus inſcripta ſit portioni ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindricis fruſtis æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minus eo, quo conus z excedit portionem. Rurſus eadem ratione oſtendetur, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem, & fruſtum cylindri quod baſim habeat eandem cum portione, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram habere minorem proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. neq; igitur ſphæroidis portio minor eſſe poteſt cono z. quare conſtat, id quod ſuſceperamus demōſtrandum.

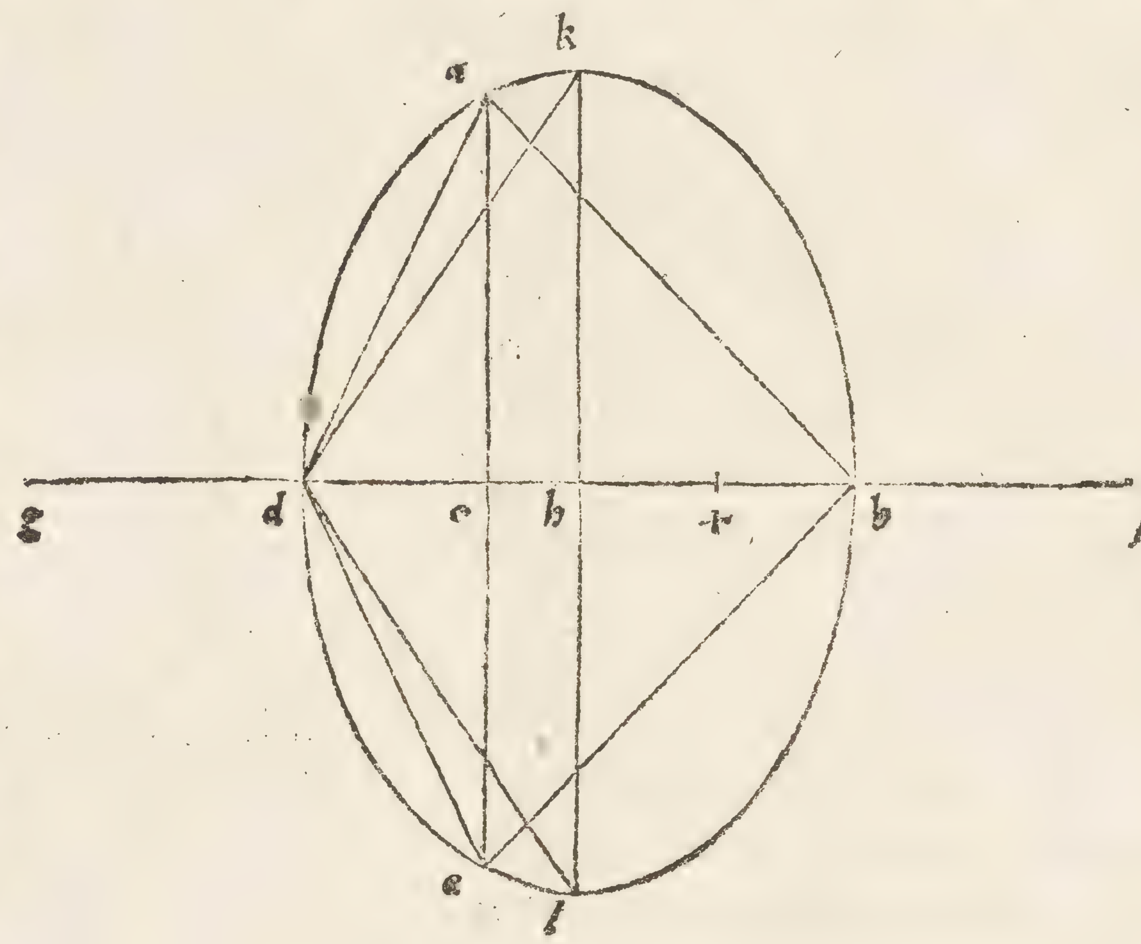


CViuslibet ſphęroidis figuræ plano ſectæ ſuper axem erecto, nō aūt per cen- 33
trū ducto, maior portio ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habet proportionem, quam habet linea æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphęroidis, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis.

Secetur itaq; ſphæroides, ut dictum eſt: ſecta uero ipſa figura plano alio ſecundum axem ducto, ſuper planum ſecans erecto, figuræ quidem eſto a b c coni acutianguli ſectio. eius autem diametros, & axis figurę b d: plani uero ſecantis ſectio ſit c a linea recta. erit autem ipſa angulis rectis ſuper b d. Eſto autem maior portionum, cuius uertex ſit b punctum, & centrum ſphæroidis ſit h. addatur autem d g ad e d, ipſi d h æqualis, & b f eidem ſit æqualis. Demonſtrandum eſt, portionem ſphæroidis cuius uertex b punctum, ad conum qui habeat baſim eandem cum portione, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g habet ad e d. Se-

cetur

cetur iam ſphæroides plano per centrum ducto, & ſuper axem erecto: & à circulo inde facto conus exurgat, qui uerticem habeat punctum d. Eſt iam tota ſphæroides dupla portionis habentis baſim circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem autem punctum d. Dicta uero portio dupla eſt coni, qui habeat baſim



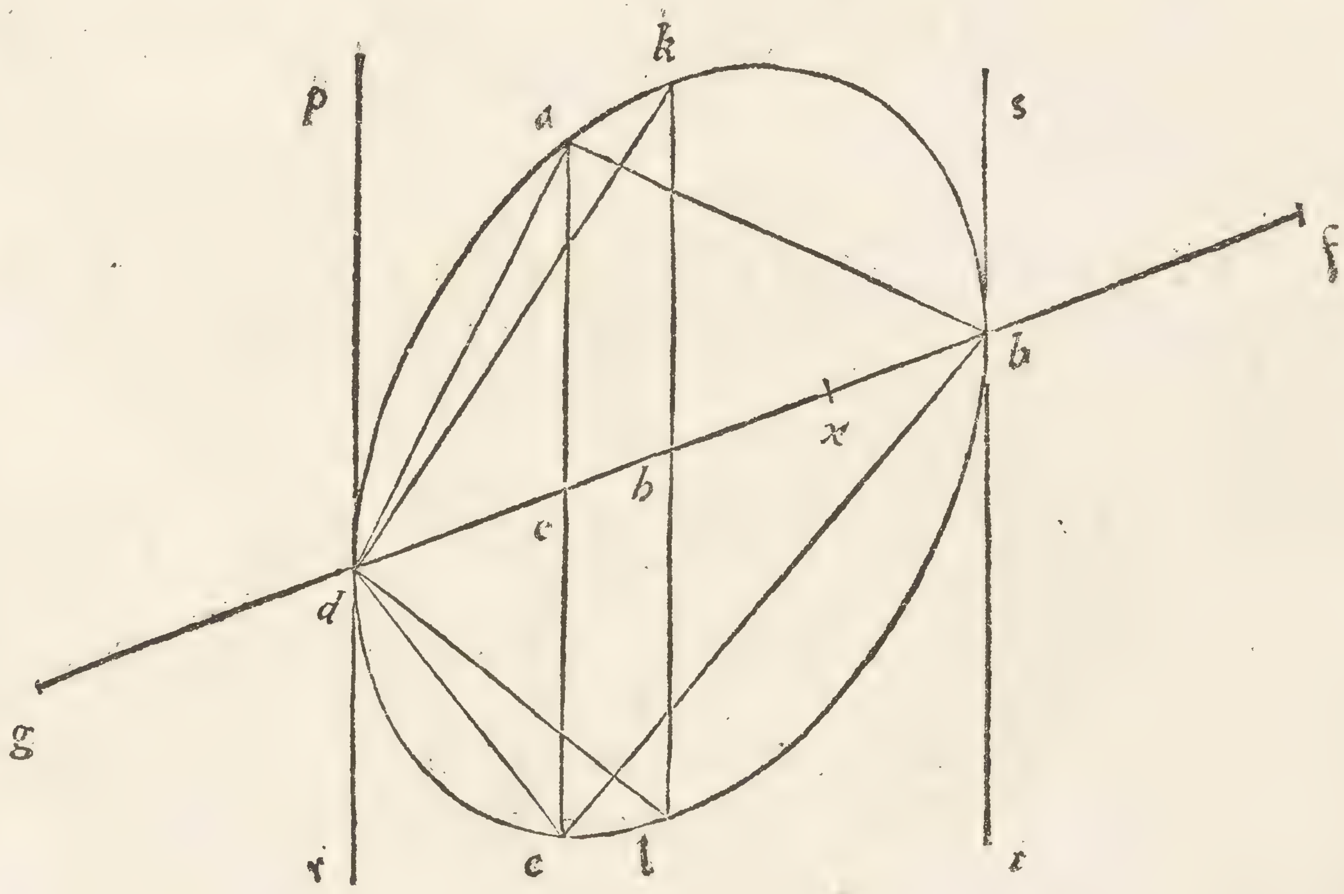
cum portione eandem, & axem eundem. hæc enim oſtenſa ſunt. Tota igitur ſphæroides, dicti coni quadrupla exiſtit. conus autem iſte, ad conum habentem baſim circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet h d ad e d, & ex ea quam habet quadratum k h ad quadratum e a: quæ eſt eadem ei quam habet cõtentum ſub b h, h d, ad id quod ſub b e, e d continetur. quam uero proportionem habet h d ad e d, hanc habeat x d ad h d. Habebit igitur contentum ſub x d, b h, ad contentũ ſub b h, h d, eam quam d h ad d e. Proportio autem compoſita ex ea quam habet contentum ſub x d, h b, ad contentũ ſub b h, h d: & ex ea quam habet contentum ſub b h, h d, ad contentum ſub b e, e d: eadem eſt ei quam habet contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus igitur qui baſim habet circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem uero punctum d, ad conum qui baſim habeat circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus autem qui baſim habet circulum circa diametrum a c, uerticem uero punctum d, ad portionem ſphæroidis, quæ baſim habeat eandem eidem, & axẽ eundem, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d, ad contentum ſub f e, d e: hoc eſt, b e ad e f. nam minus quàm dimidium ipſius ſphæroidis, ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, oſtenſum eſt, quod eam habet proportionem, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphæroidis, & axi maioris portionis, ad axem maioris portionis. ea uero eſt illa quam habet f e ad b e. Conus igitur qui eſt in dimidia ſphæroide, ad portionem ſphæroidis dimidio illius minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, d e. quoniã autem tota ſphæroides, ad conum in eius dimidio conſtitutum, eam habet proportionem, quam compræhenſum ſub f g, x d, ad compræhenſum ſub b h, x d. nam utraq; quadrupla eſt: Conus autem in dimidio ſphæroidis conſtitutus, ad portionem eo dimidio minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub x d, b h, ad contentũ ſub f e, e d: ſphæroides quoq; totum ad portionem eius minorem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f g, x d, ad contentum ſub f e, e d. quare & maior ſphæroidis portio, ad minorem, eam habet proportionem, quam exceſſus quo cõtentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d. Contentum autem ſub f g, x d, excedit contentum ſub f e, d e, eo quod continetur ſub x d, e g, & eo quod continetur ſub f e, x e. Habet igitur maior portio ad minorem, eam proportionem, quam id quod eſt æquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e,

x e,

x e ad contentum ſub f e,e d : portio uero ſphæroidis minor,ad conum baſim habentem cum portione eandem,& axem eũdem,eam habet proportionem, quam contentum ſub f e,e d ad contentum ſub b e,e d:habet enim eam proportionem, quam f h ad b e. Conus autem in minori portione conſtitutus, ad conum qui eſt in portione maiori, eam habet proportionem,quam cõtentum ſub b e,e d ad quadratum b e.nam cum coni habeant baſes æquales,altitudinum proportionem ſequentur : habet itaq; & maior portio ſphæroidis ad conum in ea inſcriptum eam proportionem,quam habet id quod eſt ęquale utriſq; ſimul,contento ſub x d,e g, & contento ſub f e,x e,ad quadratum b e.Ea uero eadem eſt ei quam habet e g ad e d.nam contentum ſub x d, e g,ad contentum ſub x d,e d,eam habet proportionem,quam e g ad e d:& contentum ſub f e, x e,ad contentum ſub f e, h e eam habet proportionem,quã e g ad e d. Propterea quod linea x d,h d,d e, ſunt inter ſe proportionales, & h d æqualis g d:igitur id quod æquatur utriſq; ſimul contento ſub x d,e g,& contento ſub f e,x e,ad id quod æquatur utriſq; ſimul,contento ſub x d,e d, & contento ſub f e,h e,eam habet proportionem,quam e g ad e d:quadratum uero ipſius b e, æquatur utriſq; ſimul,contento ſub x d,e d, & contento ſub f e,h e.nam quadratum ipſius b h,æquatur contento ſub x d,e d.Exceſſus autem quo quadratum b e excedit quadratum b h, æquatur cõtento ſub f e,h e.cum b h & b f ſint æquales. Conſtat igitur, quod maior ſphæroidis portio ad conum,qui baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem,eam habeat proportionem, quam e g habet ad e d.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur,neq; ſuper axem erecto, neq; per cẽtrum ducto:maior eius portio ad eum coni abſciſorem qui baſim habeat cum portione eandem,& axem eundem,habebit eam proportionẽ,quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul,dimidiæ illius quæ portionum inde effectarum uertices iunxerit, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis habuerit. Secetur itaque 34

ſphæroides, ut dictum eſt. ipſo autẽ ſecto,per aliud planum ſecundum axem ductum,et erectum ſuper planũ ſecans,figuræ quidem ſectio eſto a b c d coni acutianguli ſectio : plani autẽ figuram ſecantis ſit a c linea recta:ducãtur autem p r, ſ t æquediſtantes ipſi a c, & contingentes in punctis b d coni acutianguli ſectionem:& exeant ab eis plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto.continget quoq; ipſa ſphæroidem in punctis b d, & erunt uertices portionum puncta b,d: ducatur iam b d linea recta coniungens uertices portionum effectarum : trãſibit autem ipſa per centrum,& eſto h cẽtrum maior portio dimidio ſphæroidis. ſit illa cuius uertex eſt b:adijciatur ipſi d h æqualis d g, & b f eidem. Oſtendendum eſt, maiorem ſphæroidis portionem ad abſciſorem coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem,eam habere proportionem, quam e g ad e d.ſecetur enim ipſum ſphæroides plano per centrum ducto, & æquediſtanti ipſi plano



quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis abſciſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſorem coni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſorem coni in minori inſcripto eam habere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e, e d: & abſciſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d. habebit ergo abſciſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem minorem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſorem coni in dimidia ſphæroide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſor autẽ coni dictus ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad contentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſorem coni in ea deſcripti, eã habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſor uero coni in maiori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſorem coni deſcriptũ in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſores enim conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior ſphæroidis portio ad abſciſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE COnoidalibus & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSItheo Salutem.

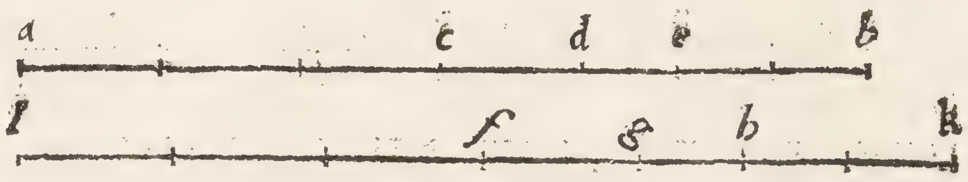
EORVM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quorum aſſiduè à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plurimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatueramus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſuerant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi poſſe

poſſe principio uideantur, eorum inueſtigationem tempore intercipiēte. Conon quidem non temporis ſatis ad hęc excogitanda ſortitus, uitam permutauit, & ipſa reliquit inexplicata, cum illa inueniſſet, & alia quàm plurima perquiſiſſet, ac multum adeò geometricas facultates ampliaſſet. Nouimus enim quantum ingenij, quàm admirabile in eo uiro iudicium uigebat, quàm non uulgaris circa doctrinas & aſſidua opera, quàm excellens ſtudium. Multis autem annis poſt Cononis mortem neminem accepimus inuentum fuiſſe, qui ne unum quidem problema tractare tentarit. Equidem ſtatuo eorum unumquodq; perluſtrare. nam duo quædam ex his quæ habentur in Conone, ſunt quæ minime depræhenſa fuere. Tandem uero accedemus, ut hi qui cuncta ſe gloriantur inueniſſe, nullam autem proferunt eorum quæ profantur demonſtrationem, reprehendantur. nam ex his quæ à ſe inuenta uolunt, falſa quædam, & à naturæ ſunt poteſtate penitus aliena. Quorundam uero iam tenes demonſtrationes ad te miſſas, quorundam in hoc libro contulimus, dignum exiſtimantes eſſe ut ea tibi explicaremus. Primum itaq; problematum erat, Sphæra data ſpacium inuenire quod ſuperficiei illius eſſet æquale. quod quidem quamprimū fuit declaratū ex libro quem de Sphæra confecimus. Nam cum ibi demōſtratum eſſet, ſuperficiem ſphæræ maximo in ea circulo quadruplam haberi, illico patuit ſpaciū inueniri poſſe ſuperficiei ſphæræ æquale. Secūdum autem, Cono ſeu cylindro dato ſphæram ipſi cono uel cylindro æqualem inueniri. Tertiū, Datam ſphæram ſic ſecare, ut eius portiones inter ſe propoſitam proportionem retineant. Quartū, Datam ſphæram ſic ſecare plano, ut portiones ſuperficiei ſphæræ ſeruent inter ſe datam proportionem. Quintum, Datā ſphæræ portionem alteri ſphæræ portioni datæ ſimilem reddere. Sextum, Duabus portionibus ſiue eiuſdem ſiue nō eiuſdem ſphęræ datis, tertiam ſphęræ portionem inuenire, quæ alteri portionū datarum ſit ſimilis, ſuperficiem uero ſuperficiei alterius portionis habeat æqualem. Septimum, A' data ſphæra portionem ea ratione abſcindere, ut abſciſa inde portio ad conum qui eadem baſe & eadem conſtat altitudine, cum portione quamcunq; datam proportionem habeat, quæ quidem proportio ea quam tria ad duo habent, proportione minime maior exiſtat. Horum igitur inuentorum omnium Hercules attulit demonſtrationes. Id autem quod poſt hæc erat ſeparatum, falſum exiſtit. Eſt autem huiuſmodi: Si ſphęra plano ſecetur in partes inæquales, maior portio habebit ad minorem eam proportionem duplicatam, quam maioris portionis ſuperficies ad minoris habet ſuperficiem. Cōſtat autem ex his quæ ad te miſſa ſunt, hoc falſum eſſe. Erat & itē hoc ſeparatum in illis. Si ſphęra in partes inæquales ſecetur, plano erecto ſuper una quacunq; ex his quæ ſunt in ſphæra diametro, maior portio ad minorem eam proportionem habebit, quam maior diametri portio ad minorem. Nam maior ſphæræ portio ad minorem habet proportionem minorem, quàm ſit ea quæ eſt ſuperficiei maioris ad ſuperficiem minoris duplicata proportio: maiorem uero, q̃ ſeſquialtera illius. Erat autem & ultimum problema ſeparatum, falſum: Quod ſi ſphæra alicuius diametro in partes inæquales ſcindatur, ita ut quadratum maioris partis quadrato minoris exiſtat triplum, & per punctum huius diuiſionis agatur planum erectum ſuper diametrum ipſam, figura tali ſpecie conſtans qualis eſt uidelicet ſphæræ portio, maxima eſt aliarū portionum omnium quæ habeant ſuperficiem ſibi æqualem. Quod autem hoc falſum ſit, ex his theorematibus manifeſtum eſt, quæ ad te prius miſſa ſunt. Nam demonſtratum eſt, dimidiam ſphæram eſſe omnium ſphæræ portionum maximam, quæ æquali inter ſe ſuperficie ſphærica contineantur. Poſthæc circa conum quoq; hæc problemata habentur: Si coni rectanguli ſectio diametro quieſcente circumferatur, ita ut diametros ſit axis, figura quæ à coni rectanguli ſectione complectitur, conoidale uocetur. Quod ſi figuram conoidalem planum contigerit, & alterum planum ducatur plano cōtin-

genti æquediſtans, quod aliquam conoidalem portionem abſcindat, huius portionis abſciſæ baſis appelletur planum abſcindens, uertex uero punctum illud in quo alterum planũ conoidale cõtingit. Quod ſi dicta figura plano ſecetur erecto ſuper axem, eius ſectionem conſtat circulũ fore. Quod aũt portio abſciſa ſeſquialtera erit coni baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem, hoc nos demonſtrare oportet. Item ſi conoidalis duæ portiones abſcindãtur planis utcunq; ductis, quod ſectiones inde prouenientes ſint coni acutianguli ſectiones cõſtat, ſi plana abſcindentia ſuper axem non fuerit erecta. Quod autem portiones habeãt inter ſe proportionẽ eam quam habent inter ſe poteſtate lineæ ductę à uerticibus earum æquediſtantes axi uſque ad plana abſcindentia, hoc reſtat demõſtrare. Horum enim ad te nondum ſunt miſſæ demonſtrationes. Poſt hæc uero circa ſpirales lineas hæc fuerãt propoſita. Eſt autem hoc ueluti aliud problematum genus, nihil cum prædictis communicans, de quibus tibi in hoc libro conſcripſimus demonſtrationes. Sunt autem huiuſmodi. Si recta linea in plano altero eius termino quieſcẽte circumferatur, donec ad locum redierit unde primo cœpit moueri, & ſimul cum hac circumducta linea punctum feratur, & ipſum ſibi ipſi æquali ſemper uelocitate moueatur ſecundum ipſam lineam motam, incipiatq; à termino lineæ quieſcente uerſus alterum ferri pũctum huiuſmodi ſpiralem lineam in plano deſcribet. Dico itaq; ſpacium à linea ſpirali, & à linea recta quæ circumducta fuit comprenſum, tertiam partem eſſe circuli eius qui centrum habeat punctum quieſcens, interuallum uero ſecundum eam lineæ motæ partem, quæ à puncto moto fuerit in una circumuolutione permeata. Et ſi lineam ſpiralem linea recta contigerit in puncto quod fuit in ſpirali ultimo productum, alia item linea recta à puncto circumductæ quieſcente ducatur ad ipſam circumductam, & in locum unde moueri ceperat regreſſa ſecundum angulos rectos quouſq; cum contingente concurrat: dico hanc lineam productam circumferentiæ circuli in prima circumuolutione producti eſſe æqualem. Item ſi linea circumducta, & punctum latum ſecundum illam pluribus circumuolutionibus circumferantur, & in locum unde moueri ceperãt multotiens reſtituantur: dico ſpacij illius quod in ſecunda circumuolutione fuerit à ſpirali linea comprẹhenſum, duplum illud exiſtet quod in tertia compræhendetur. Quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ſic deinceps ſemper ſpacia in poſterioribus circumuolutionibus concluſa, ſecundum conſequens augmentum numerorum multiplicia erunt, ad ſpacium in ſecunda reuolutione concluſum. Spacium uero in prima reuolutione contentum, ſexta pars exiſtet ſpacij in ſecunda reuolutione comprenſi. Item ſi in ſpirali linea duo puncta notentur, & ab eis iungantur lineæ rectæ ad terminum lineæ circumductæ quieſcentem, & duo circuli circumſcribantur centro quod ſit punctum quieſcens ſecundum interualla duarum linearum rectarum, quæ ad quieſcentem lineæ ſpiralis terminum ductæ fuerunt, & earum linearum minor extrà ducatur: dico ſpacium comprenſum à circumferentiæ maioris circuli parte illa quæ in eandem partem cum linea ſpirali fertur, mediaq; inter lineam ſpiralem & rectam lineam habeatur, & à linea recta extrà ducta, & à linea ſpirali ad ſpacium compræhenſum ſub minoris circuli ea circumferentiæ parte quæ inter eandem lineam ſpiralem & lineam rectam media exiſtit, & ſub linea quæ earũ terminos iungit, & ſub eadem linea ſpirali eam proportionem habet, quam linea ſemidiametros maioris circuli cum duabus tertijs illius exceſſus, quo ſemidiametrum minoris excedit, habet ad eam ſemidiametrum maioris cum una dicti exceſſus tertia parte. Iſtorum itaq; & aliorum circa ſpirales lineas ſunt à me in hoc demonſtrationes collatæ. Præmittuntur uerò ueluti in cæteris quæ geometrica diſciplina ſunt tractata, quædam, quæ ad illorum demonſtrationem ſunt perneceſſaria. Sumo autem in his quoq; ea quæ in alijs quos prius edidi libris ſumpta fuerunt,

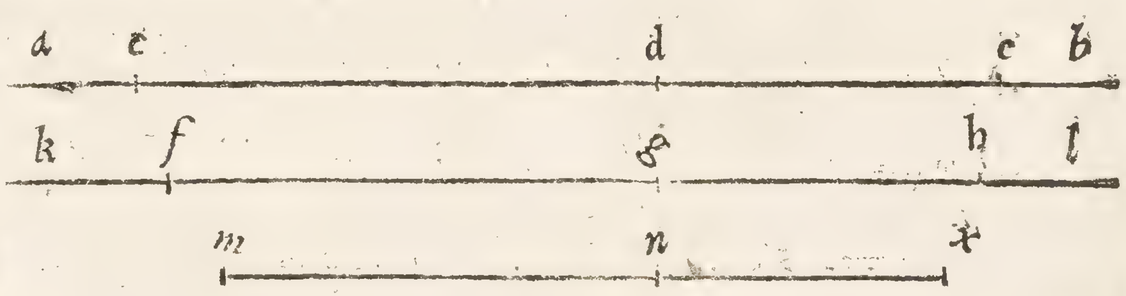
runt, uidelicet linearum inæqualium & ſpaciorum inæqualium exceſſus, quo maius excedit minus, illi adiectus fieri poteſt ut uincat omnem propoſitam quorumcunq; inter ſe relatorum proportionem.

SI ſecundum quampiam lineam punctum feratur, ipſum ſibi ipſi æque uelociter, & in latione illa duas lineas permeet, lineæ illæ eandē inter ſe proportionē habebunt, quam tempora habent quibus punctum lineas permeauit. Feratur itaq; quoddā pūctum ſecundū lineam a b, ęqueuelociter ſibiipſi. Et ſumanť in ea duę lineæ c d, d e. Eſto autem tēpus, in quo punctū permeauit lineā c d, eſto f g. in quo uero permeauit d e, eſto g h.



Oſtendendum eſt igitur, quod c d linea ad lineam d e eam habet proportionem, quam tempus f g ad tempus g h. Ex lineis itaq; c d, d e componātur lineæ a d, d b, ſecundum quamcunq; compoſitionem, ita ut a d excedat d b. & quotiēs c d linea ſumitur in a d, totiens tempus f g ſumatur in tempore l g: quotiens autem d e linea ſumitur in d b, totiens tempus g h ſumatur in g k. Quoniam itaq; ſupponitur pūctum æqueuelociter latum eſſe per lineam a b, manifeſtum eſt in quo tempore lineam c d permeauerit, in tanto quamcunq; ipſi c d æqualem permeaturum eſſe. quare palàm eſt, quod lineam a d compoſitam in tanto tempore permeabit, quantum eſt totum l g tempus, cum totiens ſumatur c d linea in linea a d, quotiens tempus f g in tempore l g, & eadem ratione in tanto tempore punctum permeabit lineam d b, quātum eſt g k tempus. Cum igitur a d linea ſit maior b d, manifeſtum eſt, quod in maiori tempore punctum permeabit lineam a d, quàm lineam b d. quare colligitur, tempus l g maius eſſe tempore g k. Similiter autem oſtendetur, ſi ex temporib. f g, g h componantur tempora, ſecūdum quamcūq; cōpoſitionem, eo pacto ut alterum excedat reliquum, quod compoſitæ ex c d, & d e lineæ ſecundum eandem compoſitionem altera alteram ſuperabit, eodem ordine ſumptæ cū temporibus. Conſtat igitur c d eādem ad d e habere proportionem, quam habet tempus f g ad ipſum tempus g h.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodq; ſibiipſi æqueuelociter, 2
ſumantur'que in utraq; linea duæ lineæ, primæ duæ in temporibus æqualibus à punctis permeatæ, & ſecundæ duæ in altera linea, ſumptæ lineę eandem inter ſe proportionem habebunt. Eſto per lineam a b punctum feratur, ipſum ſibijpſi æqueuelociter: & alterum item punctum per lineam k l. Sumantur aūt in a b duæ lineæ c d, d e. et in linea k l ſumanť f g, g h. in quo autem tempore punctum per a b latum lineam c d permeauerit, in tanto alterū pūctum per k l latum permeet f g.

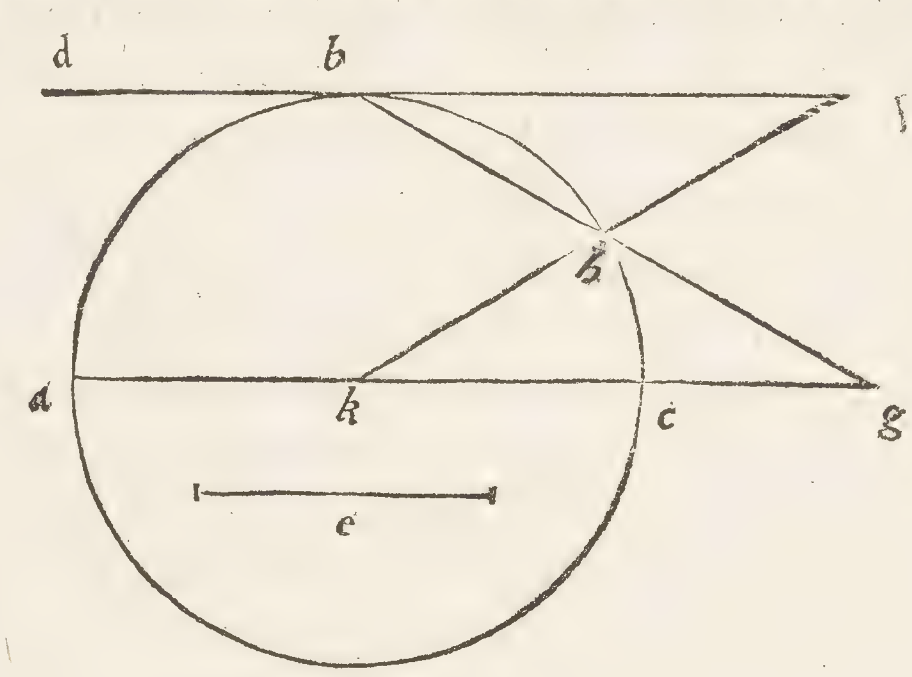


Similiter in tanto tempore punctum permeet lineam d e, in quanto alterum g h. Oſtendendum eſt, c d eādem habere ad d e proportionem, quam f g ad g h. Eſto itaq; tempus, in quo punctum lineam c d permeauit, m n. in hoc itaq; eodem tempore alterum punctum permeauit f g. Et item eſto tempus n x, in quo punctum permeauit lineam d e, & in hoc eodem alterum punctum permeauit lineam g h. Eandem itaq; proportionem habebit c d ad d e, quam tempus m n ad n x: & f g ad g h eam habet, quam tempus m n ad n x. Conſtat igitur, c d eādem habere ad d e proportionem, quam habet f g ad g h.

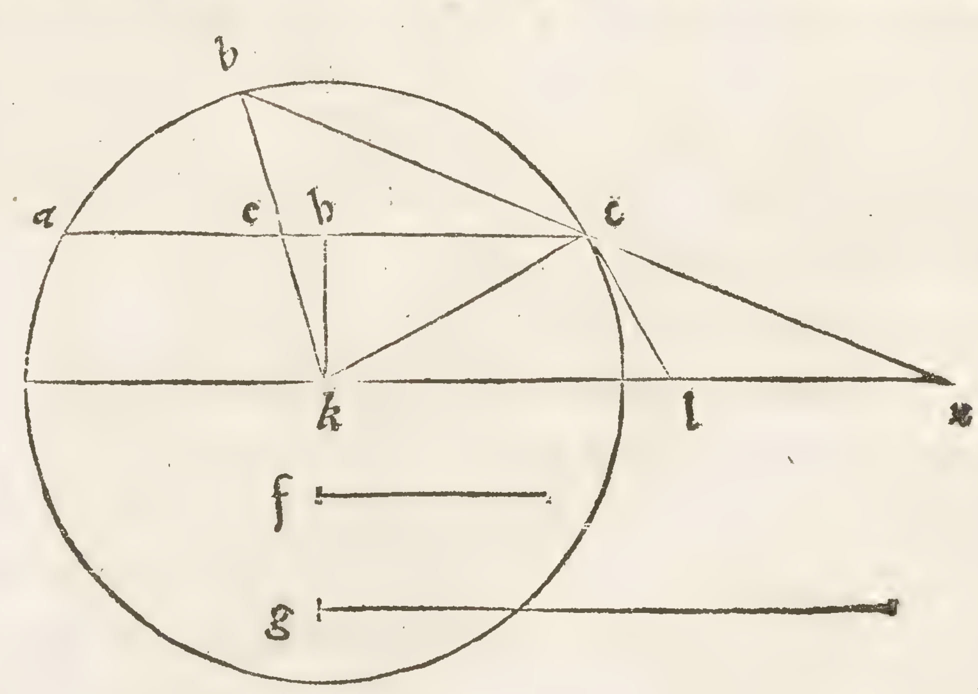
3 CIrculis quacunque multitudine datis inueniri quædam linea recta poteſt, quæ omnibus ſimul datorum circumferentijs maior exiſtat. Si enim unicuique circulorum figura multorum angulorum circumſcribatur, manifeſtum eſt, quod linea recta ex omnibus earum lateribus compoſita, omnibus ſimul circulorum circumferentijs maior exiſtat.

4 DVabus lineis inæqualibus datis, altera recta, altera circulari poteſt inueniri quædam recta linea, quæ maiore datarum linearum minor, & minore maior habeat. Si enim exceſſus quo recta ſuperat circularē, totiens ſibijpſi coaceruetur, donec maiorē rectã recta data cõficiat, deinde recta data in tot partes æquales diuidatur, quotiens exceſſus ſibijpſi fuerit coaceruatus, una ex partib. illis ipſo exceſſu minor exiſtet. Quod ſi circularis ſit maior recta, ſi ipſi rectæ una pars ꝙ minima adijciatur, conſtat hanc rectam ſic confectam, maiore linearū minorem, & minore maiorem haberi. nam quæ utrinq; adijcitur pars, aut detrahitur, exceſſu minor exiſtit.

5 CIrculo dato, & linea recta ipſum contingente, poteſt à cētro circuli linea quædam recta ad rectam contingentem hoc pacto duci, ut ea ipſius ductæ pars quæ inter cõtingentem & circuli circumferentiam intercipitur, ad ſemidiametrū circuli habeat minorem proportionem, quàm ea circumferentiæ pars quæ inter contactum & lineam ductam media exiſtit ad quamcunq; datam circumferentiæ partem. Eſto circulus datus a b c, cuius centrum ſit k, & recta linea d f cõtingat circulum in puncto b. detur etiã pars circumferentiæ, quæcunq; fuerit. Poteſt autem ea circumferentię parte data ſumi linea recta maior, ſitq; ea ſumpta e. Ducatur autem à centro k h linea a g ęquediſtans ipſi d f, & ponatur h g æqualis ipſi e, & tendens ad b à centro k ducta ad h educatur, donec concurrat cum contingente in puncto f. Eandem igitur habet proportionē h f ad h k, quàm b h ad h g. igitur f h ad h k minorem habet proportionem, quàm b h circumferentiæ pars ad datam circumferentiæ partem, quoniam b h linea recta eſt minor arcu b h, & linea h g maior eſt data circumferentiæ parte.

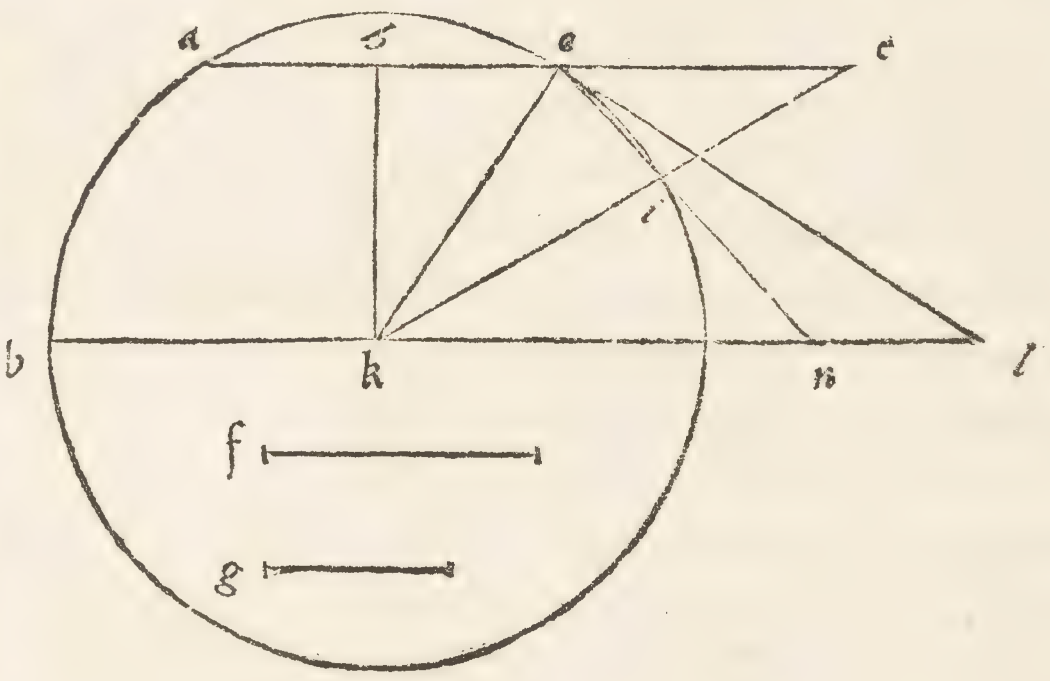


6 CIrculo dato, linea recta in eo deinde collocata, quæ quidem diametro minor exiſtat, poteſt à circuli centro linea recta ad circumferentiam duci, quę à linea in circulo collocata eo pacto ſecet, ut pars ipſius linęę ductæ, quę inter circumferentiam et lineã collocatã media deprehendit, ad lineã quæ iungit lineæ collocatæ & ductæ terminos in circumferentia cõſtitutos, habeat quamcunq; proportionē datam, dum tamē proportio illa minor exiſtat proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo collocatæ, ad lineam quæ à centro ſit ad collocal-



locatam perpendiculariter educta. Eſto datus circulus a b c, cuius centrum k, & in ipſo linea collocata recta a c minor diametro, & habeat f ad g minorem proportionem, quàm c h ad h k, quæ ſit à cẽtro k ad lineam a c perpendiculariter educta. Ducatur autem à centro linea æquediſtans ipſi a c, quę ſit k n: & educatur à puncto c ſecundũ angulos rectos linea c l uſque ad lineam k n. trianguli itaq; c h k, & c k l ſunt ſimiles. quare erit ſicut c h ad h k, ita c k ad c l. Igitur f ad g minorẽ proportionem habet, quàm c k ad c l. Quam itaq; proportionẽ habet f ad g, eam habeat c k ad maiorem ipſa c l, quæ ſit b n. Ponatur autem b n inter circumferentiam, & lineam collocatam per punctum c. Hoc enim ſic poteſt diuidi, ut pars intra circulum collocetur, pars extrà per punctum c adhæreat ipſi k n in puncto n, cum ipſa ſit maior c l. Eſto itaq; ſic diuiſa & collocata. demum ducatur k b linea ſecans lineam a c, primo collocatam in puncto e. Quoniam igitur k c ad b n eam proportionem habet, quam f ad g, habebit quoque e b ad b c, ſicut k c ad b n. igitur & ſicut f ad g. quare conſtat propoſitum.

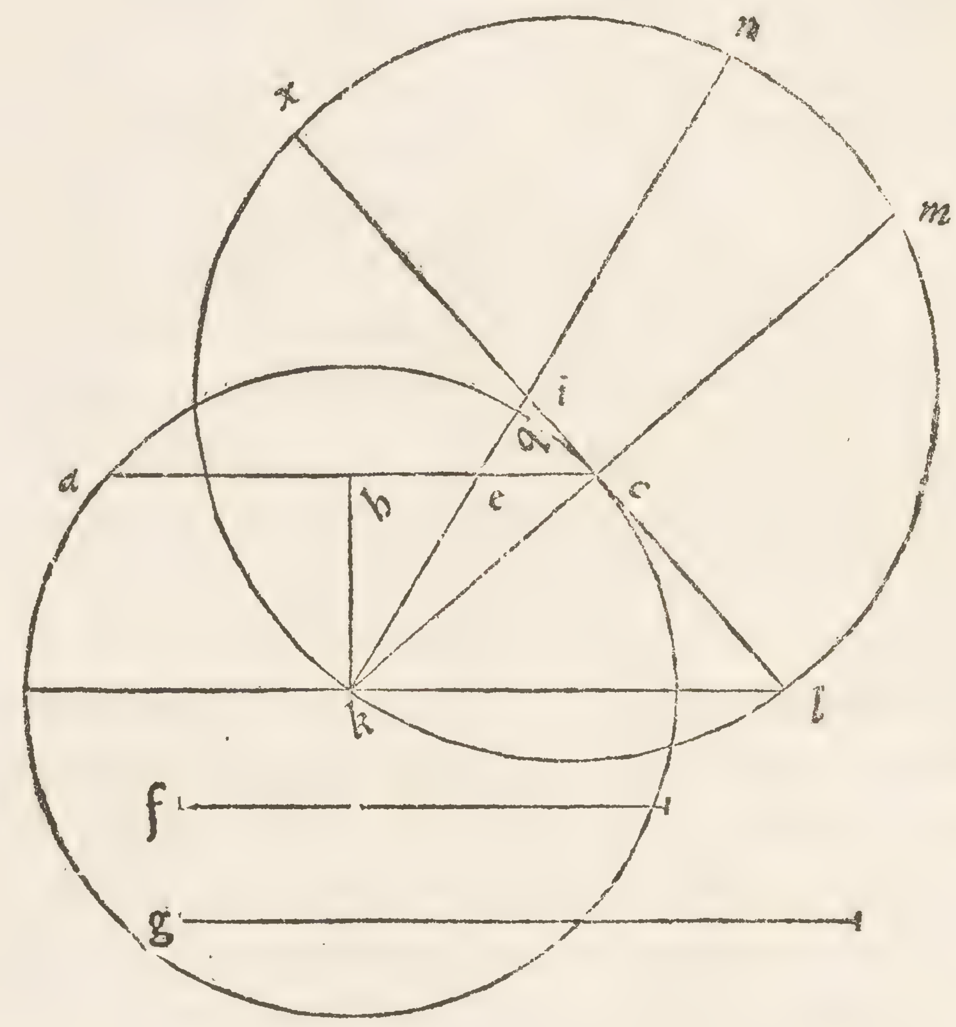
EIſdem quæ in præmiſſa ſunt poſita retentis, & linea quæ in circulo fuerit collocata, extra circulum educta, poteſt à centro ad eductam linea recta ſic extra circulum educi, ut pars eius quæ à circumferentia & ab educta extra circulum cõprælendatur, ad lineam iungentem lineæ principio eductæ, & à centro extra circulum ductæ terminos in circumferentia notatos habeat quamcunque proportionem propoſitam, dum tamen dicta proportio ſit ea proportione maior quam habet dimidia linea in circulo collocata, ad lineam quæ à centro ad ipſam collocatam ſit perpendiculariter educta. Retineantur itaque ea quæ in præmiſſa poſita ſunt, & linea in circulo collocata extra ducatur, & ſit proportio data, quam habet f ad g maior proportione, quam habet c h ad h k: erit quoq; maior ea quam habet k c, ad c l. Quam itaq; proportionem habet f ad g, eam habet k c ad minorem c l, quæ ſit i n tendẽs in c. Poteſt autem ſic diuidi, & cadet intra lineam c l, cũ ſit minor ipſa c l. Cũ igitur eandem habeat proportionem k c ad i n, quam f ad g, & ipſa e i ad i c eãdem habebit proportionẽ, quam f ad g. 7



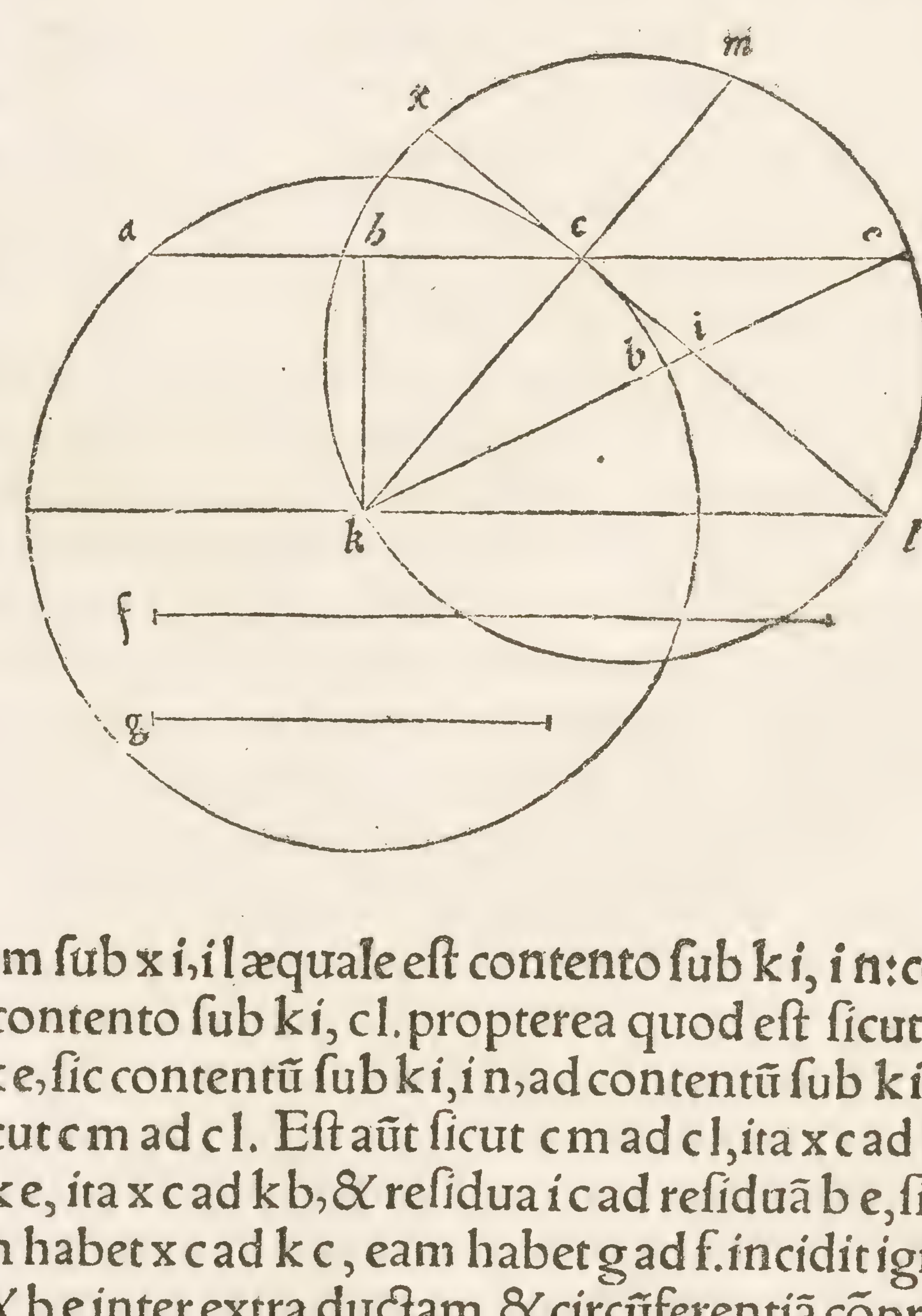
CIrculo dato, et in circulo linea quæ diametro minor ſit, altera item linea quæ circulum contingat in termino lineæ in circulo datæ: poteſt à centro circuli linea recta ad lineã rectam educi, & ita in directum per lineæ in circulo datę ſectionem ad circumferentiam protrahi, ita ut pars ipſius inter lineam rectam & circũferentiam deprehenſa, ad partem illam lineæ contingentis quæ intra lineam ipſam à centro ductam, & punctũ contactus concludetur, habeat quamcunq; proportionem datam, dũ tamen dicta proportio minor fuerit ea proportione, quam dimidia lineæ in circulo datæ habet ad lineam quæ à centro ſit ad ipſam in circulo datam perpendiculariter educta. Eſto circulus datus a b c d, eius centrum k, & linea recta ſit in circulo data a c minor diametro, & x l contingat circulum in puncto c. & proportio quam habet f ad g, ſit minor ea quam habet c h ad h k. Erit quoq; minor ea quam habet c k ad c l, ſi k l ſit æquediſtanter ducta ipſi h c. habeat itaq; k c ad c x, eam quam habet f ad g proportionem. quare c x erit maior c l. Deſcribatur circulus circa puncta k x l. Quoniam igitur x c maior eſt ipſa c l, & ſunt ambæ ad angulos rectos lineæ k c m, poteſt duci linea i n æqualis lineę c m,

quæ

quæ tendat ad k. Igitur id quod continetur ſub x i, i l ad contentum ſub k e, i l, eã habet proportionem, quam x i ad k e. & contentum ſub k i, i n ad contentum ſub k i, c l, ſicut i n ad c l, & ſicut x i ad k e, & ſicut c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b. Et ſicut x i ad k e, et ſicut reſidua i c ad reſiduam b e eandem habebit proportionẽ, quã x c ad k c, & quam g ad f. Incidit autem k n in contingẽtem, & pars eius quæ inter circumferentiam & rectam a c capitur, uidelicet b e, ad partem cõtingentis inter k n, & cõtactum, deprenſam eam habet proportionem, quam f ad g.

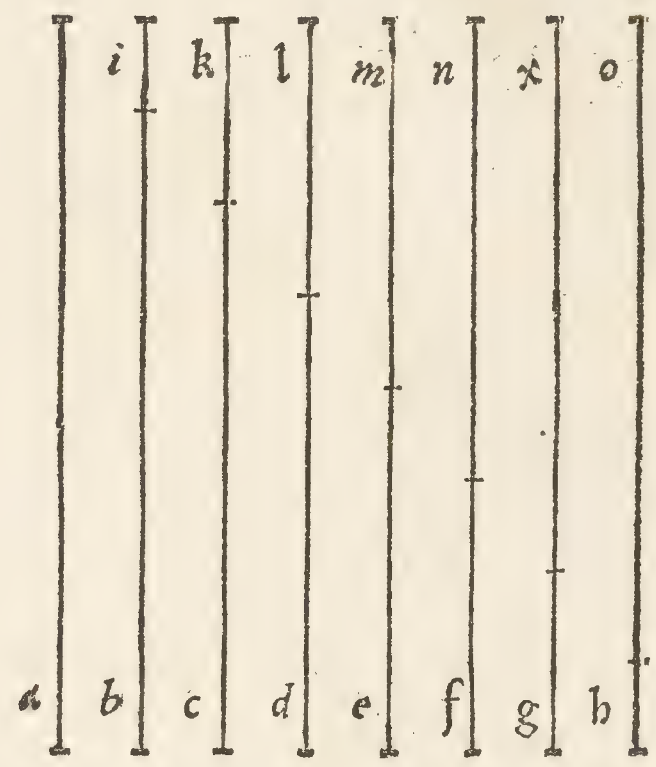


9 EIſdẽ quæ ſupra poſita ſunt retentis, & linea quæ in circulo datur extra circulum ducta, poteſt à cẽtro circuli ad ipſam extra ductã linea quædã recta ſic duci, ut pars ipſius quæ inter circumferentiam & lineam extra ductam compræhenditur, ad partem lineæ contingentis quæ inter contactum & ipſam à centro ductam intercipitur, habeat quãcunq; datam proportionem: dum tamen proportio ſit ea proportione maior, quã habet dimidia lineæ in circulo datæ, ad lineam quæ à centro ſit ad ipſam perpendiculariter ducta. Eſto datus circulus a b c d, & recta in circulo data minor diametro ſit a c, quæ extra circulum ducatur per punctum c. & altera linea x c contingat circulum in puncto c: & proportio f ad g ſit maior proportione c h ad h k. erit quoque maior proportione k c ad c l. Habeat igitur k c ad c x eã quam habet f ad g: ergo c x minor eſt ipſa c l. Rurſus deſcribatur circulus trãſiens per puncta x k l. cum igitur x c ſit minor ipſa c l, & ambæ altera alteri ad angulos rectos inſiſtũt, x c, & k m: poteſt i n poni æqualis ipſi c m, quæ tendat in punctum k. Cum itaque cõtentum ſub x i, i l æquale eſt contento ſub k i, i n: contentum uero ſub l i, k e, eſt æquale contento ſub k i, c l, propterea quod eſt ſicut k e ad i k, ita l c ad l i. Sicut ergo x i ad k e, ſic contentũ ſub k i, i n, ad contentũ ſub k i, c l, hoc eſt ſicut n i ad c l, hoc idẽ eſt ſicut c m ad c l. Eſt aũt ſicut c m ad c l, ita x c ad k c, hoc eſt ad k b. Eſt igĩt ſicut x i ad k e, ita x c ad k b, & reſidua i c ad reſiduã b e, ſicut x c ad k c. Quam aũt proportionem habet x c ad k c, eam habet g ad f. incidit igitur k e in lineam extra circulũ ductã, & b e inter extra ductam & circũferentiã cõprenſa ad c i, inter cõtactũ & ipſam k e interceptã eam habet, quã f ad g proportionem.



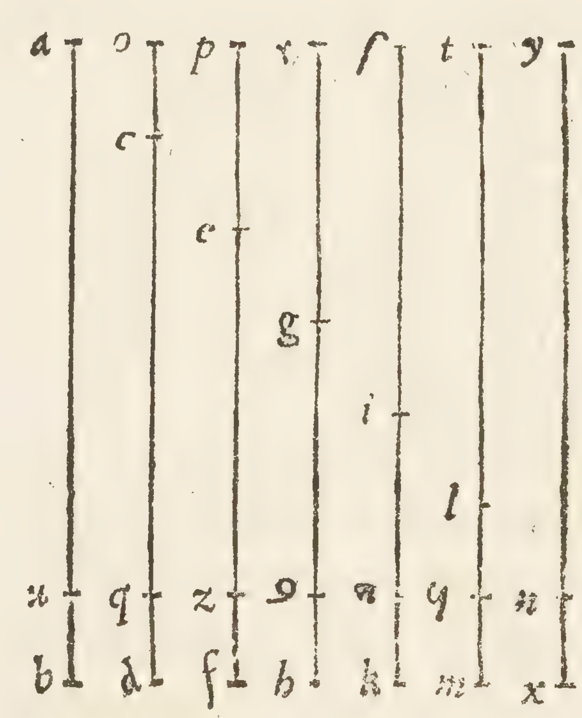
Si

SI lineæ quotcunq; numero conſequenter diſponantur, quæ ſeſe æqualiter excedant, ſitq; exceſſus breuiſſimæ illarum ęqualis: item aliæ ſumantur lineæ numero prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis longiſſimæ: illarũ quadrata omnium quæ ſunt æquales lõgiſſimæ, & quadratum longiſſimæ, & cõtentum ſub breuiſſima & linea æquali, omnibus ſimul æqualiter ſeſe excedentibus: hęc omnia ſimul ſumpta tripla erunt, ad quadrata linearum ſeſe æqualiter excedentium ſimul ſumpta. 10 Sunto itaq; quotuſq; lineæ continenter poſitæ, quæ ſeſe æqualiter excedant, a b c d e f g h. Sit aũt h æqualis exceſſui: adijciatur uero ipſi b, linea i, æqualis ipſi h. ipſi quoq; c addatur k, æqualis ipſi g. ipſi d addatur l, æqualis f. ipſi e apponatur m, æqualis ipſi e. ipſi f addatur n, æqualis d. ipſi g addatur x, æqualis c. ipſi demum h addatur o, æqualis b. Hæ igitur quæ confectæ ſunt, erunt inter ſe æquales, & longiſſimæ prædictarum. Eſt igitur oſtendẽdum, quod quadrata iſtarum omnium ſimul cum quadrato ipſius a, & eo quod continetur ſub h, & ſub æquali omnibus ſimul a b c d e f g h, tripla ſunt ad quadrata ſimul omnium a b c d e f g h. Eſt itaq; quadratum b i æquale duobus quadratis b, & i, & duobus his quæ fiunt ex b in i. Quadratum uero k c eſt ęquale quadratis k & c, & duobus his quæ continentur ſub c k. Similiter quadrata reliquarum quæ ſunt æquales ipſi a, erũt æqualia quadratis partium ſuarum, & duobus his quæ ſub earum partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, ſimul cũ quadrato a, dupla ſunt ad quadrata a b c d e f g h. Reliquum oſtendemus, quod dupla eorum quæ ſub partibus uniuſcuiuſq; lineę æqualis a continentur, ſimul ſumpta cum contento ſub h, & linea æquali omnib. ſimul a b c d e f g h, ſunt æqualia quadratis a b c d e f g h. Quoniam itaq; duo quæ ſub i & b continentur, æquantur duobus cõtentis ſub h & b: duo autem quæ ſub k & c, æquantur contento ſub h, et quadrupla c, quia k eſt dupla ipſius h. Duo uero contenta ſub l d, æquantur contento ſub h, & ſexcuplo ipſius d, quia l eſt tripla ipſius h. Similiter & alia dupla eorum, quæ ſub partibus continentur, æquantur contento ſub h & multiplici cuiuſcunq; ſecundum numeros pares continenter lineæ ſequenti multiplices. Omnia igitur ſimul ſumpta cum eo quod continetur ſub h, & ſub æquali omnibus a b c d e f g h, ęquabuntur cõtento ſub h, & ſub æquali omnibus: ipſi a, & triplo ipſius b, quincuplo c, & ſemper impari ſecũdum numeros impares continenter multiplices lineæ ſequentis. Quadrata quoq; ipſarum a b c d e f g h, æqualia ſunt ei quod continetur ſub eiſdem lineis. nam quadratum ipſius a eſt æquale contento ſub h, & ſub æquali reliquis illis quarũ unaquæque æquatur ipſi a. æque multipliciter enim h menſurat ipſam a, ſicut a menſurat omnis ſibi æquales ſimul ſumptas. quare quadratum ipſius a, eſt æquale contento ſub h, & omnibus ſimul æqualib. ipſi a, & duplo ipſarum b c d f g h. nam illæ quæ ſunt ęquales ipſi a, omnes excepta a, duplæ ſunt ad b c d e f g h. Similiter quadratum b æquat̃ cõtento ſub h, & ſub linea æquali ipſi b, & dupla ipſis c d e f g h. Et item quadratum c æquatur contento ſub h, & ſub æquali ipſi c, & dupla ipſarũ d e f g h. Similiter aliarum quadrata æquabuntur contentis ſub h, & ſub æquali unicuique, & dupla reliquarum. quare conſtat quadrata omnium æqualia eſſe ei quod continetur ſub h, & ſub æquali omnibus, & ipſi a, & tripla b, & quincupla c, & ſecundum numeros continenter impares multiplici ſequentis lineæ. Ex hoc



igitur manifeſtum eſt, quadrata ſimul omnia linearum ęqualium, longiſſimę quadratis ſimul omnibus linearum ſeſe æqualiter excedentium minus quàm tripla eſſe, cum aſſumptis quibuſdam tripla efficiantur illis. Reliquis uero, dempto longiſſimæ quadrato, plus quàm tripla inueniũtur, cum aſſumpta ſint minus quàm tripla ad quadratum longiſſimæ. Et ſi ſimili forma deſcribãtur ab omnibus, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ ſunt æquales longiſſimę earũ quidem quæ ſunt ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt formarum, minus quàm tripla exiſtent. Reliquarum uero, dempta ea quæ à longiſſima fiet, plus quam tripla. nã ſimilia ſpecie eandem habebunt inter ſe proportionem, quàm quadrata habent.

11 SI lineæ quotcunq; numero conſequenter diſponãtur, quæ ſeſe æqualiter excedant, & aliæ item lineæ ſumãtur, quæ quidem dictis lineis ſint multitudine una linea pauciores, magnitudine uero unaquæq; æqualis lõgiſſimæ: harũ æqualium quadrata ſimul omnia, ad quadrata linearũ ſeſe æqualiter excedentiũ, dempta illarum breuiſſima, maiorem habẽt proportionem quàm quadratum longiſſimæ ad id quod eſt æquale utriſq; ſimul, ei quod ſub longiſſima breuiſſimaq; cõtinetur, & tertiæ parti quadrati lineæ illius qua longiſſima excedit breuiſſimã. ad quadrata uero linearũ ſeſe æqualiter excedentiũ, dempto lõgiſſimæ quadrato, habent maiorẽ proportionẽ, quàm ſit ſuperius dicta proportio. Eſto itaq; quotcunq; numero lineæ ſeſe æqualiter excedẽtes deinceps poſitæ a b, excedẽs c d, & c d, e f, & e f, g h, & g h, i k, et i k, l m, & l m, n x. Addatur uero ipſi c d quedã c o ęqualis uni exceſſui, & ipſi e f æqualis duob. e p, ipſi uero g h æqualis tribus g r, & alijs eodem modo erũt. itaq; quæ inde ſunt effectæ inter ſe æquales, & etiam ipſi lõgiſſimæ unaquęq; ęqualis. Oſtendendũ itaq; eſt, quadrata ſimul harum omnia, ad quadrata ſimul omnia earũ quæ ſeſe ęqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habẽt proportionem, quàm quadratum a b ad id quod ęquatur utriſq; ſimul, ei quod continetur ſub a b, n x, & tertiæ parti quadrati n y. ad quadrata uero earũdem dempto quadrato ipſius a b, maiorẽ proportione dicta habent proportionem.



Adimatur unicuiq; earum, quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualis exceſſus. quam itaq; proportionem habet quadratum a b ad utraq; ſimul, ad cõtentũ ſub a b, u b, & ad tertiã partem quadrati a u, hanc habet quadratum o d ad contentum ſub o d, d q, & tertiam partem quadrati o q. & quadratum p f ad contentum ſub p f, z f, & tertiam partem quadrati p z, & quadrata reliquarum ad ſpacia ſimiliter ſumpta. Et omnia harum omnium o d, p f, r h, s k, t m, y x: ad omnia contenta ſub n x, & æquali omnibus ſimul dictis lineis, & tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t ς, y n. eandem habebunt proportionem, quam quadratum a b ad utraq; ſimul, ad contentum ſub a b, u b, & tertiam partem quadrati a u. Si igitur oſtendatur contentum ſub n x, & ſub æquali omnibus ſimul his o d, p f, r h, ſ k, t m, y x, et tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t ς, y n, quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m eſſe minora: quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x maiora eſſe: propoſitum oſtenſum erit. Illud igitur quod ſub n x, et ſub ęquali omnibus ſimul o d, p f, r h, ſ k, t m, y x, & tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t ς, y n æquantur quadratis harũ q d, z f, 9 h, π k, ς m, n x, & contento ſub n x, & ſub ęquali omnibus ſimul o q, p z, r 9, ſ π, t ς, y n, & tertijs partibus quadratorum prædictorum. Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m, æquantur quadratis harum b u, q d, z f, 9 h, π k, ς m, & contento ſub b u; & dupla iſtarum ſimul a u, c q, e z, g 9, i π, l ς, cum quadratis prædictarum li-

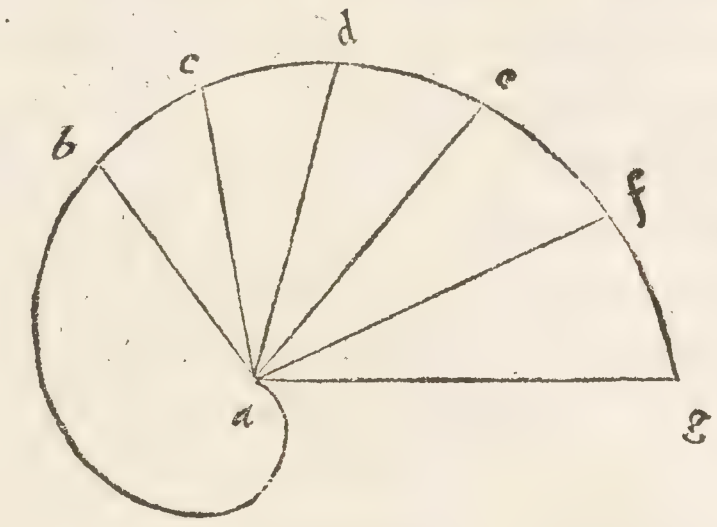
linearum. Communia itaq; ſunt utrinq; quadrata lineæ æqualis ipſi n x. Contentum autem ſub n x, & ſub æquali ſimul iſtis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n minus eſt contento ſub b u, & dupla iſtarum ſimul a u, c q, e z, g 9, i π, l s. quia lineæ nuper dictę ſunt æquales iſtis c o, e p, g r, i ſ, l t, n y. reſiduis uero ſunt maiores. Et quadrata iſtarum a u, c q, e z, g 9, i π, l s, maiora ſunt tertia parte quadratorum linearũ o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n. hoc enim oſtenſum fuit ſupra. Spacia igitur prædicta minora erunt quadratis iſtarum a b, c d, e f, g, i k, l m. Reliquum igitur oſtendemus, quod ſunt maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n y. Rurſus itaque quadrata iſtarum c d, e f, g h, i k, l m, n x, æquantur quadratis q c, e z, g 9, i π, l s, & quadratis d q, f z, h 9, k π, m s, n x, & contento ſub n x, & ſub dupla harum ſimul omnium c q, e z, g 9, i π, l s, & ſunt cõmunia quadrata q d, z f, 9 h, π k, s m, n x. Maius aũt eſt contentũ ſub n x, & ſub æquali omnibus ſimul iſtis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n, contento ſub n x, & ſub dupla iſtarum ſimul omnium c q, e z, g 9, i π, l s. Sunt autem quadrata q o, z p, 9 r, π ſ, t s, y n, quadratis c q, e z, g 9, i π, l s, plus quàm tripla. Oſtenſum enim eſt iſtud. Sunt igitur dicta ſpacia maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Quare conſtat propoſitum.

Si ſpacia quoque forma ſimilia deſcribantur ab omnibus, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ ſunt æquales longiſſimæ: illarum formæ omnium, quæ ab his quæ ſunt æquales longiſſimæ producentur, minorem proportionem habebunt ad formas ſimul omnis, quæ producentur à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempta breuiſſimæ forma, quàm quadratum lõgiſſimæ ad utraque ſimul, & contentum ſub longiſſima & breuiſſima, & ad tertiam partem quadrati lineæ illius qua longiſſima breuiſſimã excedit. ad formas autem eaſdem, dẽpta longiſſimæ forma, proportionem habebunt dicta proportione maiorem. Similes enim ſpaciorum formæ eandem habebunt, quam quadrata habuerunt, proportionem. *Corollariũ præmiſſæ.*

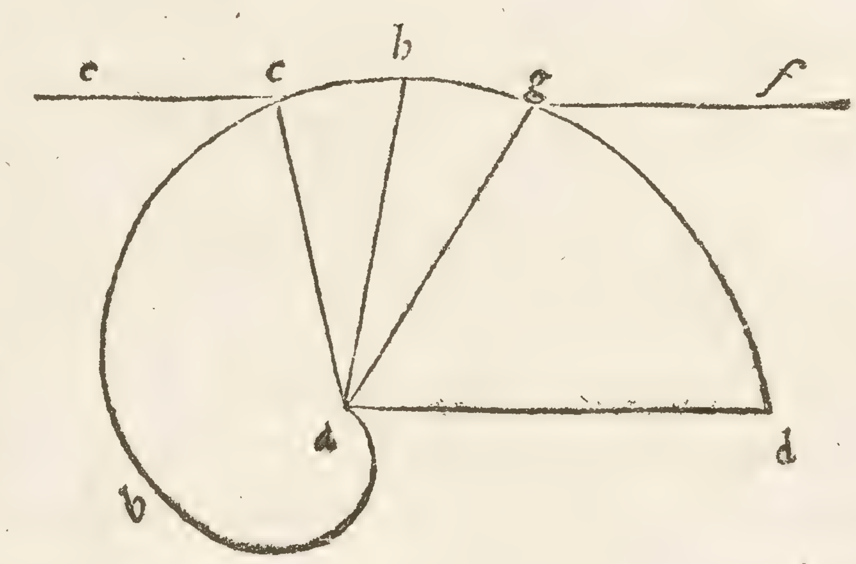
Si linea recta in plano ſit ducta, & quieſcente altero eius termino æquali uelocitate circumferatur, donec reſtituatur in eum locum unde moueri cœperat: & ſimul cum linea circumlata pũctum feratur æquali uelocitate ipſum ſibiipſi, & per ſe ſecundum dictam lineam latum, incipiens à termino quieſcente: punctum hoc deſcribit in plano lineã ſpiralem. Terminus itaq; lineæ ſic motę quieſcẽs, uocetur initiũ lineæ ſpiralis. Poſitio autem lineæ, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis. Linea uero recta quam punctum latum in prima reuolutione permeauerit, prima uocetur: & ea quam dictum punctum in ſecunda reuolutione permeauerit, ſecunda: & reliquæ ſimiliter pari ordine cum reuolutionibus nominentur. Spacium autem compræhenſum à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à linea recta quæ prima exiſtit, primum uocetur. Compræhenſum uero à linea ſpirali in ſecunda reuolutione deſcripta, & à linea ſecũda, uocetur ſecundum: & reliqua deinceps hoc ordine nominentur. Item ſi à puncto quod eſt initium lineæ ſpiralis, ducatur linea recta, huius lineæ ea pars quæ exiſtit, ubi circumuolutio producitur, pręcedens uocetur. quæ uero in alterã partem, ſequens. Circulus quoq; deſcriptus circa punctũ, quod eſt initium lineæ ſpiralis ſecũdum interuallum lineæ quæ prima uocatur, primus & ipſe dicatur. Deſcriptus uero circa idem centrum, ſecundum interuallum lineæ duplæ priori, ſecundus dicatur: & reliqui deinceps eodem modo. *Diffinitiones.* *Non dicit propter cõſtitutionem, ſed differentiam poſitionis.*

SI ad ſpiralem lineam in una circumuolutione deſcriptam, quæcunq; fuerit illa circũuolutio, ab initio ſpiralis lineæ ducantur quotcunq; lineæ rectæ, quæ inter ſe angulos æquales efficiãt, ipſæ ſeſe æqualiter excedent. Eſto ſpiralis linea, ad quam a b, a c, a d, a e, a f lineæ rectæ ſint ductæ, quæ angulos inter ſe æquales faciant. Oſtendendum eſt, quod a b æqualiter exceditur ab a c, & a c ab a d, & reliquæ ſimiliter. In quo enim tempore linea circumuoluta ex a b proceſſit ad a c, in 12

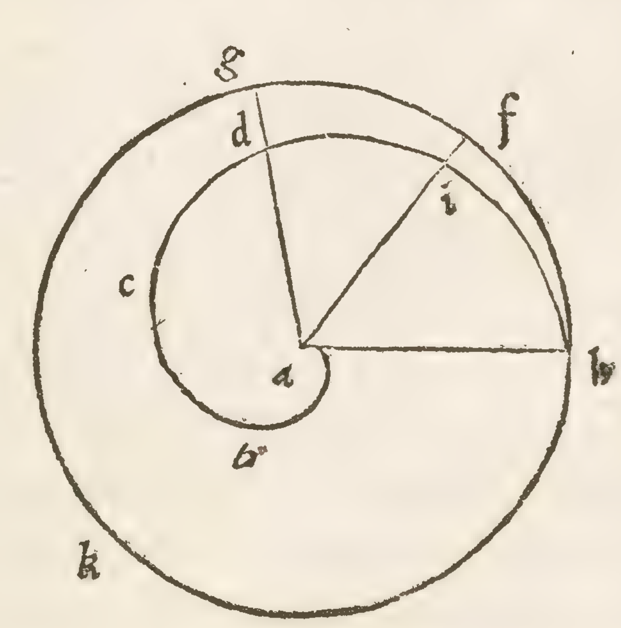
eodem punctum ſecundũ lineam rectam latum exceſſum permeauit, quo e a excedit a b. in quo uero ex a c in a d, in eadem permeauit exceſſum quo a d ſuperat ipſam a c. in tempore uero æquali linea circumuoluta ex a b in a c procedit, & ex a c in a d, cũ anguli ſint æquales. In tempore igitur æquali punctum ſecundũ lineam rectam latum permeat exceſſum, quo a c excedit a b, & exceſſũ quo a d excedit a c. æquali ergo exceſſu a c ſuperat ipſam a b, & a d ipſam a c. & reliquæ ſimiliter iſtis oſtendentur.



13 SI linea recta contingat lineam ſpiralem, in uno ſolum puncto eam continget. Eſto ſpiralis linea, in qua a b c d: eſto eius initium a punctum: initium uero circumductionis, ſit a d linea recta. Et cõtingat lineam ſpiralem linea e f. Dico quod in uno ſolo pũcto eam contingit. quod ſi fieri poteſt, contingat eam in duobus punctis g c, & iungantur a c, a g, & angulus contentus ſub c a, a g in duo ęqua diuidatur. punctum autem in quo linea diuidens dictum angulum incidit in lineam ſpiralem, ſit h. Aequaliter itaque a g excedit a h, & a h ipſam a c, cum æquales angulos inter ſe cõtineãt. quare a g, a c ſunt ſimul ad a h duplæ. Sed eius lineæ quæ diuidit angulum c a g, in duo æqua, ſunt lineæ a c, a g plus quàm duplæ. Manifeſtum igitur, quod punctum in quo a h incidit in lineam c g, eſt inter punctum a, & pũctum h in linea a h. Igitur e f ſecabit lineam ſpiralem, cũ aliquod punctum in c g linea collocatum ſit intra lineam ſpiralem. Suppoſitum uero fuerat, quod eam contingeret. In uno igitur puncto e f continget lineam ſpiralem.

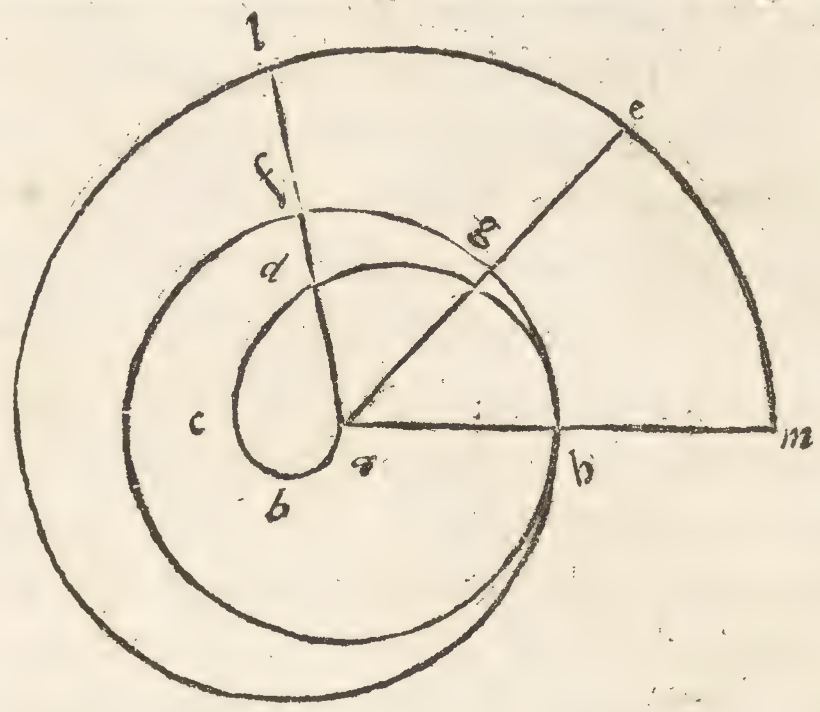


14 SI ad lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam incidant duæ lineæ rectæ, à puncto quod eſt lineę ſpiralis initium actæ: deinde extra producantur, uſque ad circuli primi circumferentiam, eandem habebunt proportionem inter ſe illæ quæ in lineam ſpiralem inciderunt, quam partes circumferẽtiæ circuli, quæ inter terminum lineæ ſpiralis, & extrema linearum quæ ad circumferentiam productæ fuerunt, ſumendo partes circumferentiæ ab termino lineæ ſpiralis ſecundum circumuolutionem. Eſto linea ſpiralis a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, initium eius eſto punctum a: et initium reuolutionis eſto linea a h recta. & circulus h k g, eſto primus. incidant itaq; à puncto a duæ rectæ a e, a d lineæ, ad lineam ſpiralem: & producantur ad circumferentiam circuli, quam attingant in punctis f g. Oſtendendum eſt, quod a e habet ad ipſam a d eam proportionem, quam h k f circumferentiæ pars, ad h k g partem. In circumductu enim lineæ a h manifeſtum eſt, pũctum h permeaſſe circumferentiã h k g æqua uelocitate, qua punctũ a per lineam rectam latũ permeauit lineã a d: & item punctum h per circumferentiam latum æquo tempore permeauit h k f cir-



circumferentiam, quo punctum a lineam a c rectam. Manifeſtum eſt igitur, quod a e eandem ad ipſam a d habebit proportionem, quam h k f circũferentia ad h k g circumferentiã. Hoc aũt ſuperius eſt oſtenſum. Similiter uero demonſtrabitur, ſi altera incidentiũ linearũ in terminũ lineæ ſpiralis inciderit. nam idem continget.

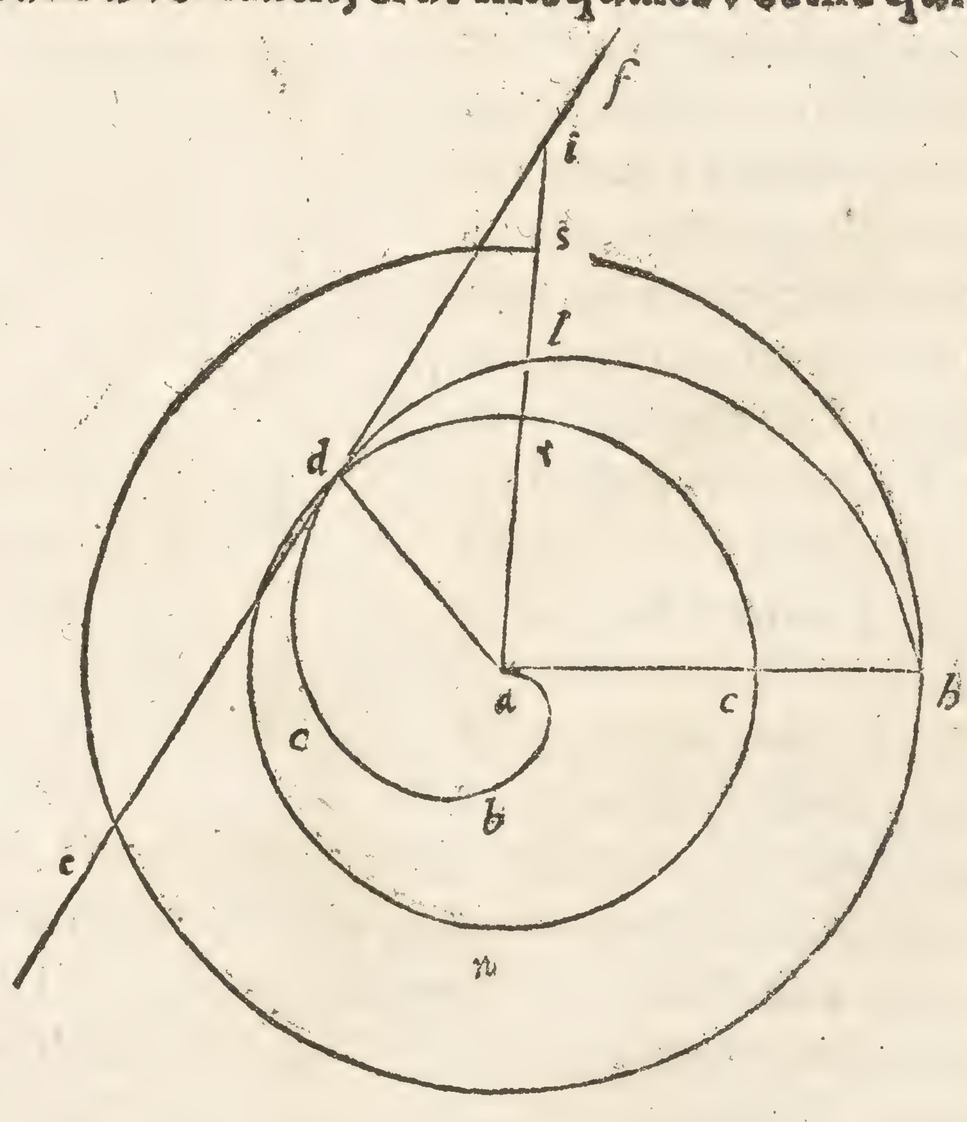
SI in lineã ſpiralem in ſecũda reuolutione deſcriptã, incidãt rectæ ab initio ſpi- 15
ralis lineæ eductæ, eandem habebunt inter ſe lineæ rectę proportionẽ, quã dictæ circumferentiæ ſimul cũ tota circũferentia circuli ſumptæ. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d h, quę ſit in prima reuolutione deſcripta. itẽ h l m, in ſecũda. & incidant in eam duæ rectæ a e, a l. Oſtendendũ eſt quod eandem habet a l ad a e proportionẽ, quã h k f circũferẽtia ſimul cũ tota circuli circũferentia ad h k g, cũ tota circuli circumferẽtia. In quãto enim tẽpore pũctum a per lineã rectã latũ permeat a l lineã, et h punctũ in eodẽ per circũferẽtiam latũ totã circuli circũferẽtiam permeat, et iuſuper h k f. Et item dum a punctũ permeat a e, et h punctũ permeat totã circũferẽtiam, & inſuper h k g, cũ utrũq; punctũ æque uelociter ſibi ipſi ferat.



Manifeſtũ eſt igitur, quod eãdem habebit a l ad a e proportionẽ, quã h k f cũ tota circuli circũferentia, ad h k g circũferẽtiam, cũ tota eadẽ circuli circũferentia. Eodẽ aũt modo oſtendet, & ſi in lineã ſpiralem in tertia reuolutione deſcriptã lineæ rectæ inciderint, eãdem habebũt inter ſe proportionem, quã dictæ circũferentiæ cũ tota circuli circũferentia bis ſumpta utriſq;. Similiter aũt & quæ in alias lineas ſpirales inciderint, oſtendenẽ quod eandẽ habeant proportionẽ, quã dictæ circũferentiæ cum tota circumferẽtia circuli, ſecundũ numerũ uno minorẽ, q̃ ſint reuolutiones. et utraq; linea incidẽs in terminos ipſius lineę ſpiralis inciderit, idẽ eueniet.

SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam recta linea contingat, & à 16
puncto contactus ducatur linea recta ad punctum quod eſt principium lineę ſpiralis: anguli, quos contingens cum ducta facit, erũt inæquales; & ille quidem qui fuerit in præcedentiũ parte, obtuſus exiſtet: qui uero in parte ſequentium, erit acutus.

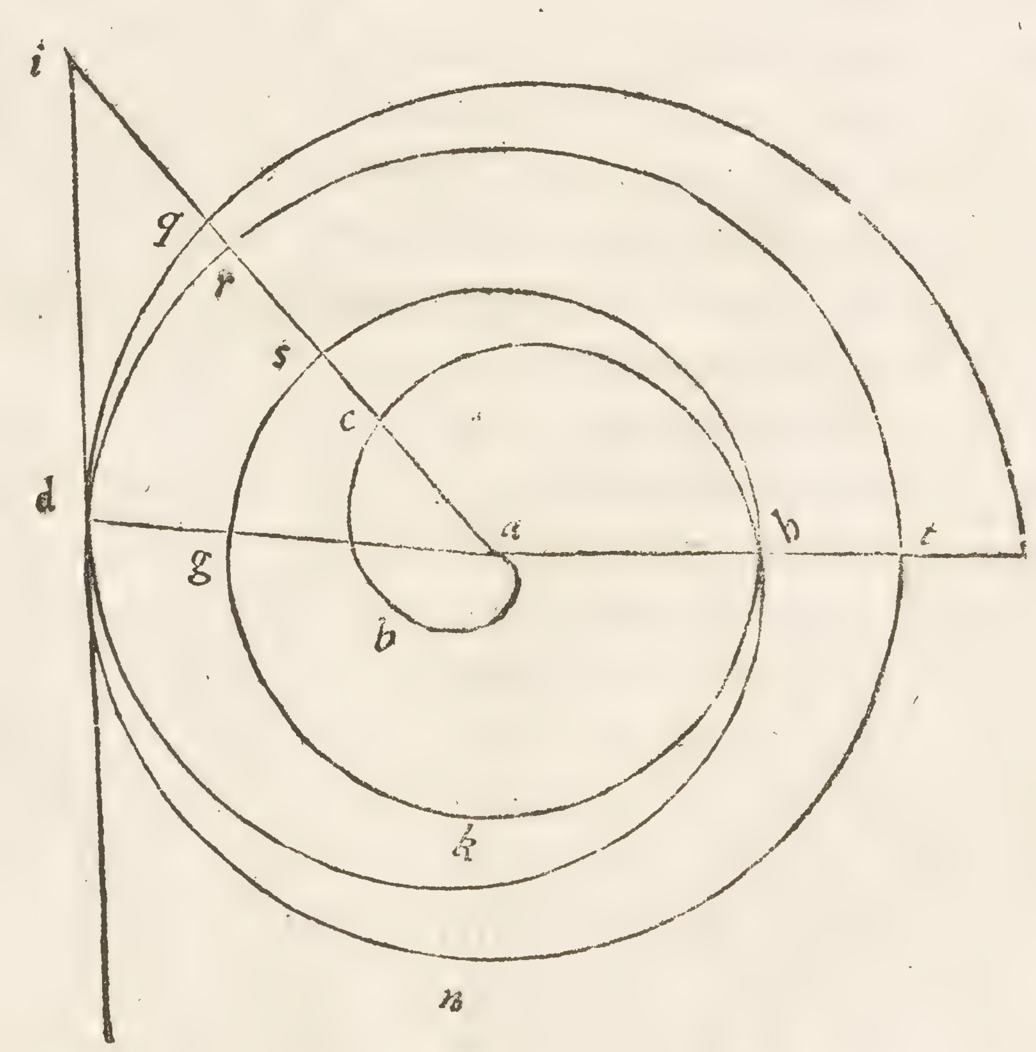
Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d h in prima reuolutione deſcripta. & eſto a punctum, principium lineæ ſpiralis. Linea uero recta a h ſit initiũ reuolutionis. Sit primus circulus h g k. Contingat autem aliqua recta linea ſpiralem lineam, quæ ſit e d f, in puncto d, & ab ipſo d ducatur ad a linea d a. Oſtendẽdum eſt, quod d f cum d a obtuſum angulum facit. Deſcribatur d t n circulus, poſito a cẽtro ſecundum interuallum ipſius d a. Neceſſe eſt itaq; eam huius



circuli circumferentiam, quæ eſt in parte præcedentium, infra lineam ſpiralem ca-

dere. quæ uero in parte, ſequentium extra. Quia linea recta ab a ad lineam ſpiralem in parte præcedentium ducta, eſt maior a d linea. quæ uero ab ipſo a in parte ſequentium ducta fuerit, ipſa a d minor exiſtet. Quod autem angulus contentus ſub a d f, non ſit acutus, patet, cum ſit maior angulo ſemicirculi. Quod autē non ſit rectus, eſt ſic oſtendēdum. Eſto ſi fieri poteſt, ſit rectus. Igitur e d f contingit circulum d t n. Iam poteſt ab a puncto duci linea recta ad cōtingentem, ut eius pars quæ inter circumferentiam & contingentem deprehenditur, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm habeat circumferentia inter contactum & lineam ductam deprȩhenſa, ad circumferētiam datam. Ducatur itaq;, ut dictū eſt, a t. Secat autem ipſa lineam ſpiralem, eſto in puncto l, & circumferentia circuli d t n in puncto r. & linea a r i recta, ad lineam a r minorem habeat proportionē, quàm d r ad d t n circumferentiam. Tota igitur a i ad a r minorem habet proportionem, quàm r d n t circumferentia, ad d n t circumferentiam: hoc eſt quàm habet ſ g k h circumferentia ad g k h circumferentiam. Quam uero habet ſ g k h circumferentia, ad ipſam g k h circumferentiam, hāc habet a l recta ad a d rectā. hoc etiam iam oſtenſum fuit. Minorem igitur proportionem habet a i ad a r, quàm l a ad ipſam a d. Quod quidem eſſe non poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. Non eſt igitur angulus a d f rectus. Et oſtenſum eſt, eum non eſſe acutum. Quare obtuſus exiſtet. reliquus igitur eſt acutus. Similiter oſtendetur, ſi contingens contigerit in termino lineæ ſpiralis. nam idem eueniet.

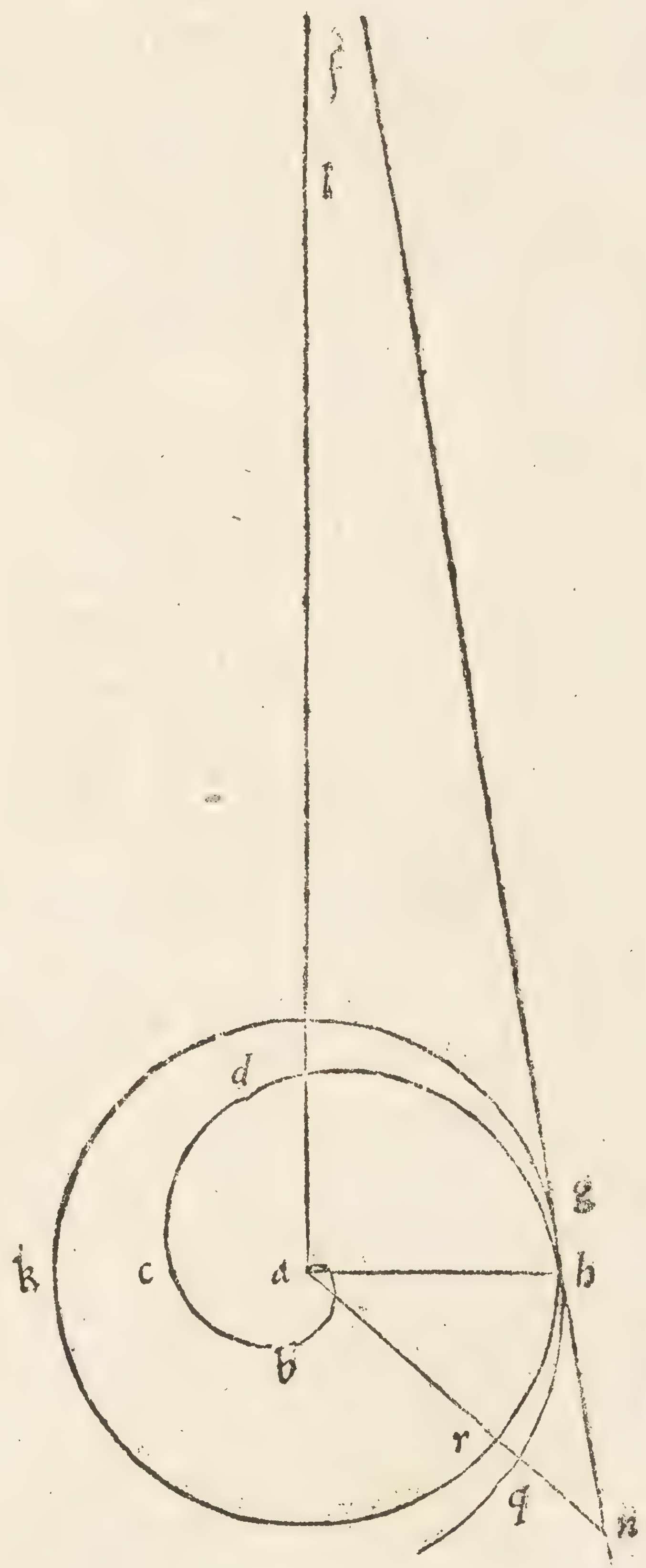
17 SI lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam, linea recta continget, illud idem eueniet. Contingat itaq; linea recta e f, lineā ſpiralem in ſecūda reuolutione deſcriptam, in puncto d: et cętera ſimiliter ſuperiorib. diſponātur. Similiter circumferentiæ r n d circuli pars illa, quæ erit in parte præcedentium, cadet intra lineam ſpiralem: quæ uero in parte ſequentium, cadet extrà. Angulus igitur a d f non eſt acutus, neq; rectus, ſed obtuſus: quod ſic demonſtratur. Eſto enim ſi fieri poteſt, ſit rectus. linea igitur e f continget circulum r n d. Eſto in puncto d. Ducatur item a i ad contingentem, & ſecet lineam quidem ſpiralem in puncto q, circumferentiam uero circuli r n d in puncto r. Habeat autem r i ad a r minorem proportionem, quā d r circumferentia ad totā circuli r n d circumferentiam, et ad d n t circumferentiam. Oſtenſum enim eſt, hoc eſſe poſſe. & iam tota i a ad a r minorem habet proportionē, quàm r d n t circumferētia cum tota circuli circumferētia, ad d n t



circumferentiā, cum tota d n t circūferentia. Sed quam proportionē habet r d n t circumferētia, cum tota d n t r circuli circumferentia, ad d n t circumferentiam cū tota d n t circuli circumferentia: hanc habet ſ g k h circumferentia, cum tota circuli circumferentia h ſ g k, ad g k h circumferentiam, cum tota circuli h ſ g k circumferentia. Quam autem proportionem habent circumferentiæ poſtremò dictæ, eam habet q a linea recta, ad ipſam a d rectā. Hoc enim oſtenſum fuit. Minorem igitur

igitur proportionem habet i a ad a r, quàm a q ad ipſam a d: quod quidem eſſe nõ poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. maior uero eſt i a, quàm a q. quare conſtat, angulum a d f obtuſum eſſe, reliquum uero acutum. Hæc eadem euenient, ſi contingens in termino lineæ ſpiralis ipſam contingere ponatur: & eadem ratione demõſtrabitur, ubi lineam ſpiralem quacunque reuolutione deſcriptam, linea recta contigerit, etiam in termino ipſius lineæ ſpiralis angulos inæquales fieri, cum linea ducta à puncto quod eſt initium lineæ ſpiralis ad punctum contactus: & eum qui in parte præcedentium fuerit, obtuſum eſſe: qui uero in parte ſequentium, acutum.

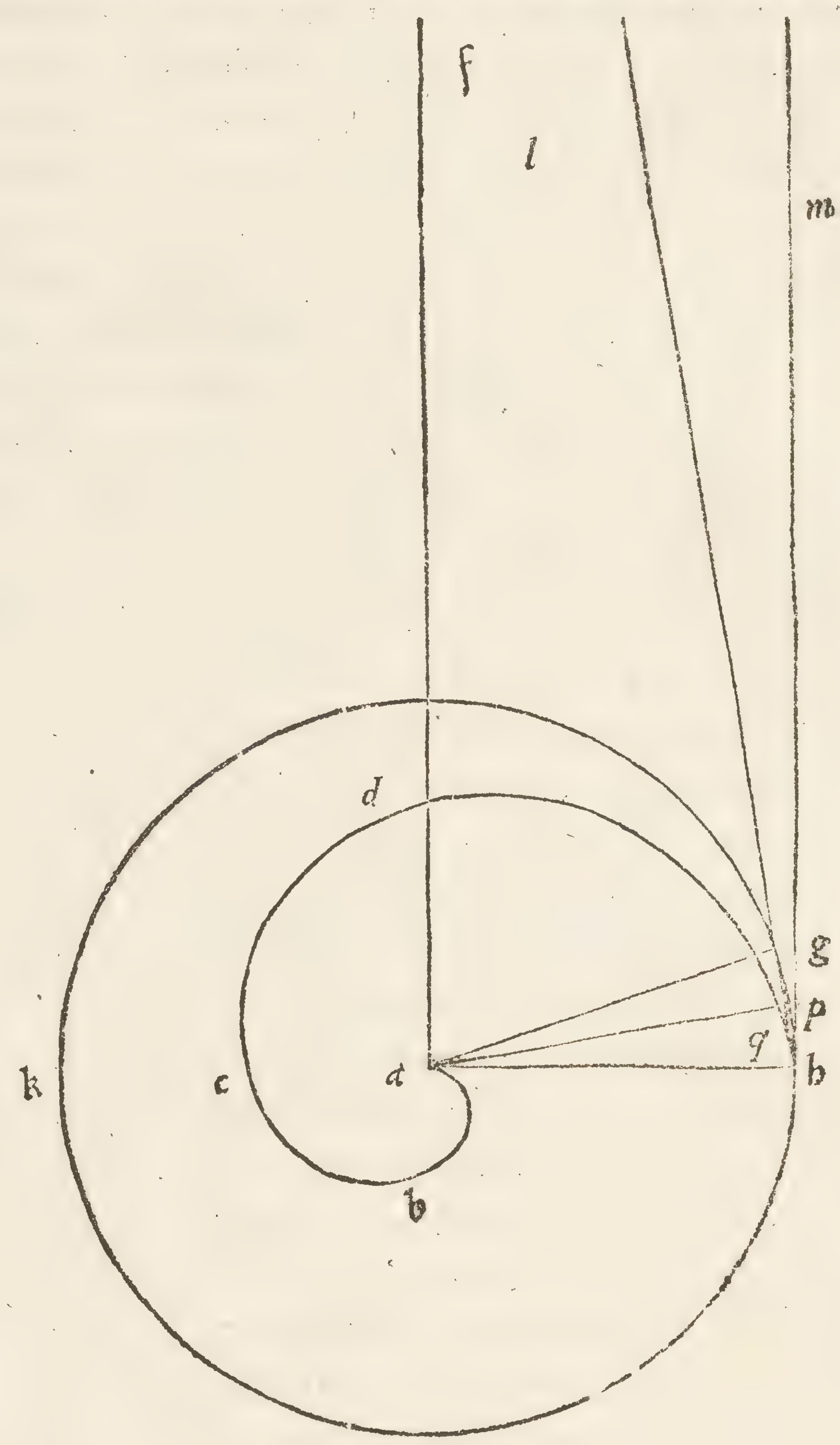
SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptã linea recta contigerit in ter- 18
mino lineæ ſpiralis, à puncto autem quod eſt initium lineæ ſpiralis, ducatur linea quædam recta ſtans angulis rectis ſuper lineam, quæ initium fuit reuolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium ſpiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.



Eſto linea ſpiralis a b c d h, eſto autem pũctum a initium eius, linea uero a h initium reuolutionis, & ſit h g k circulus primus. Contingat autem quædam ſpiralem lineam in puncto h, quæ ſit h f, & à puncto a ducatur ad angulos rectos ſuper lineam h a, linea a f, quæ coincidet cum h f, cum f h, h a contineant angulum acutum. coincidat itaque in puncto f. Eſt itaque demõſtrandum, lineam rectam f a circumferentiæ circuli h k g eſſe æqualem. Si enim non eſt, aut erit ea maior, aut minor. Eſto primũ, ſi eſſe poteſt, maior. Sumatur autem quædam recta, quæ ſit minor linea a f, & maior circumferentia h k g. eſt iam h k g circulus quidam, & in circulo linea recta minor diametro, quę eſt g h: & proportio lineæ h a ad a l maior eſt proportione ea quam habet dimidia h g ad lineam ab ipſo a ad ipſam h g perpendiculariter ductam, quoniam & eam habet quam h a ad a f. Poteſt igitur à puncto a educi ad eductam a n, ita ut n r, quæ media intercipĩt inter h n eductam, & circumferentiã ad ipſam h r rectam, eam habeat proportionem, quã h a ad a l. Habebit igitur n r ad r a, eam quã habet h r recta ad a l. ipſa uero h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad k h g circuli circumferentiã. nam h r recta minor eſt circumferentia h r, & linea a l recta maior eſt circumferentia circuli. Minorem igitur proportionem habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Tota igitur n a ad a r habet minorem proportionem, quàm k r circumferentia cum tota circuli circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Quam autem proportionem habet h r circumferentia cum tota circuli h g k circumferentia, ad h k g circuli circumferentiam, hanc habet q a ad h a. Hoc enim oſtenſum eſt. Minorem igitur proportionem habebit n a ad a r, quàm q a ad h a. quod quidem eſſe non poteſt. Nam n a maior eſt ipſa q a, & a r eſt æqualis h a. non eſt igitur a f circumferentia circuli h k g maior. Eſto uero, ſi fieri poteſt, minor f a circũferentia

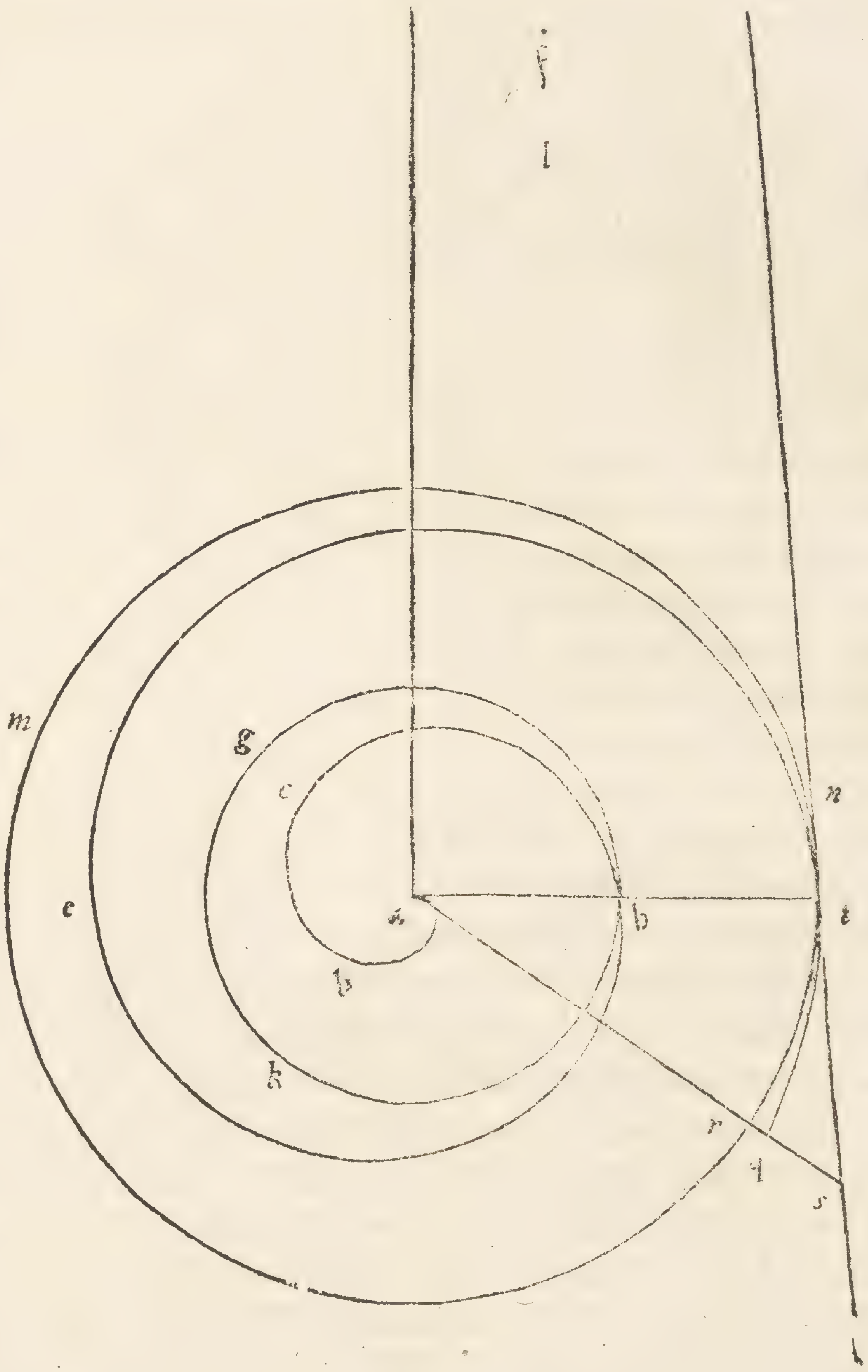
circuli

circuli h k g. Sumatur item quædam linea a l recta, quæ ſit maior a f, & minor circumferentia circuli h k g. Et ducatur à puncto h recta h m, æquediſtans ipſi a f. Rurſus eſt circulus h k g, & in ipſo linea recta h g minor diametro, & itē alia quæ contingit circulū in pūcto h. et proportio quam habet h a ad a l, eſt minor ea quā habet dimidia g a ad lineā ab a ad ſe ductam perpendiculariter. Quoniā uero & minor eſt ea quā habet h a ad a f, poteſt ab a duci a p ad cōtingentem, ita ut r n linea inter rectam in circulo datam & circumferentiam compræhenſa, ad lineam h p compræhenſam inter ductam & cōtactum eam habeat proportionē, quam h a ad a l. Secet autem a p circulū in puncto r, lineam uero ſpiralem in puncto q. Tunc habebit permutatim, eandem proportionem n r ad r a, quam h p ad a l. Linea uero h p ad a l maiorem habet proportionē, quàm h r circumferentia, ad h g k circuli circumferentiam. nam h p recta, maior eſt h r circūferentia: & a l minor eſt h g k circuli circumferentia. maiorem ergo habet proportionem n r ad a r, quàm h r ad g h k circuli circumferentiam. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm h g k circuli circumferentia, ad h k r circumferentiā. Quam autem proportionem h g k circuli circumferentia ad h k r circumferentiā, eam habet h a recta ad a q. nam hoc eſt oſtenſum. Maiorem ergo proportionem habet r a ad a n, quàm h a ad a q. quod quidem eſſe non poteſt. Non eſt igitur minor, neque maior a f recta, h g k circuli circumferentia. igitur eſt eidem æqualis.



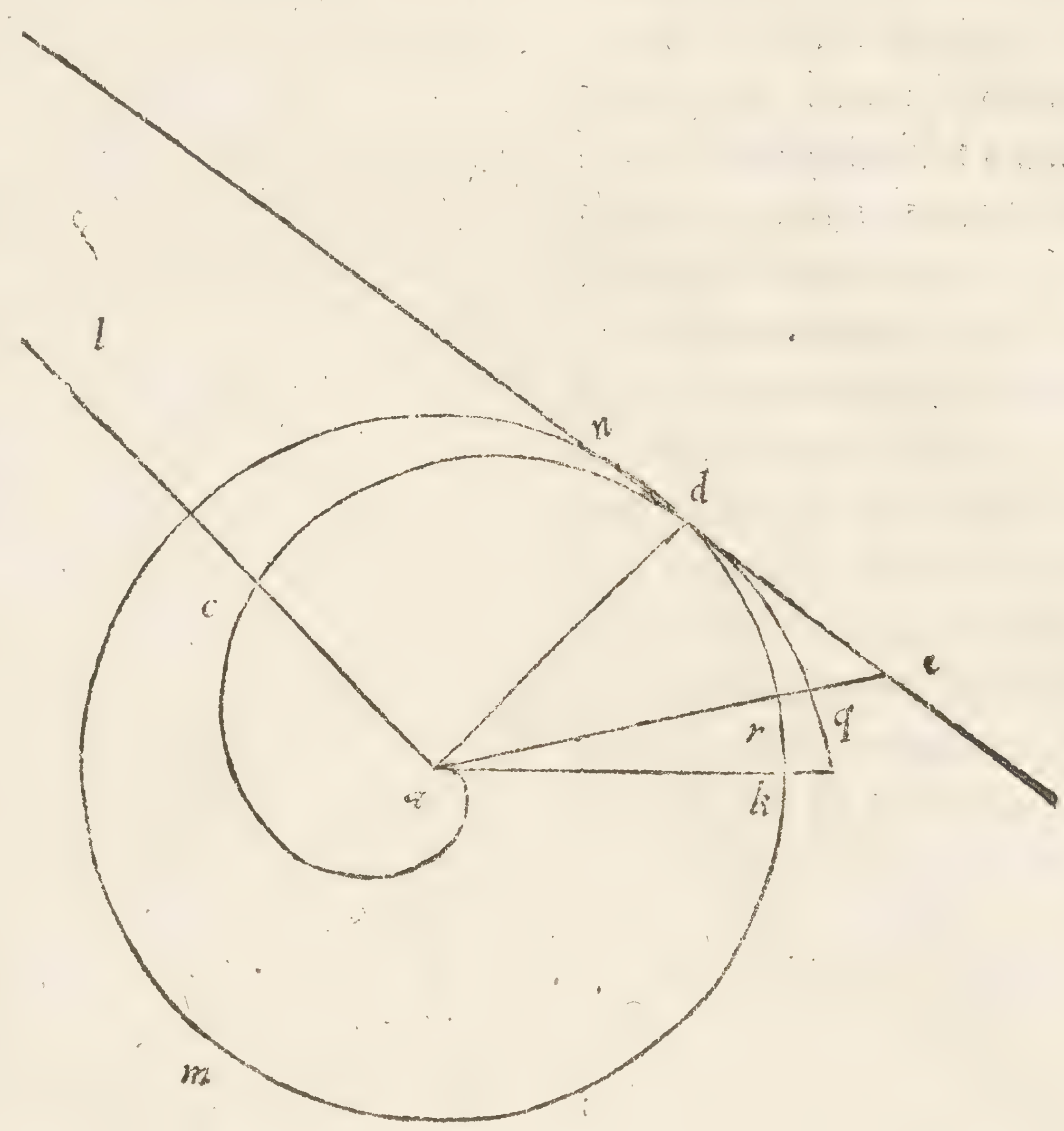
20 SI lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam aliqua linea recta in illius termino contingat, & ab initio lineæ ſpiralis ducatur aliqua recta ſuper lineam quæ eſt initium reuolutionis conſtituta ad angulos rectos: illa coincidet cū contingente, & linea recta quæ media erit inter contingentem, & initium lineæ ſpiralis, dupla eſſe probatur circumferentiæ circuli ſecundi. Eſto itaq; a b c h linea ſpiralis in prima reuolutione deſcripta, et h e t in ſecūda, & h k g circulus primus, & t m n ſecundus. Sit autem t f quædam linea contingens lineam ſpiralem in pūcto t, & f a ducta ad angulos rectos ſuper t a. Coincidet autem ipſa lineæ t f, cum ſit oſtenſum angulum a t f eſſe acutum. Oſtendēdum itaq; eſt, a f rectam duplam eſſe circumferentiæ circuli t m n. Nam ſi non eſt ei dupla, aut plus aut minus erit, quàm dupla eiuſdem. Eſto prius ſi poteſt eſſe, plus quàm dupla, & ſumatur a l recta minor a f recta, & maior quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Eſt iam circulus quidam t m n, & in circulo linea data t n minor diametro: & quam habet t a ad a l maior eſt proportione quam habet dimidia t n, ad perpendicularem ab a centro

centro ad ipſam ductam. Poteſt igitur ab a educi a ſ ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ ſit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a ſ circulum in puncto r. Et lineam ſpiralem in puncto q. Et permutatim, eãdem habebit proportionẽ r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipſa t r ad a l minorem proportiõem habet, quã t r circũferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor eſt t r circũferẽtia. Recta uero a l maior eſt, quã dupla circũferentiæ circuli t m n. Minorẽ ergo habet proportionem r s ad a r, quã t r circũferẽtia ad duplã circumferẽtiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia, cum circumferentia circuli t m n bis ſumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis ſumptã. Quam autem proportionem habent dictæ circũferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim oſtenſum eſt. Minorem ergo proportionem habebit a ſ ad a r, quàm q a ad t a. quod eſſe non poteſt. nõ eſt igitur a ſ plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem oſtendetur, quod neq; minor, quàm dupla illius eſſe poteſt. Quare conſtat duplam eſſe. Oſtendendum quoq;, ſi lineam ſpiralem in quacunque reuolutione deſcriptã, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ ſpiralis ducatur ſuper lineam quæ eſt reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipſa coincidet contingenti, & multiplex eſt circumferentiæ circuli ſecundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipſa multiplex nominata.



SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam linea recta contingat, non in termino ipſius, & à puncto cõtactus ad initium lineę ſpiralis recta ducatur, & initio lineæ ſpiralis poſito centro deſcribatur circulus ſecundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ ſpiralis quædam recta ducatur ſuper lineam reuolutionis initium ad angulos rectos conſtituta, ipſa cum contingente concurret. Et linea inter huiuſmodi concurſum & initium lineæ ſpiralis media, æqualis eſt circumferentiæ circuli deſcripti, quæ inter punctum contactus & ſectionis pũctum compræhenditur, in quo puncto circulus deſcriptus ſecat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia ſumatur à pũcto quod ſitum eſt in reuolutionis initio. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d in prima reuo- 21

lutione deſcripta, & contingat eam aliqua recta e d f, in puncto d. ab ipſo uero d ad initium lineæ ſpiralis ducatur linea d a, & ſuper centro a deſcribatur circulus ſecundum interuallum a d, qui ſit d m n. Secet autem hic initium reuolutionis in puncto k. Ducatur autem f a ad a d ſecũdum angulos rectos. Quod autem ipſa cõcurret cũ cõtingẽte, manifeſtũ eſt. Quod uero f a recta ſit æqualis k m n d circũferẽtiæ, eſt demõſtrandũ. Nã ſi nõ, uel maior, uel ea minor exiſtet. Eſto primũ maior, ſi eſſe poteſt. Sumat̃ aũt quædã recta l a, minor recta f a, & maior circumferẽtia k m n d. Rurſus circulus eſt k m n, & in circulo recta d n minor diametro data, & proportio quã habet d a ad a l, maior eſt ea quam habet dimidia d n, ad perpendicularem à cẽtro ſuper ipſam d n ductam. Poteſt igitur à puncto a educi a e ad ipſam n d

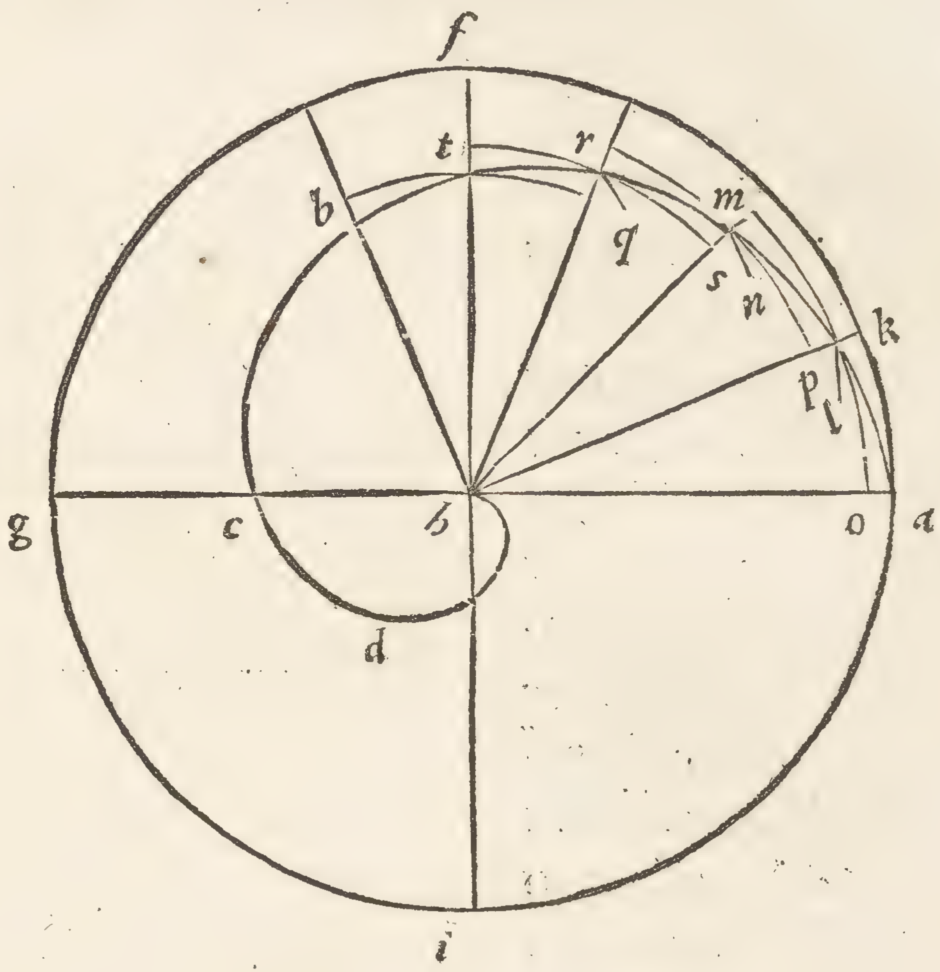


extra ductã, ita ut e r ad d r eã habeat proportionẽ, quam d a ad a l. nã hoc fieri poſſe oſtẽſum eſt. Habebit igitur e r ad a r eam proportionẽ, quam d r ad a l. & d r ad a l minorem habet proportionem, quàm d r circumferentia ad k m d circumferẽtiam, cum d r recta minor ſit d r circumferentia, ipſa uero a l ſit maior k m d circũferentia. Minorem ergo proportionem habet e r recta ad r a, quàm d r circumferẽtia ad k m d circumferentiam. quare & a e ad a r minorem habebit proportionem, quàm k m r circumferentia, ad k m d circumferentiam. Quam aũt proportionem habet k m r circũferẽtia ad k m d circumferentiã, eã habet q a ad ipſam a d. quare minorem proportionẽ habebit e a ad a r, quàm q a ad ipſam d a, quod eſſe non poteſt. Non erit igitur f a maior circumferentia k m d. Similiter autem eis quæ antea dicta ſunt oſtendetur, quod neq; minor eſt illa, quare æqualem illi eſſe neceſſe eſt. Eodem autem modo oſtendetur, & ſi lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam recta contingat, non in termino illius, & cætera ut prius diſponantur, quod linea recta media inter contingentem, & initium lineæ ſpiralis, æqualis eſt toti circuli deſcripti circumferentiæ, & inſuper circumferentiæ inter dicta puncta depræhenſæ, ipſa iã dicta circũferentia ſimiliter ſumpta. Item ſi lineam ſpiralem in quacunq; reuolutione deſcriptam aliqua recta contigerit, non in termino ipſius, & cętera diſponantur, ut ſuprà, quod recta intermedia inter dicta puncta multiplex exiſtit circumferentiæ circuli deſcripti ſecundum numerum uno minorem, eo ſecundum quẽ reuolutio facta fuerit, & dicta inſuper media inter dicta pũcta æqualis eſt dictæ circumferentiæ ſimiliter ſumptæ.

22 SI ſpacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à linea recta initio reuolutionis primæ compræhenſum ſumatur, poteſt figura quædam plana circa ipſum deſcribi, & altera intra, quæ figurę ex fruſtis ſimilibus ſint compoſitę, & ita ut id quo circumſcripta inſcriptam exceſſerit, quocunq; dato ſpacio minus exiſtat. Eſto linea ſpiralis in prima reuolutione deſcripta a b c d. Eſto initium lineæ ſpiralis punctum h, & initium reuolutionis h a. Primus autem circulus

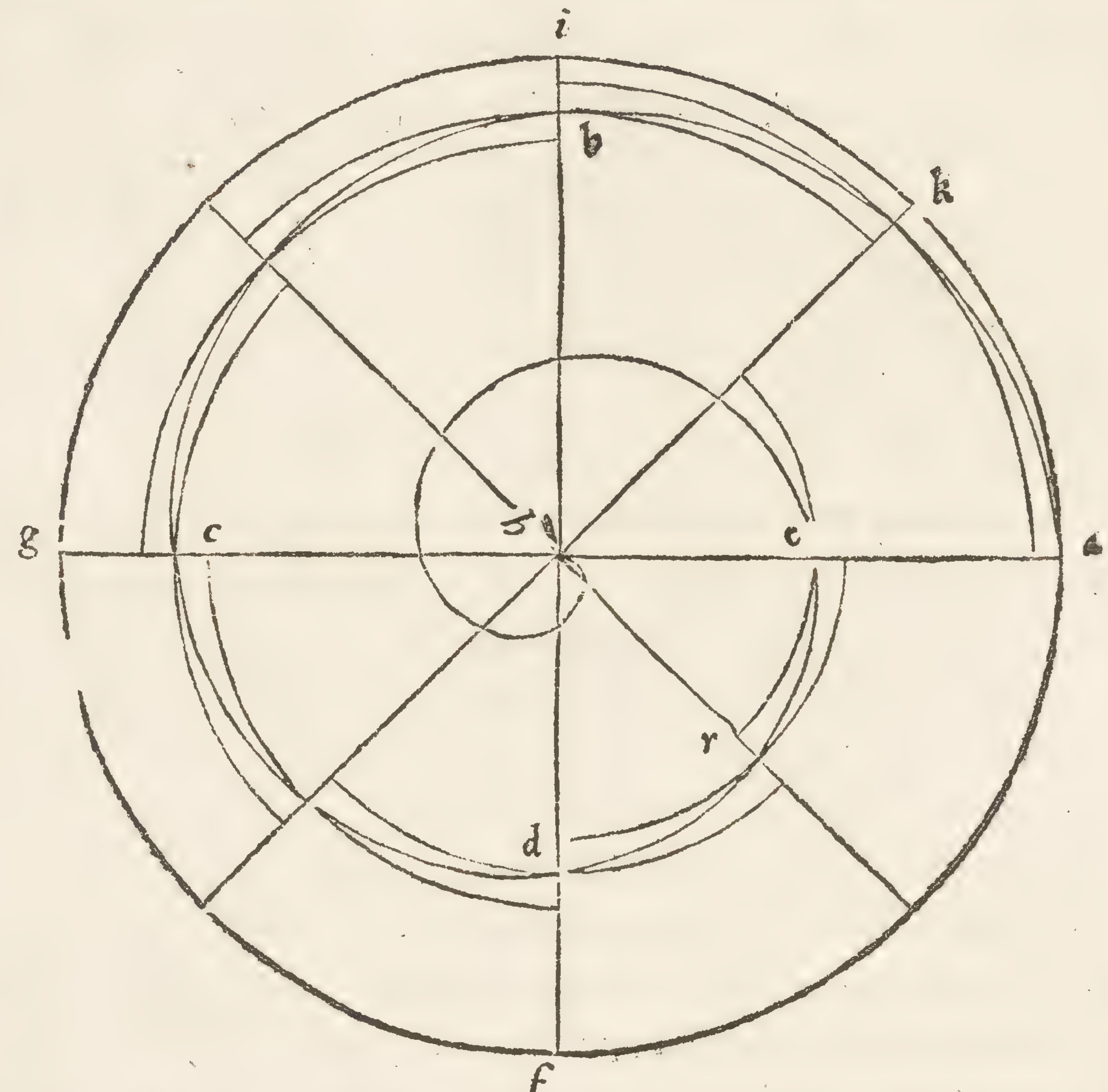
f g i a,

f g i a, & a g, f i diametri ipſius inter ſe altera alteri perpendicularis. Diuiſo itaq; angulo recto per æqualia, & fruſto ſpacij angulum rectum continentis, & hac diuiſione in reliquis retẽta, deueniemus tandem ad reſiduũ quoddã, quod minus erit dato ſpacio. & ſit illud fruſtum reſiduum factum a h k, minus dato ſpacio. Diuiſi ſunt itaque anguli quatuor recti in angulos æquales illi angulo qui continetur ſub a h, h k. & rectę partientes angulos uerſus lineam ſpiralẽ ductæ, ſecant eam. Eſto itaq; pũctum l, in quo h k ſecat ſpiram, & centro h deſcribatur circulus ſecundum interuallũ h l. Eius itaq; pars quæ in præcedẽtium partem fertur, intra ſpiralem lineam cadet. Quę uero in partem ſequẽtium, extrà. Deſcribatur itaq; eius circumferentia, ut incidat in a h in pũcto o, & ſit ipſa o m. Et item linea, quæ poſt h k ad ſpirã ducta, ſecat illam, eſto in pũcto n. & dicta circumferentia incidat in illam in puncto m. Et item centro h interuallo h n poſito, deſcribatur circulus. Huius quoq; circũferentia incidet in lineam ſequentem h m, quæ à centro ducta incidit in ſpiram. Et ſimiliter in alijs omnibus quæ ſecant lineam ſpiralem, & faciunt angulos ſecũdum unamquanq;, deſcribantur circuli in centro h, eorum circumferentiæ ſecũdum unamquamq; incident & in præcedentem & in ſequentem. Et circũferentiæ in præcedentium parte intra cadent, & in parte ſequentium extra lineam ſpiralem. Iam igitur circa ſpacium ſumptum, eſt circumſcripta quædam figura: & alia inſcripta eidem, quæ ſunt ex fruſtis ſimilibus compoſitæ, & circumſcripta addit ſuper inſcriptam dato ſpacio minus. Quod oſtendetur. nam fruſtum h l o eſt æquale fruſto h l m, & h n p æquatur h n r, & h q s ipſi h q t. Eſt etiam unumquodq; eorum fruſtorum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale illi fruſto in figura circumſcripta contento, quod commune latus cum illo habuerit. Conſtat igitur, omnia fruſta omnibus fruſtis æqualia eſſe. Figura igitur ſumpto ſpacio inſcripta, eſt æqualis figuræ circumſcriptæ eidem, dempto a h k fruſto. nam hoc ſolum eorum quæ in figura circumſcripta exiſtunt, relictum eſt. Cõſtat igitur, circumſcriptam figuram inſcripta maiorem eſſe fruſto h k a: quod quidem eſt propoſito ſpacio minus. Ex hoc itaq; manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura qualis dicta eſt, & altera inſcribi dicto ſpacio, ita quod circumſcripta dicto ſpacio ſuperaddat minus quocunq; ſpacio dato, & inſcripta diminuat ab eodem quocunq; dato ſpacio minus. Et ipſum ſpacium figuram inſcriptam excedat, ſimiliter quocunq; ſpacio dato minus.

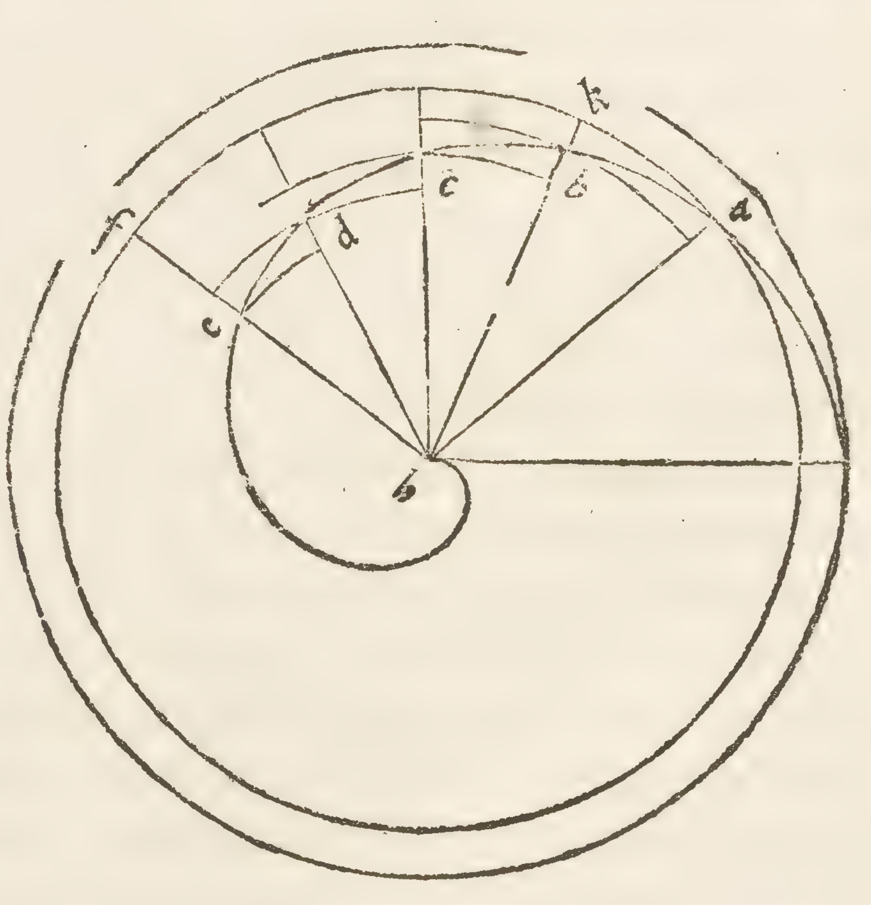


SI ſumatur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali in ſecunda reuolutione de 23
ſcripta, & à recta quæ eſt ſecũda in reuolutionis initio: poteſt ipſi ſpacio quædam plana figura circumſcribi, & alia inſcribi, quæ ex fruſtis ſimilibus ſint cõpoſitæ, ita ut id quo circumſcripta excedit inſcriptam, quocunq; dato ſpacio minus ſit. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e in ſecunda reuolutione deſcripta: & eſto pũctum h initium lineæ ſpiralis, & a h initium reuolutionis, & e a ſit recta ſecunda in reuolutionis initio, & a f g eſto circulus ſecundus, a g, f i diametri ipſius quæ

ſeſe ad angulos rectos ſecent. Et item diuiſis per æqualia angulis rectis, & fruſtis quæ continent angulos rectos ſimiliter, & pariter diuiſis, & hac diuiſione perducta, tandem deueniemus ad aliquod reſiduum, quod erit minus quocunque ſpacio dato. Et ſit illud fruſtum h k a minus dato ſpacio. Diuiſis angulis rectis in æquales angulos ei angulo, qui continetur ſub k h a, & cæteris diſpoſitis ut ſupra, erit id quo figura circumſcripta excedet inſcriptam minus ſpacio dato. nam exceſſus quo fruſtũ h k a excedit fruſtũ h e r, minor eſt fruſto h k a. Quare conſtat, circumſcriptã figuram addere ſuper inſcriptam minus dato ſpacio, et eam ſuper ſpacium in ſpira ſumptum addere poſſe minus quocũque ſpacio dato. Et ipſum ſpaciũ ſumptum addere ſuper inſcriptam minus quocunque ſpacio dato, & hæc fieri poſſe. Eodem autem modo conſtat fieri poſſe, ut ſumpto ſpacio à linea ſpirali in quacunque reuolutione deſcripta compræhenſo, & à recta reuolutionis initio ſecundum reuolutionis numerũ dicta circa ipſum ſpacium quædam figura plana circumſcribatur, & altera inſcribatur eidem, ut dictum eſt, ita ut id quo circumſcripta ſumptum ſpacium excedat, minus ſit quocunque ſpacio dato. Et item id quo ſpacium ſumptum excedat inſcriptam ſibi figuram, ſit minus quocunque ſpacio dato.

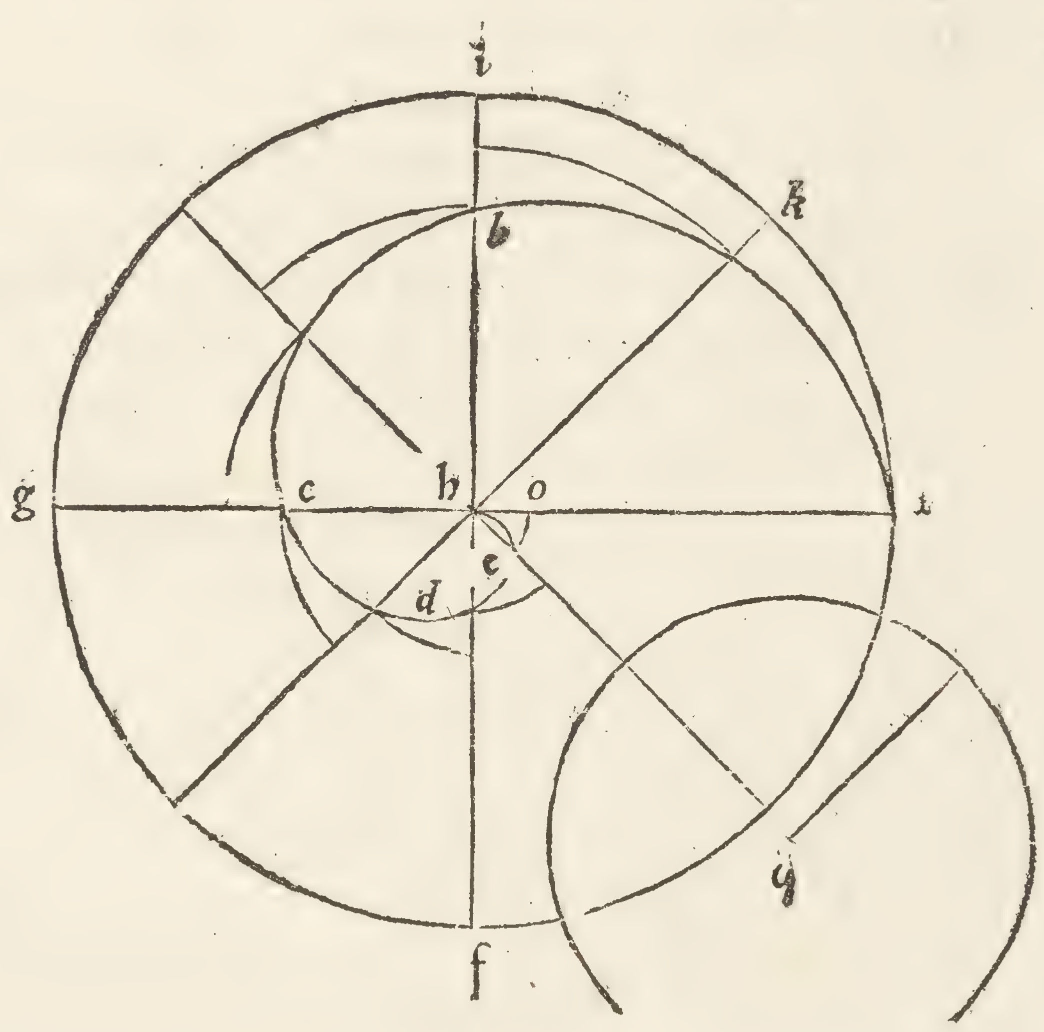


24 SI ſumatur ſpacium compræhenſum à ſpirali linea, quæ ſit minor ea quæ in una reuolutione deſcribitur, quæ'que non habeat terminum lineæ ſpiralis initium, & compræhenſum à rectis ductis ab initio lineę ſpiralis ad terminos dictæ ſpiralis ſpacium compræhendentis. Poteſt ipſi ſpacio plana quædam figura circũſcribi, ex fruſtis ſimilib. compoſita: & alia inſcribi eidem, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus, quàm ſit quodcunque ſpacium datum. Eſto linea ſpiralis a b c d e, eius termini a e: ſit lineæ ſpiralis initium h, & iũgantur a h, e f. deſcribatur quoque circulus centro h, interuallo h a, & incidat in h e in puncto f. Angulo itaque ad h poſito, & fruſto a h f ſimul in æqua diuiſo, et diuiſione tali producta donec reſiduum mi-

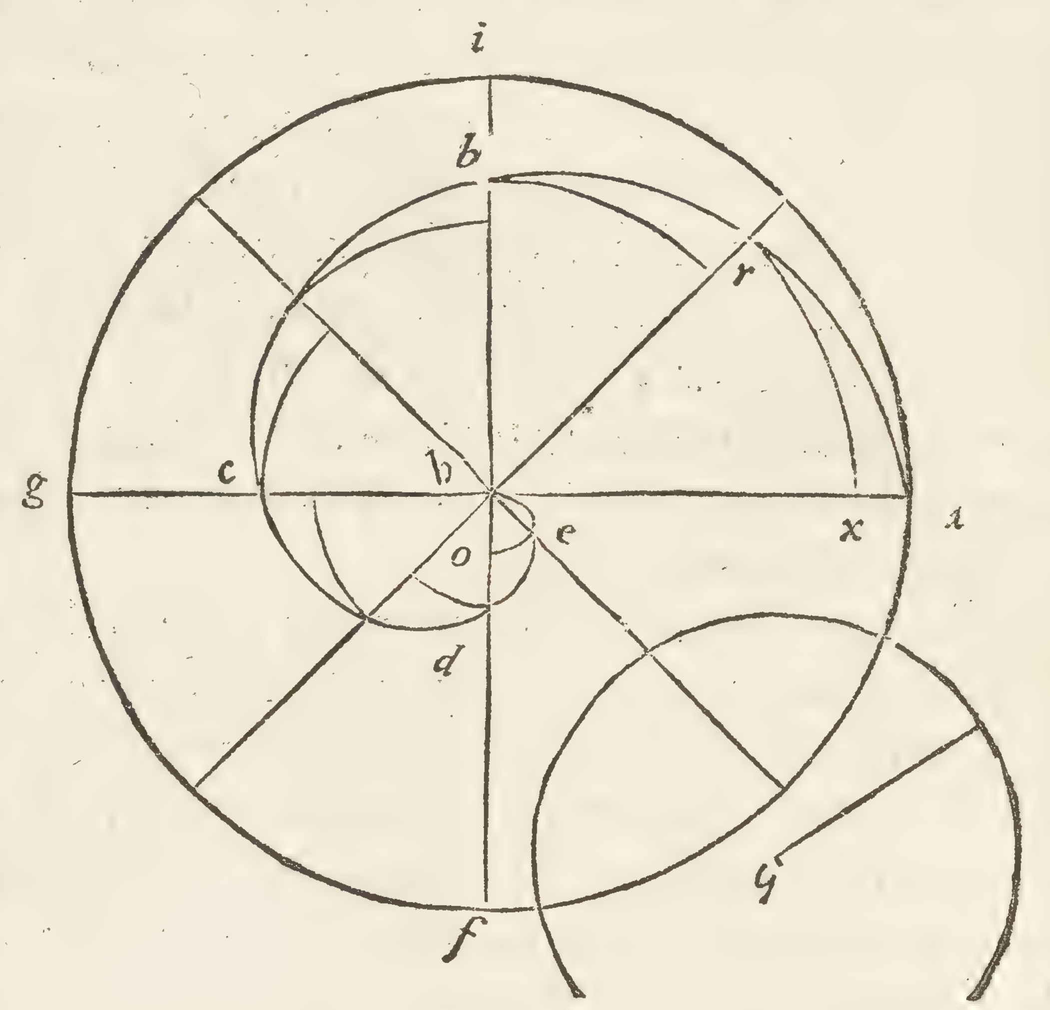


minus exiſtat dato ſpacio,eſt ut fruſtum h a k minus ſit ſpacio propoſito. Similiter iam his quæ ſuprà ſunt demonſtrata,deſcripti ſint circuli per puncta lineã ſpiralem ſecantia tranſeuntes,ſecundum lineas rectas, quæ faciunt ad h angulos æquales. & ductæ ita ſint,ut & in parte ſequentium, & in parte præcedentium incurrant in circumferentias circulorum,quæꝙ ſuo loco. Erit iam ipſi ſpacio quod à linea ſpirali a b c d e, & à rectis h a,h e continetur,figura quædam circumſcripta plana,ex fruſtis ſimilibus compoſita: & alia eidem inſcripta,& exceſſus quo figura circumſcripta ſuperat inſcriptam,minor eſt ſpacio propoſito. nam fruſtũ h a k eſt minus dato ſpacio. Ex hoc manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura plana,qualis dicta eſt, ita ut circumſcripta figura dictum ſpacium minori ſpacio ſuperet,quàm ſit ſpacium quodcunque propoſitum. Et ſpacium ipſum figuram ſibi inſcriptam minori ſpacio ſimiliter ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunꝙ datum.

SPacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à recta in reuolutionis initio prima comprehenſum,eſt tertia pars circuli primi. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, & h punctum initiũ lineæ ſpiralis, & h a recta prima in reuolutionis initio. & a f g i ſit circulus primus, cuius tertia pars ſit circulus ϥ. Oſtendendũ eſt,quod prædictum ſpacium æquale eſt circulo ϥ. nam ſi non, uel maius erit, uel minus eo. Eſto primum,ſi eſſe poteſt, minus eo. Circa ſpacium itaꝙ contentum ſub a b c d e h linea ſpirali, & ſub recta h a deſcribi poteſt figura quædam plana ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut id quo circumſcripta figura ſuperat ipſum ſpacium, ſit minus eo quo circulus ϥ ſuperat ſpacium dictum. Circumſcribatur itaꝙ, & eſto fruſtorũ ex quibus componitur dicta maximum h a k, minimum uero h e o. Manifeſtũ igitur, quod figura circumſcripta minor eſt circulo ϥ. Eductæ autem ſunt lineæ rectæ ab h facientes angulos æquales,& incidẽtes in circumferentiam circuli. Quædam uero intra cadunt,in lineam ſpiralem incidentes, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant: quarũ maior quidem eſt h a, minor uero h e, & minima ęqualis exceſſui. Sunt autẽ & aliæ lineæ ab h ad circũferentiam circuli procedentes, multitudine quidem prædictis æquales,magnitudine uero unaquæꝙ æqualis maximæ prædictarum, & ab omnibus ſimilia fruſta comprehenſa ſunt, & ab his quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant, & ab his quæ ſunt inter ſe & maximę illarum æquales. Fruſta igitur quæ cõtinẽtur,ab his quæ inter ſe ſunt & maximæ illarum æquales,ſunt minus quàm tripla fruſtorum quæ continentur ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt. Oſtenſum namꝙ hoc fuit. Sunt autem fruſta ab his compræhẽſa, quæ inter ſe ſunt & maximæ aliarum æquales, circulo a f g i æqualia. Fruſta uero contenta ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualia ſunt figuræ circumſcriptæ. circulus ergo a f g i minor eſt ꝙ̃ triplus figuræ circũſcriptæ. Ipſe uero eſt triplus circuli ϥ. Circulus ergo ϥ minor exiſtet figura cir 25

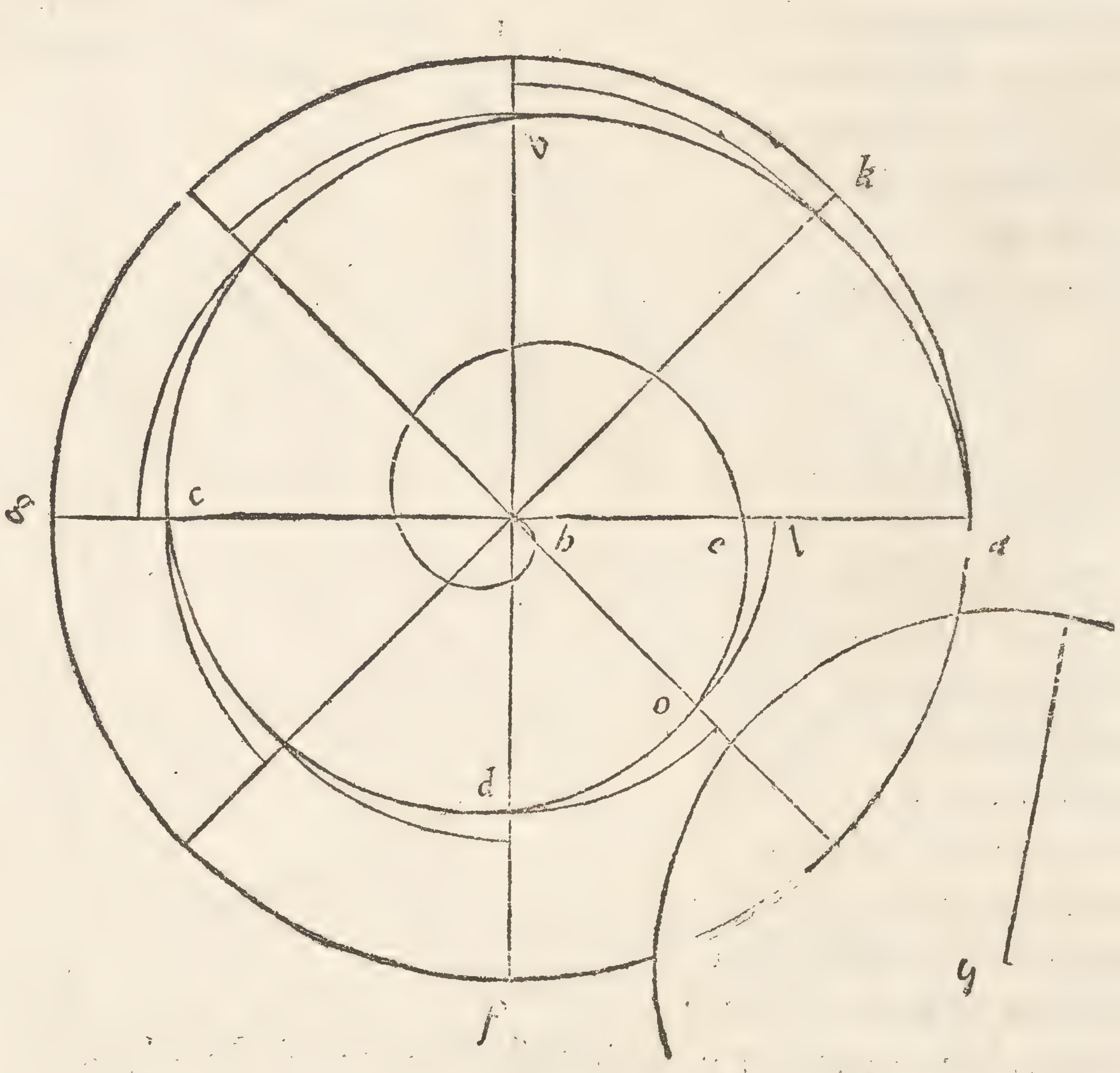


cum ſcripta: quod quidem uerum non eſt, ſed maior exiſtit illa. Non eſt igitur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali a b c d e h, & linea recta h a, minor circulo ç. Nec utiq; maior. Eſto itaq; maior, ſi eſſe poteſt. Item ſpacio compræhenſo à linea ſpirali a b c d e h, & recta h a poteſt inſcribi figura, ita ut dictũ ſpacium minus addat ſuper figuram inſcriptã, quàm ſit id quodcunque ſpacium dictum addit ſuper circulum ç. Inſcribatur itaq;. Et eſto fruſtorum ex quibus inſcripta componitur, maximũ h r x. minimum uero, o h e. Conſtat iam, figuram inſcriptam circulo ç eſſe maiorem. lineę quæ angulos ad h faciebant æquales eductæ, in circuli circumferentiam inciderunt. Rurſus quædam rectæ ſunt ſeſe æqualiter excedentes, ab h ad ſpiram procedentes, quarum maxima eſt h a, minima uero h e, & minima æquatur exceſſui. Sunt item aliæ lineæ ab h puncto ad circuli circumferentiam eductæ, multitudine quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum: & ab omnibus deſcribuntur fruſta ſimilia, & ab illis quæ inter ſe & maximæ aliarum ſunt æquales, & ab illis quæ ſeſe æqualiter excedũt. Fruſta igitur ab illis quæ ſunt maximæ aliarum æquales, deſcripta exiſtunt plus quàm tripla fruſtorũ quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus continentur, dempto illo quod à maxima contentum eſt. Hoc enim demonſtratum fuit. Fruſta uero à lineis maximæ æqualib. contenta, circulo a f g i æqualia ſunt. quæ uero à lineis æqualiter ſeſe excedentib. compræhenduntur, dempto eo quod à maxima æquantur, figuræ inſcriptæ. Circulus igitur a f g i eſt plus quàm triplus inſcriptæ figuræ. idem uero triplus eſt circuli ç. Quare circulus ç maior eſt inſcripta figura. Sed fuerat poſitus minor. Spacium igitur comprenſum à ſpira a b c d e h, & à recta a h, neq; minus circulo ç, neque maius exiſtit. Igitur neceſſe eſt eſſe eidem æquale, quod erat demonſtrandũ.



26 SPacium quod à ſpirali linea in ſecunda reuolutione deſcripta, & à ſecunda linea recta reuolutionis initio producta cõtinetur, habet ad circulum ſecundũ eam proportionem, quam ſeptem ad duodecim, quæ eadem eſt ei quam habent utraq; ſimul, contentum ſub ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro circuli primi, & tertia pars quadrati lineæ illius qua ſemidiametros ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi circuli, ad quadratum ſemidiametri circuli ſecundi. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e, in ſecũda reuolutione deſcripta. Eſto h pũctum lineæ ſpiralis initium, recta uero h e in reuolutionis initio prima. recta autem a e, in reuolutionis initio ſecunda: circulus a f g i ſecundus. ſint autem a g, f i diametri eius, altera alteri ſit perpendicularis. Oſtendendum eſt itaq;, ſpacium contentum à linea ſpirali a b c d e, & à recta a e ad circulum a f g i, habere eam proportionem, quam ſeptem habent ad duodecim. Eſto circulus quidam ç, cuius ſemidiametrus poteſtate ſit æqualis ei quod continet̃ ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati lineæ a e. habebit iam circulus ç ad circulum a f g i, ſicut ſeptem ad duodecim. Quoniam ſemidiametrus eius ad ſemidiametrum a f g i circuli eam habet proportionem poteſtate. Sed circulus ç oſtendetur æqualis eſſe ſpacio contento à linea ſpirali, & à recta a e, nam ſi non ſit, uel itaq; maior erit, uel minor eo. Eſto itaq; primum maior,

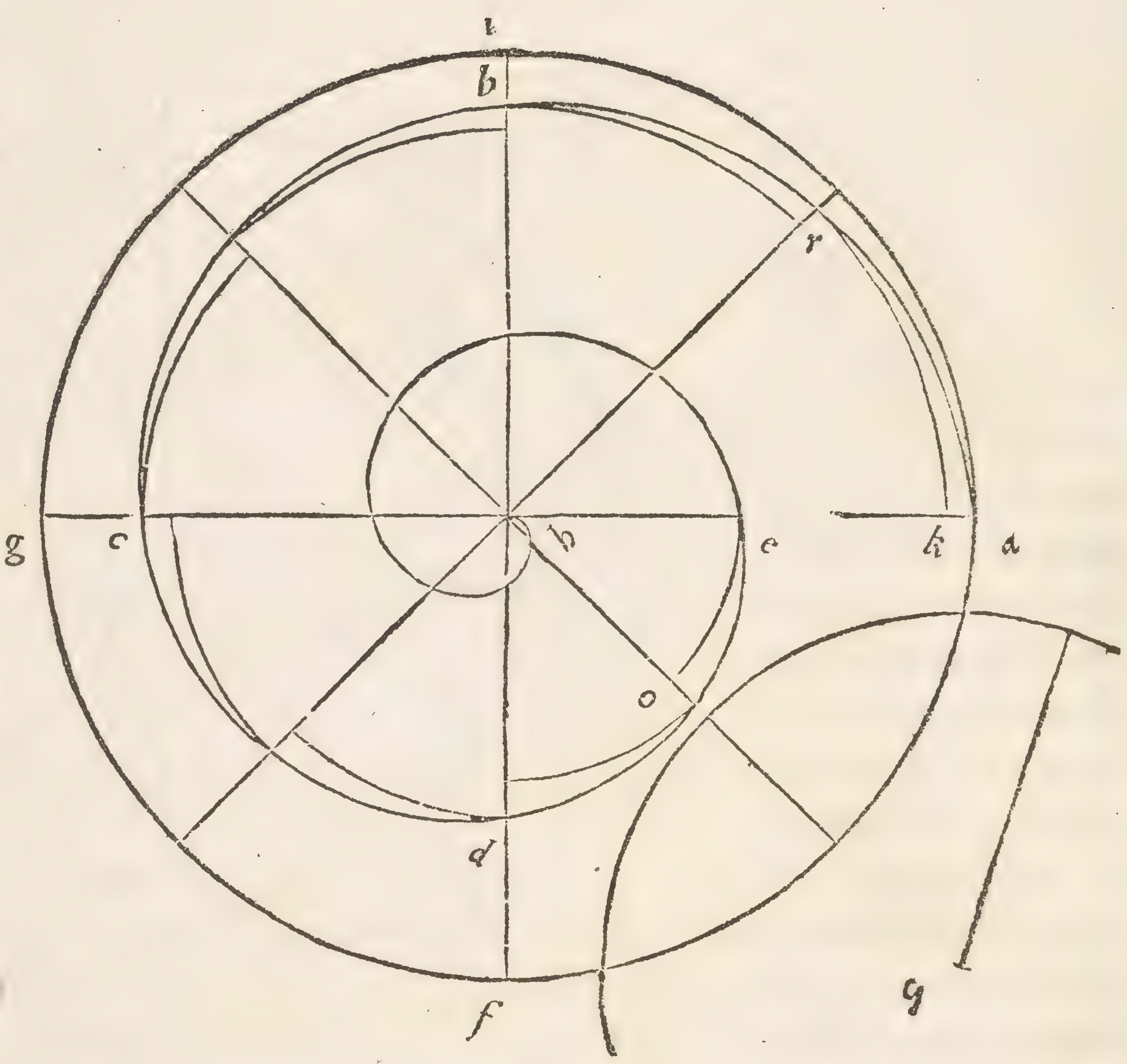
ior, ſi eſſe poteſt. Circa ſpacium itaqꝫ deſcribi poteſt quædam plana figura, ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut figura circumſcripta ſuper ſpacium addat minus, quàm ſit ſpacium quo ꝗ circulus excedit dictum ſpacium. Eſto circumſcripta, & ſit h a k fruſtum maximum eorũ ex quibus figura circumſcripta componitur, minimũ uero h o d. Conſtat igitur, circumſcriptam figuram circulo ꝗ eſſe minorẽ. Educant̃ lineæ rectæ quæ faciunt angulos æquales ad h uerſus circumferentiam circuli ſecũdi, in eam incidẽtes. Erunt iam quædam lineæ rectæ, ſeſe æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h, in ſpiram incidunt, quarum maxima eſt h a, minima uero h e. Erũt etiam aliæ lineæ à puncto h, ad cir-



cumferentiã circuli a f g i eductæ, multitudine quidẽ una pauciores illis: magnitudine uero & inter ſe, & maximæ illarum æquales, & confecta ſunt fruſta ſimilia, & ab eis quæ ſunt inter ſe & maximæ illarum æquales, & ab eis quæ ſeſe æqualiter excedunt: à minima autem non eſt confectum aliquod. Fruſta igitur, ab eis quæ ſunt æquales maximæ illarum confecta, habent ad fruſta confecta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempto eo quod à minima, minorem proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraqꝫ ſimul hæc, ad contentũ ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati a e. Hoc enim oſtenſum eſt. Circulus autem a f g i æquatur fruſtis, quæ à lineis inter ſe & maximæ illarum æqualibus confecta ſunt. Fruſtis autem confectis à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, æquatur figura circumſcripta. Minorem igitur proportionem habet circulus a f g i, ad figuram circumſcriptam, quàm quadratum ad hæc utraqꝫ ſimul, ad contentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Quam autem proportionem habet quadratum a h, ad cõtentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e: hanc habet circulus a f g i, ad circulum ꝗ. Minorem ergo proportionem habet a f g i circulus ad figuram circumſcriptam, quàm ad circulum ꝗ. Quare colligitur, circulum ꝗ minorem eſſe figura circumſcripta. quod eſt cõtrarium ei quod poſitum fuerat. Circulus igitur ꝗ ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contento, maior eſſe non poteſt. Verum neque minor. Eſto namqꝫ, ſi eſſe poteſt. Rurſus in ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contento, poteſt quædam figura plana inſcribi, ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut ſpacium à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contentum, addat ſupra figuram inſcriptam minus eo quo idem ſpacium excedit circulum ꝗ. Eſto igitur inſcripta, & ſit h k r fruſtum maximum eorum ex quibus componitur inſcripta figura. Minimum uero, ſit h e o. Conſtat igitur figuram inſcriptam circulo ꝗ eſſe maiorẽ. Educãtur lineæ rectæ, quæ faciunt angulos æquales ad h, uerſus circumferentiã

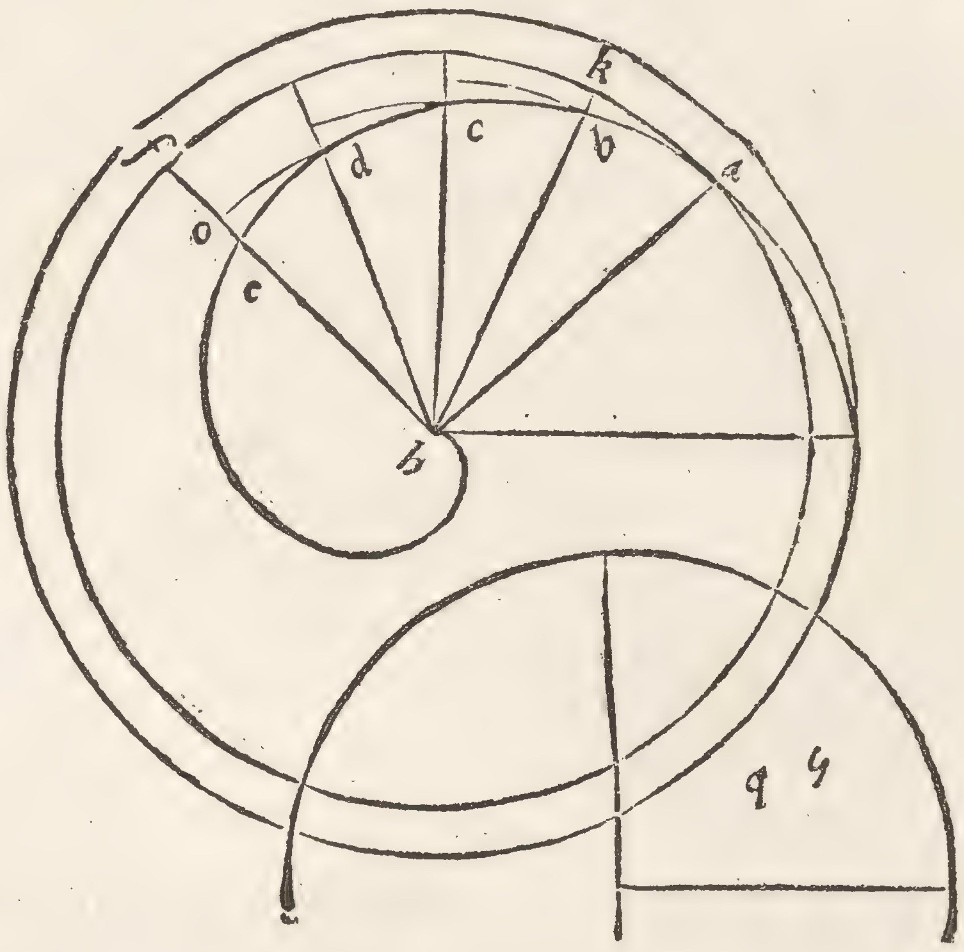
cir-

circuli a f g i, in quam incidant. Rurſus erunt lineæ quædam æqualiter ſeſe excedentes, quæ à puncto h in ſpiralem incidunt, quarum maxima h a, minima uero h e. Erunt item aliæ lineæ à puncto h ductæ in circumferentiam circuli incidētes, multitudine quidē una pauciores illis, magnitudine uero & inter ſe & maximæ illarū æquales. Et à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & à lineis maximæ illarum æqualibus. Fruſta igitur ab æqualibus maximæ illarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus confecta, dempto eo quod à maxima maiorē proportionem habebit, ꝙ quadratum h a ad hæc utraqꝫ ſimul, ad cōtentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Fruſtis autem quę à lineis ſeſe æqualiter excedentib. ſunt confecta, dempto eo quod à maxima æquatur figura inſcripta ſpacio: fruſtis uero alijs circulus æquatur. Quare ſequitur circulum a f g i maiorem habere proportionem ad figuram inſcriptam, quàm quadratum h a ad hæc utraqꝫ ſimul, ad contentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e, hoc eſt circulus a f g i ad circulum ϛ. Vnde colligitur, circulum ϛ figura inſcripta eſſe maiorem. Quod poſitioni contrariū eſt. Neqꝫ igitur circulus ϛ ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a h contento minor eſſe poteſt. igitur illi æqualem eſſe neceſſe eſt. Eodem autem modo oſtendetur ſpaciū à linea ſpirali in quacunqꝫ reuolutione deſcripta, & à recta contentum, quæ ſecundum numerum reuolutioni eundem, nominetur ad circulum ab eodem numero denominatum, eā habere proportionem quam utraqꝫ ſimul iſta, cōtentum ſub ſemidiametro circuli à numero reuolutionis dicti, et ſub ſemidiametro circuli dicti à numero qui ſit unitate minor numero reuolutionis, et tertia pars quadrati ab ea linea producti, qua ſemidiametros maioris circuli ex prædictis excedit ſemidiametrum minoris circuli prædictorum, ad quadratum ſemidiametri maioris circuli prædictorum.

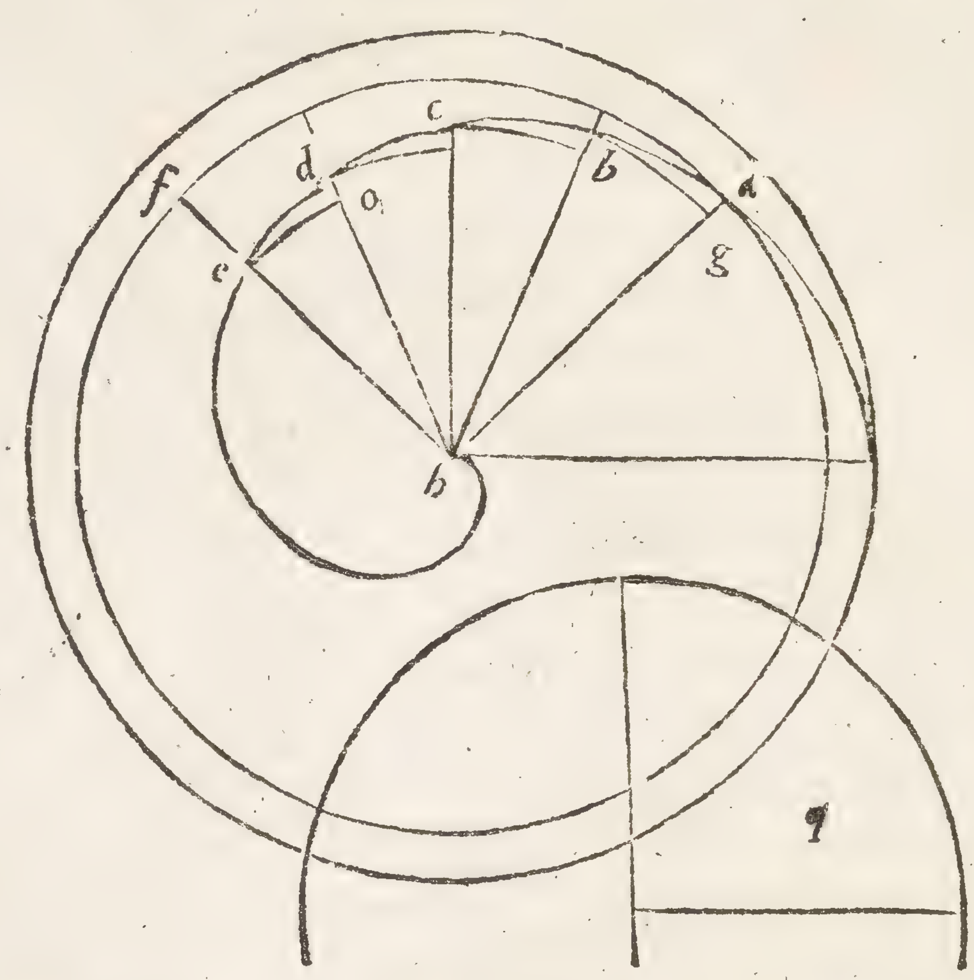


27 SPacium quod continetur à linea ſpirali, quę ſit minor ea quam una reuolutio deſcribit, quæqꝫ non habeat terminum initiū lineæ ſpiralis, ſed lineas rectas à terminis ſuis ad lineæ ſpiralis initium ductas, habet ad fruſtum quod eam quæ ex centro habeat æqualem maiori earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſint: circumferentiam uero eam quæ inter dictas lineas media intercipitur in parte lineæ ſpiralis, eam proportionem quam hæc utraqꝫ ſimul, cōtentum ſub lineis quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſunt, & tertia pars quadrati eius lineæ qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium iunctæ fuerunt. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e, minor ea quam una reuolutio deſcriberet: eius ſint termini a e. Eſto autem lineæ ſpiralis initium pūctum h, et centro h, interuallo autem h a, cir-

circulus deſcribatur, & concurrat eius circumferentia h e in puncto f. Oſtendendum eſt, quod ſpacium ab a b c d e linea ſpirali, & ab a h, h e contentum ad fruſtũ a h f, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul iſta, contentum ſub a h, h e, & tertia pars quadrati e f lineę ad quadratum lineæ h a. Eſto itaque circulus in quo ϛ q. cuius ſemidiametros ſit in potẽtia æqualis contento ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati e f. Et ſit angulus ad centrum eius æqualis angulo ad h conſtituto. Fruſtum itaque ϛ q, ad fruſtum h a f eandem habet proportionem, quam contentum ſub a h, h e, et tertia pars quadrati e f, habet ad quadratum h a. nam iſtorũ ſemidiametri hanc proportionem potentia inter ſe habent. Oſtendendum iam eſt, fruſtum ϛ q, æquale eſſe ſpacio contento ſub a b c d e linea ſpirali, & ſub a h, h e rectis. nam ſi non, uel maius erit, uel minus. Sit itaque primò maius, ſi eſſe poteſt. Spacio igitur poteſt figura quędam plana circũſcribi ex fruſtis ſimilibus cõpoſita, ita ut ipſa addat ſuper ſpacium minus eo quo ϛ q fruſtum excedit ipſum ſpacium dictum. eſto circumſcripta, & ſit fruſtorum ex quibus componitur dicta figura maius quidem h a r, minus uero h o d. Manifeſtũ eſt, his poſitis figuram circũſcriptam minorem haberi fruſto ϛ q. Iam actæ ſunt lineæ quæ faciunt angulos æquales ad h, uerſus circumferentiam fruſti h a f, in quam incidunt. Erunt iam quædam lineæ rectæ ſeſe æqualiter excedentes, quæ ab h in ſpiralem incurrunt, quarum maxima quidem h a, minima uero h e. erunt item aliæ lineæ rectæ numero quidem una pauciores illis, magnitudine autem inter ſe & maximæ illarum æquales, quæ à pũcto h ad fruſti a h f circumferentiam ipſi occurrunt, dempta h f. & ab omnibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ inter ſe & maximæ illarum ſunt æquales. & earum quæ ſeſe æqualiter excedunt, ab h e, nil confectum eſt. Fruſta igitur quæ à lineis inter ſeſe æqualibus & maximæ illarum confecta ſunt, ad fruſta confecta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempto quod a minima fruſto, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Fruſtis autem quæ à lineis inter ſe, et maximæ aliarum æqualibus conſtant, æquatur fruſtum h a f. Illis uero quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus ſunt, circũſcripta figura eſt æqualis. Minorem ergo proportionem habet h a f fruſtum ad figuram circumſcriptam, quàm quadratum h a ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quam autem proportionem habet ad dicta quadratum lineæ h a, eam habet fruſtum h a f ad fruſtum ϛ q. Quare fruſtum ϛ q, minus eſſe concluditur figura circumſcripta. Verum poſitum fuerat maius eſſe, & demonſtratum ex poſitione. Non eſt igitur ϛ q fruſtum maius ſpacio cõtento ſub a b c d e linea ſpirali, & h a, h e. Neq; utique minus eſſe poteſt. ponatur nãque minus, ſi eſſe poteſt, & reliqua eadem diſponantur. Rurſus ſpacio poteſt figura quædam plana inſcribi, ex ſimilibus fruſtis compoſita, ita ut dictũ ſpaciũ ſu



pra figurã inſcriptã minus addat, eo quo ipſum ſpacium excedit y q fruſtum. inſcribatur itaque: & fruſtorum ex quibus inſcripta figura conſtituitur, eſto maius h b c, minus uero o h e. Conſtat igitur, inſcriptam figuram fruſto y q eſſe maiorem. Rurſus erunt quædam lineæ ſeſe æqualiter excedentes à puncto h, ad lineam ſpiralem accedentes: quarum maxima quidem h a, minima uero h e. Sunt quoq; aliæ inter ſe, & maximæ illarum ęquales à puncto h, ad circumferentiam fruſti h a f productæ, excepta h a, quæ numero quidẽ illis ſunt una pauciores, magnitudine uero inter ſe & maximæ aliarũ æquales. & ab unaquaque fruſta ſimilia conſcripta ſunt: à maxima uero earũ quæ ſeſe ęqualiter excedunt, nullum conſcriptum eſt. Fruſta igitur à lineis æqualibus inter ſe, & maximę aliarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus contenta, dempto eo quod à maxima, maiorem habent proportionem, quàm quadratum h a, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quare & fruſtum h a f ad figuram inſcriptam, maiorem habebit proportionem, quàm ad y q fruſtum. Vnde ſequitur y q fruſtum maius eſſe figura inſcripta. At uero poſitũ fuerat, minus eſſe. Non poteſt igitur fruſtum y q minus eſſe ſpacio à ſpirali linea, & rectis h a, h e comprehenſo. quare eidem æquale eſſe neceſſe eſt.



28 EOrum quæ continentur à lineis ſpiralibus, & rectis quæ in reuolutionibus reputãtur ſpaciorum, id quidem quod tertium datur, eſt duplum ſecundi, quartum eſt eius triplum, quintum eſt quadruplum: & ſic deinceps ſecundum numeros creſcentes, ſemper ſequens ſpaciũ eſt multiplex ſecũdi, primũ autem ſpacium ſexta pars ſecundi eſſe demonſtratur. Eſto linea ſpiralis propoſita, & in prima, & in ſecunda, & in cæteris deinceps deſcripta reuolutionibus quotcunq;. Eſto pũctum h lineæ ſpiralis initium, & recta h e initium reuolutionis. Primum uero ſpacium ſit k, ſecundum l, tertium m, quartum n. Oſtendendum eſt itaque ſpacium k, ſextam

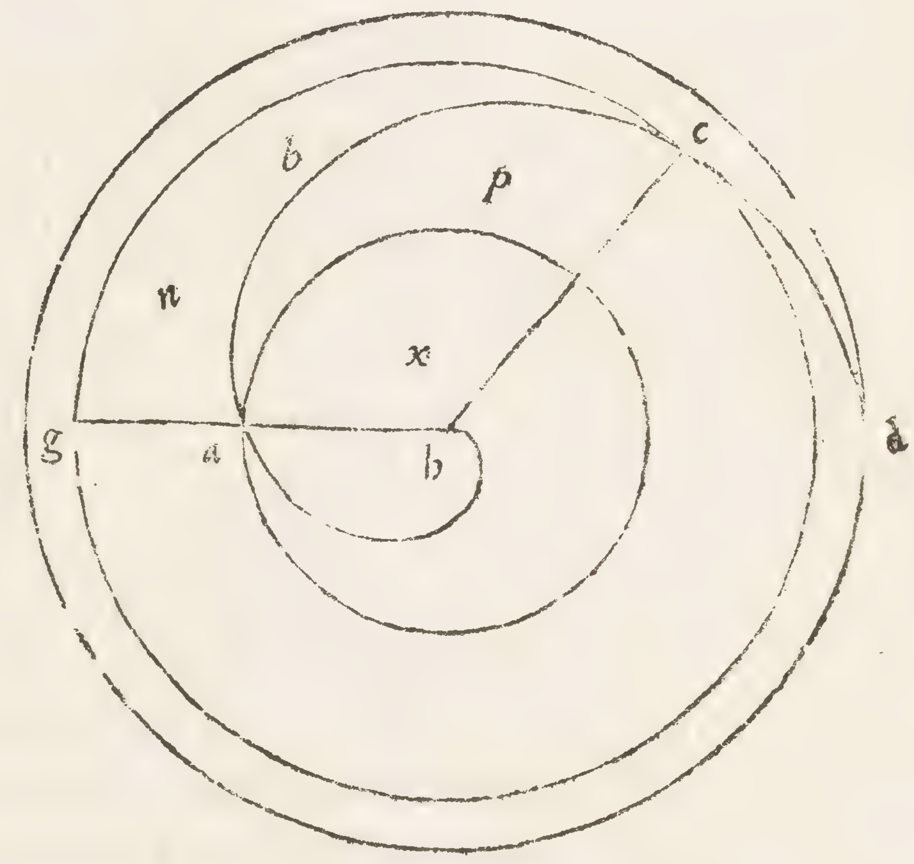


tam partem eſſe ſpacij ſe ſequentis, & ſpacium m duplum eſſe ipſius l, ipſum n triplum ipſius l. Et eorum quæ ſequuntur, ſemper id quod deinceps ſumitur multiplex ipſius l ſecundum numeros ſe ſequentes. Quod autem k ſit ſexta pars ipſius l, ſic oſtẽditur: quoniam l ſpacium eã habet proportionem ad circulum, ſecũdum quam habent ſeptem ad duodecim. Secundus uero circulus ad primũ, ſicut 12 ad 3. conſtat enim. Circulus uero primus ad ſpacium k, ſicut tria ad unum. k igitur ſexta pars eſt ipſius l. Rurſus k l m ſpacium ad circulum tertium, eam oſtenſum eſt habere proportionem, quam utraq; ſimul, cõtentum ſub c h, h b, et tertia pars quadrati c b ad quadratum ipſius c h. Tertius uero circulus habet ſe ad ſecũdum circulum, ſicut quadratũ h b. Circulus item ſecundus habet ad k l ſpacium, ſicut quadratũ h b ad utraq; ſimul, ad cõtentum ſub h b, h a, & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter ſe, quam decem & nouem ad ſeptem. Spaciũ uero k l ad ſpacium l, ſicut ſeptem ad ſex. Cõſtat igitur ſpacium m, ipſius l eſſe duplum. Quod autem ea quæ deinde ſequuntur, ſecundum numeros deinde ſequẽtes habeant proportionẽ, deinceps oſtendetur. Nam k l m n x, ad circulum cuius ea quæ ex centro eſt h e, eam habet proportionẽ quam utraq; ſimul, contentũ ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad quadratum h e. Circulus uero, cuius quæ ex centro eſt h e, ad circulum cuius quæ ex cẽtro eſt h d, eam habet proportionẽ, quã quadratum h e, ad quadratum h d. Circulus autem cuius quæ ex centro eſt h d, ad ſpacium k l m n, eam habet proportionem, quam quadratum h d, ad utraque ſimul iſta, ad id quod continetur ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati d c. Spaciũ igitur k l m n x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Diuidendo, & ſpacium x ad ſpacium k l m n, eam habet quam exceſſus contenti ſub e h, h d, cum tertia parte quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c, & tertiam partem quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c: & tertiam partem quadrati d c. utraq; uero illa ſimul excedunt iſta ſimul utraq;, eo quo contentum ſub e h, h d, excedit contentum ſub d h, h c. Excedunt autem eo quod ſub d h, e c. Spacium igitur x ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e, ad contentũ ſub d h, h c, & tertiã partẽ quadrati c d. Per hæc aũt eadem oſtẽdetur, quod ſpaciũ n ad ſpaciũ k l m, eam habet, quã cõtentum ſub h c, b d, ad utraq; ſimul iſta, ad contentũ ſub c h, h b, & tertiam partem quadrati c b. Spacium ergo n, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h c, b d. itemq; quod ſub b h, h c, & tertia pars quadrati c b, ad contentum ſub h c, b d. Conſtat enim diuidendo, & conuerſim. Hæc autem æquantur cõtento ſub d h, h c, & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur ſpacium x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e ad utraq; ſimul iſta, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Spacium uero k l m n, ad ſpacium n, eam quam utraq; ſimul iſta contentum ſub d h, h c & tertia pars quadrati c d, ad contentum ſub h c, d b. Habet igitur ſpacium x, ad ſpacium n, eam quam contentum ſub h d, c e, ad contentum ſub h c, d b. Contentum autem ſub h d, c e, ad cõtentum ſub h c, d b, eam habet quam h d ad h c, cum c e ſit ipſi b d ęqualis. Conſtat itaq;, quod ſpacium x ad ſpacium n, eam habet quã h d ad h c. Similiter oſtendetur, ſpacium n ad ſpacium m, eam habere proportionem quam habet h c ad h b, & m ad l, ſicut b h ad h a. Lineæ uero e h, d h, c h, b h, a h, habent proportionem, quam numeri deinceps continenter ſumpti.

SI in linea ſpirali quacunq; reuolutione deſcripta, duo pũcta ſumant̃, quæ non ſint eius termini, & ab iſtis ducant̃ lineæ rectæ ad initiũ lineæ ſpiralis, & cẽtro ſpiræ initio, interuallis uero ipſis lineis quæ ad initiũ ſpiræ à pũctis ductæ ſint, circuli deſcribantur: ſpacium comprænhenſum, ab ea maioris circuli circumferentia quæ media inter lineas rectas, & ſpiram inter eaſdem lineas comprænhenſam, & à linea extrà ducta capitur, eã habet proportionẽ ad ſpaciũ comprænhẽſum à circũ 29

q 2 feren

ferentia minoris circuli, & ab eadem ſpira & à linea recta, quæ earũ terminos iungit, quãq; ex centro circuli maioris cum tertijs duab. exceſſus eius quo ea quæ ex centro maioris circuli excedit eam quæ ex centro minoris ad eam quæ ex centro maioris, cum una eiuſdem exceſſus tertia parte. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d in una reuolutione deſcripta. & ſumantur in ea duo puncta a c. Eſto punctũ h initium ſpiræ. & ab a & c ducãtur ad h lineę. & cẽtro h, interuallis h a, h c, circuli deſcribantur. Oſtendendum quod ſpacium x ad ſpacium p, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul a h, et duæ tertiæ g a, ad utramq; ſimul, ad a h, & unam tertiã ipſius g a. nam ſpaciũ n p, ad fruſtũ g c h, oſtẽſum eſt eam habere proportionem, quam habet contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati a g, ad quadratum h g. ipſum



ergo x, ad n p eam habet, quam contentum ſub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati a g ad utraq; ſimul, ad contentum ſub a h, h g, & tertiam partem quadrati g a. Et quoniam ſpacium n p, ad fruſtum n p x, eam habet quam utraq; ſimul, contentũ ſub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h g. Fruſtum aũt n p x, ad fruſtum n, eam habet quã quadratũ h g ad quadratũ h a. Spacium quoq; n p, ad ipſum n, eam habebit quam utraq; ſimul, contentum ſub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. Igitur n p ad p, eam habet quam utraq; ſimul, contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub g a, h a, & tertiam partem quadrati g a. Quoniam ſpacium x ad n p eam habet, quam utraque ſimul, contentum ſub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque ſimul, ad contentum ſub g h, h a, & tertiam partem quadrati g a. Spacium autem n p ad p, eam habet quam utraq; ſimul, contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub g a, a h, & tertiam partem quadrati g a. Habebit quoq; x ad p, eam quam habent utraque ſimul, cõtentum ſub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, g a, & tertiã partem quadrati g a. Iſta uero utraq; ſimul, contentum ſub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, g a, & tertiam partem quadrati g a, eam habent quam utraque ſimul, ipſa h a, & duæ tertiæ ipſius g a, ad utraq; ſimul, ad ipſam h a, & tertiam partem ipſius g a. Conſtat igitur, ſpacium x ad ſpacium n, eam habere proportionẽ, quam utraq; ſimul, ipſa h a, & duæ tertiæ ipſius g a, ad ipſam h a, & tertiam ipſius g a, utraq; ſimul ſumpta.

FINIT ARCHIMEDIS TRACTATVS de Lineis ſpiralibus.

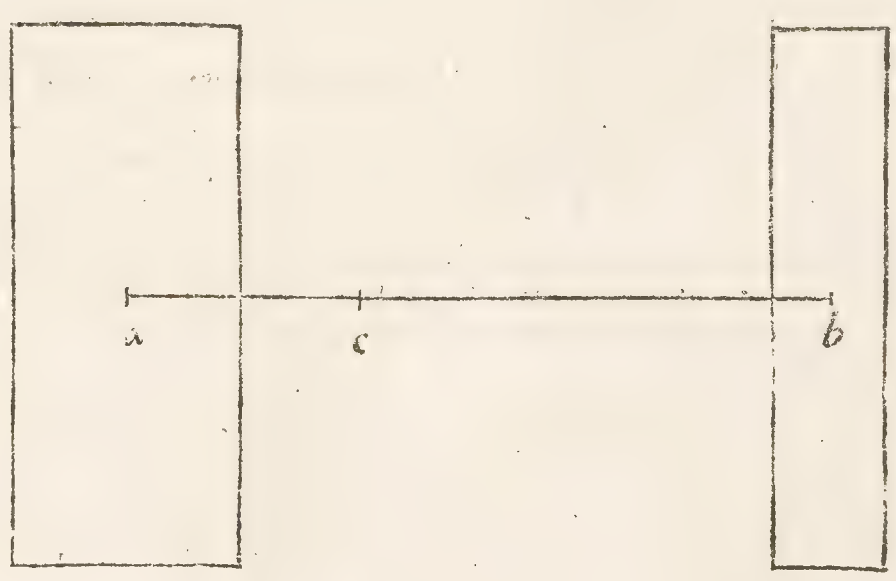
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENtra grauitatis planorum.

PETIMVS grauia æqualia, æquali diſtantia poſita, inter ſe æqualiter ponderare. Grauia item ęqualia, diſtantia inæquali ſuſpenſa, non æqualiter ponderare: ſed id quod in longiori diſtantia pendet, ad graue deferri. Item, ſi grauibus ſecundũ quandam diſtantiam æqueponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqualiter ponderare, ſed illud ad graue deferri, cui quod graue fuerit adiectum. Similiter etiam ſi ab altero eorum auferatur graue, tunc non æqualiter ponderare, ſed id à quo nil ſit ablatum, ad graue deferri. Figuris planis ſimilibus & æqualibus inter ſe coaptatis, centra quoq; grauitatis earum erunt inter ſe coaptata. Si uero figuræ ſimiles fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt ſimiliter poſita. Dicimus puncta ſimiliter poſita eſſe ad ſimiles figuras, à quibus lineæ rectæ, ſecundum angulos æquales ductæ, ad latera inuicem correſpondentia æquales angulos efficiant. Item ſi magnitudines quædam in quibuſdam diſtantijs poſitæ æqualiter ponderent, & quæcunq; eis æquales in eiſdem diſtantijs poſitæ æqualiter ponderabunt. Cuiuſcunq; figuræ cuius circum limbus fuerit, in eandem partem connexus, centrum grauitatis intra figuram eſſe oportet. Suppoſitis his, ſequitur:

GRauia, quæ in diſtantijs æqualibus poſita æqualiter ponderent, æqualia eſ- 1
ſe. Si enim eſſent inæqualia, auferreturq; à maiori exceſſus, reliqua non æqualiter ponderarent: cum ab altero æqueponderantiũ aliquid fuerit ablatum. Quare grauia in diſtantijs æqualibus æqueponderantia, æqualia eſſe neceſſe eſt.

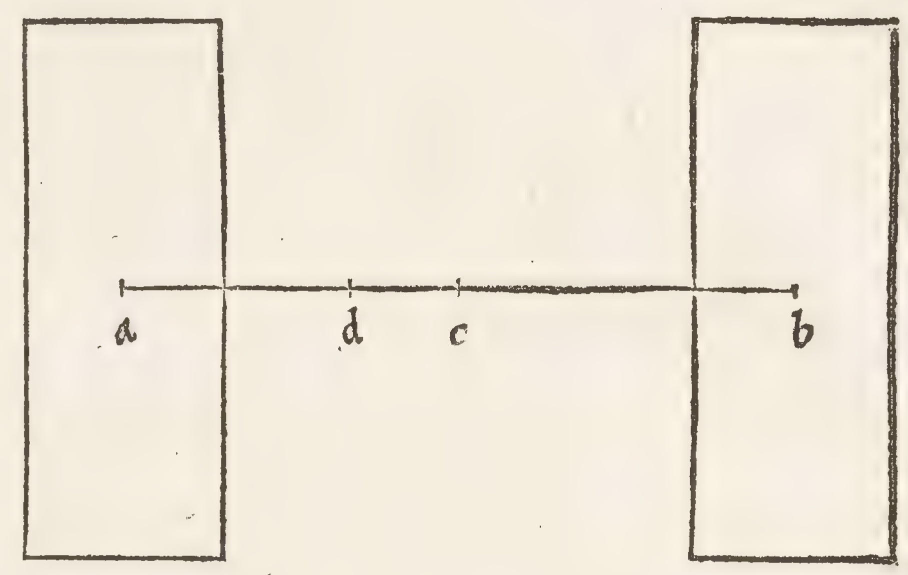
GRauia in diſtantijs æqualib. poſita, ſi fuerint inæqualia, non æquepondera 2
bunt, ſed maius eorũ inclinabitur. Ablato enim exceſſu, æqueponderabũt: cum æqualia in diſtantijs poſita æqualibus æqueponderent. Eo autem quod ablatum fuerit adiecto, iam in maius inclinabitur, cum alteri ęqueponderantium ſit aliquid adiectum.

SI grauia inæqualia in diſtantijs inæqualibus ſuſpenſa, æqualiter ponderent: 3
maius in minori, minus in maiori diſtantia ſuſpendetur. Eſto grauia inæqualia a b, & ſit a maius, b minus: & æqueponderent ab a c, c b diſtãtijs. Oſtendendum eſt, quod a c minor eſt c b. nam ſi non, ablato exceſſu quo a excedit b, cum iam ab altero ęqueponderantium ſit ablatum aliquid, inclinabitur ad b: quod non uerum eſt. nam a c ſi eſſet æqualis b c, æquepõderarent. nam æqualia in diſtantijs ęqualibus. Si autem a c maior eſſet b c, inclinaretur ad a. nam æqualia in diſtãtijs inæqualib. nõ æqueponderãt. Sed quod in maiori diſtãtia eſt, inclinatur. ac iam propter hæc a c minorę eſſe b c neceſſe eſt. Manifeſtũ aũt, quod grauia quæ in di-

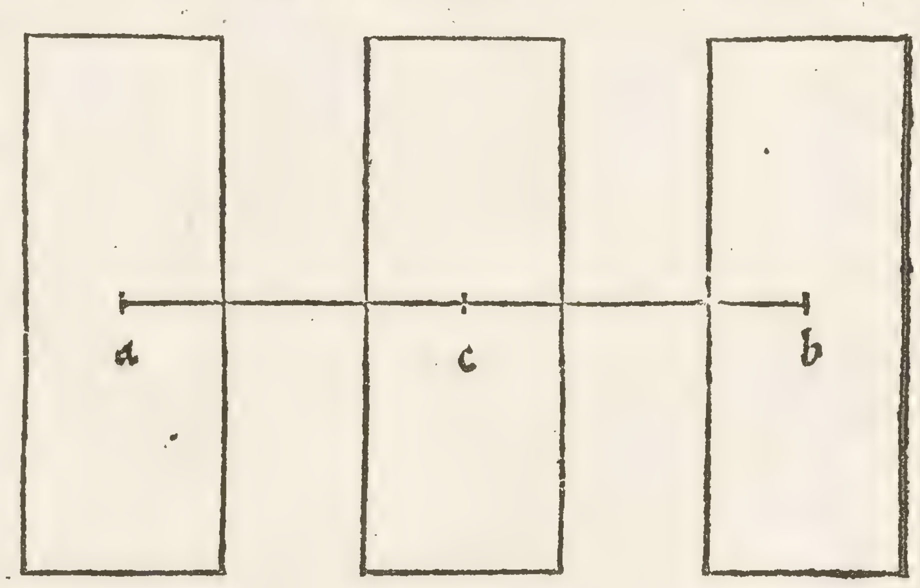


ſtantijs inæqualibus æqueponderāt, inæqualia ſunt. & eorū maius eſt illud quod in minori diſtantia pendet.

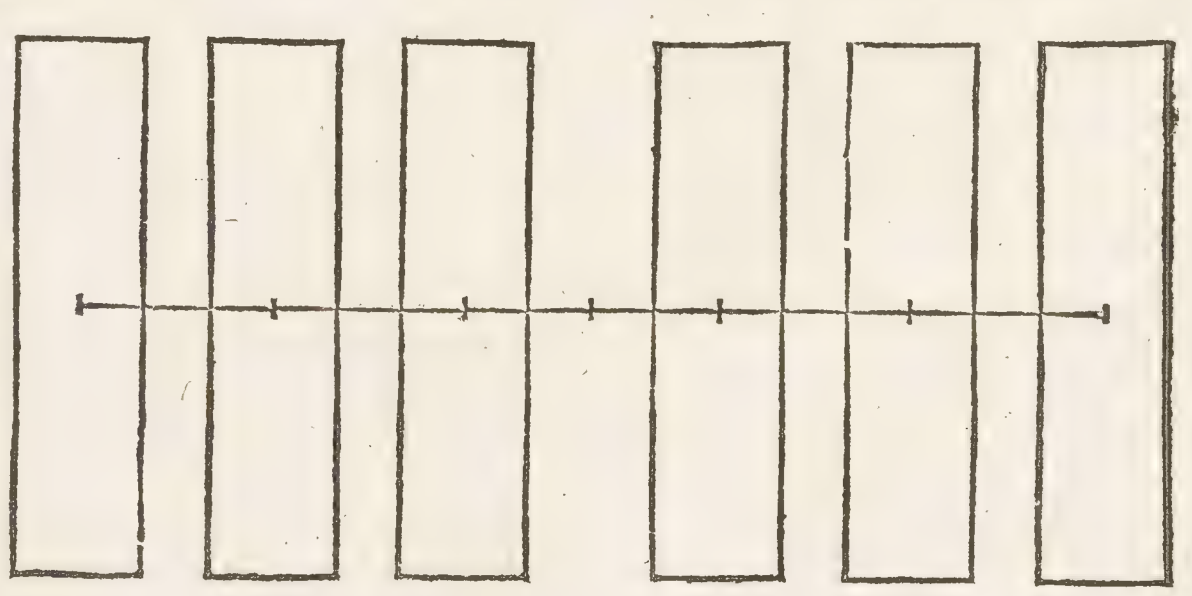
4 SI duæ magnitudines æquales non idem centrum grauitatis habuerint, magnitudinis ex utraque compoſitæ cētrum grauitatis eſt medium lineæ rectæ, quæ dictarum magnitudinum centra grauitatis coniungit. Eſto itaq; ipſius a centrū grauitatis ipſum a, et ipſius b ipſum b. Et ſit ducta linea a b, quæ diuidatur in duo æqualia in puncto c. Dico quod utrarumq; compoſitarum cētrum grauitatis eſt ipſum c. nam ſi non, eſto utrarumq; a b magnitudinum compoſitarum centrum grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod autem eſt in linea a b, prædemonſtratum eſt. Quoniam igitur d eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex a & b, apprehenſo d pūcto æqueponderabūt magnitudines Igitur a b æqueponderabunt in a d, d b diſtantijs, quod eſſe non poteſt. nā æqualia in diſtantijs inæqualibus non æqueponderant. quare manifeſtum eſt, ipſum c centrum grauitatis eſſe magnitudinis ex ipſo a & ipſo b compoſitæ.



5 SI autem trium magnitudinum centra grauitatis in una linea fuerint poſita, & magnitudines æqualem inter ſe grauitatem habuerint, & lineæ rectæ inter cētra ductæ æquales extiterint: magnitudinis ex dictis magnitudinibus compoſitæ centrum grauitatis punctum illud erit, quod idem eſt mediæ magnitudinis centrum grauitatis. Eſto tres magnitudines a b c, centra uero grauitatis earum ſint a b c, pūcta in una recta linea poſita. Sint quoq; a b c ęquales: & lineæ a c, c b rectæ æquales. Dico centrum grauitatis magnitudinis illius, quæ ex omnibus illis magnitudinib. compoſita fuerit, eſt punctum c. Quoniam itaq; a b, magnitudines æqualē habent grauitatem, centrum grauitatis earum erit punctum c. Quoniam a c, c b, rectæ æquales ſunt: eſt etiam ipſius c centrum grauitatis c punctum. Conſtat quod magnitudinis quoq; ex omnibus illis compoſitæ centrum erit grauitatis punctum, quod eſt magnitudinis mediæ inter illas centrum grauitatis.



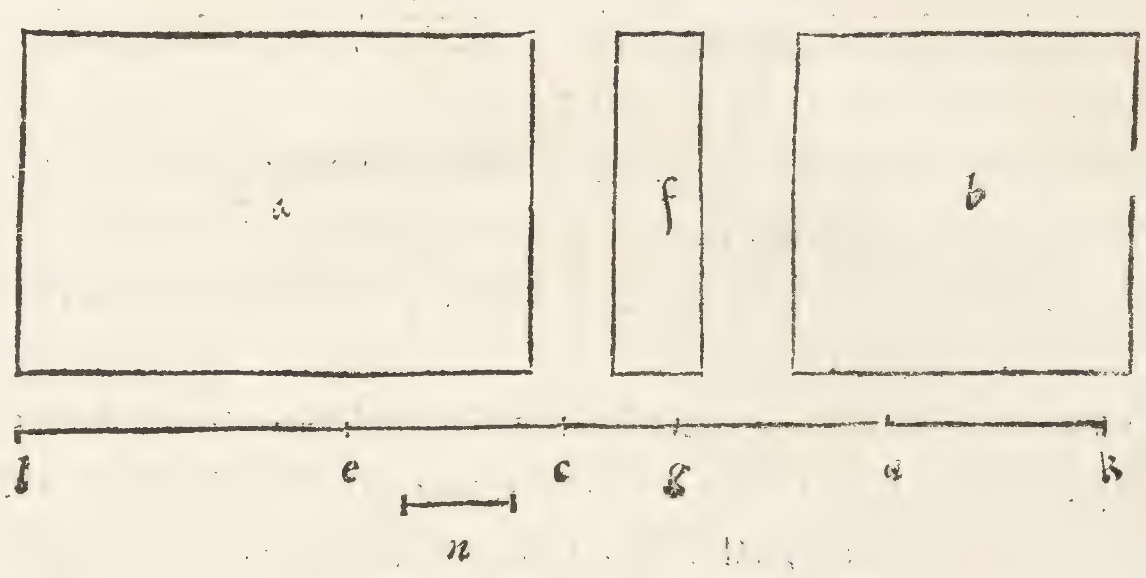
Ex hoc manifeſtum eſt, quod quotcunq; magnitudinum numero imparium, ſi centra grauitatis, in eadem linea ſint conſtituta, & ſi magnitudines cęteræ ab ea quæ earum media exiſtit, hincinde æqualiter quęque duæ correſpondentes deſtiterint, habuerintq; grauitatem inter ſe æqualem, & lineæ rectæ inter earum cētra mediæ fuerint inter ſe æquales, eius magnitudinis quę ex illis omnibus compoſita



poſita

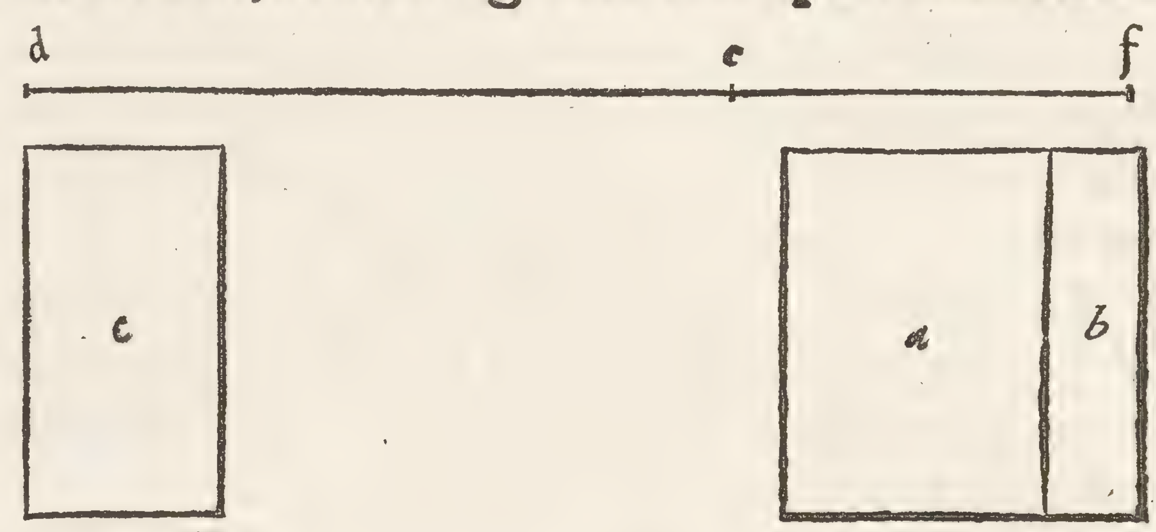
poſita fuerit, centrum grauitatis erit punctum, quod magnitudinis mediæ centrũ grauitatis exiſtit. Quod ſi pares numero fuerint magnitudines, & centra earum grauitatis in eadem linea recta poſita fuerint, & earum mediæ grauitate æquali inter ſe conſtiterint, & lineæ rectæ inter earum centra mediæ inter ſe æquales fuerint, eius quæ ex illis omnibus componetur magnitudinis centrum grauitatis erit medium lineæ rectæ punctum, eius uidelicet quæ centra grauitatis magnitudinum coniungit, uti in figura ſubſcripta patet.

Magnitudines quæ fuerint in grauitate commenſurabiles, æqueponderabunt, 6
ſi in diſtantijs quæ ſecundum grauitatum proportionem fuerint cõſtitutæ, permutatim ſuſpendantur. Eſto magnitudines in grauitate commenſurabiles a b. Eſto e d item quædam diſtantia, & ſicut a ad b, ita d c ad c e. Oſtendendum itaqꝫ, quod magnitudinis ex utriſqꝫ a & b compoſitę centrum grauitatis eſt c punctum. Quoniam itaqꝫ eſt ſicut a ad b, ita d c ad c e. ipſum uero a eſt ipſi b commẽſurabile. ipſa ergo d c eſt ipſi c e commenſurabilis, recta ſcilicet rectæ. quare e c, c d erit quædam communis menſura quæ ſit n, & ponatur ipſi e c æqualis utraqꝫ iſtarum d g, d k. Ipſi aũt d c eſto e l æqualis. Et quoniã d g æquatur c e, & d c æquatur e g. quare & l e æquatur ipſi e g. Igit̃ l g dupla eſt ipſius d c, & ipſa g k ipſius c e. Quare n utrãqꝫ l g, g k menſurabit, cum earum medietates metiatur. Et quoniam eſt ſicut a ad b, ita d c ad c e. Sicut autem d c ad c e, ſic l g ad g k. nam utraqꝫ utriuſque dupla exiſtit. Igitur ſicut a ad b, ſic l g ad g k. Quotuplex autem eſt l g ipſius n, eo ſit numero multiplex ipſa a ipſius f. Erit ergo ſicut l g ad n, ſic a ad f. Eſt autem ſicut k g ad l g, ita b ad a. ab æqua igitur eſt, ſicut k g ad n, ſic b ad f. æque multiplex eſt igitur k g ipſius n, ſicut b ipſius f. Oſtenſum uero eſt, & ipſum a quoqꝫ ipſius f multiplex eſſe. quare ipſũ f, erit ipſorum a & b communis menſura. Diuiſa igitur l g in partes æquales ipſi n, & a in partes æquales ipſi f: partes ipſius l g, quæ ipſi n in magnitudine æquantur, tot erunt numero, quot ſunt partes ipſius a, ipſi f in magnitudine æquales. Quare ſi unicuiqꝫ partium l g apponatur, magnitudo æqualis ipſi f cẽtrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquãtur ipſi a, & magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrum grauitatis erit ipſum e. nam omnes numero pares ſunt propterea, quod ipſa l e æquatur ipſi e g. Similiter autem oſtendetur, & ſi unicuiqꝫ portionum k g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, centrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquales erunt ipſi b, & magnitudinis ex omnibus illis compoſitę centrum grauitatis erit ipſum d. Eſt igitur a quidem impoſitum ad ipſum e, & ipſum b ad ipſum d. Sunt itaque iam magnitudines inter ſe æquales in lineam rectam poſitę, quarum centra grauitatis æqualiter inter ſe diſtant compoſitę, & numero pares. Conſtat igitur, quod compoſitę ex omnibus magnitudinibus centrum grauitatis eſt diuiſio in duo ęqua lineę rectæ, in quã centra magnitudinum mediarum ſunt poſita. Cũ igitur l e ſit æqualis c d, & ipſa e c ipſi d k: tota igitur l c æquatur ipſi c k. Quare magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrũ grauitatis eſt c punctum. Poſito igitur ipſo a ad ipſum e, & ipſo b ad ipſum d, ęqueponderabũt ſecundum c punctum.



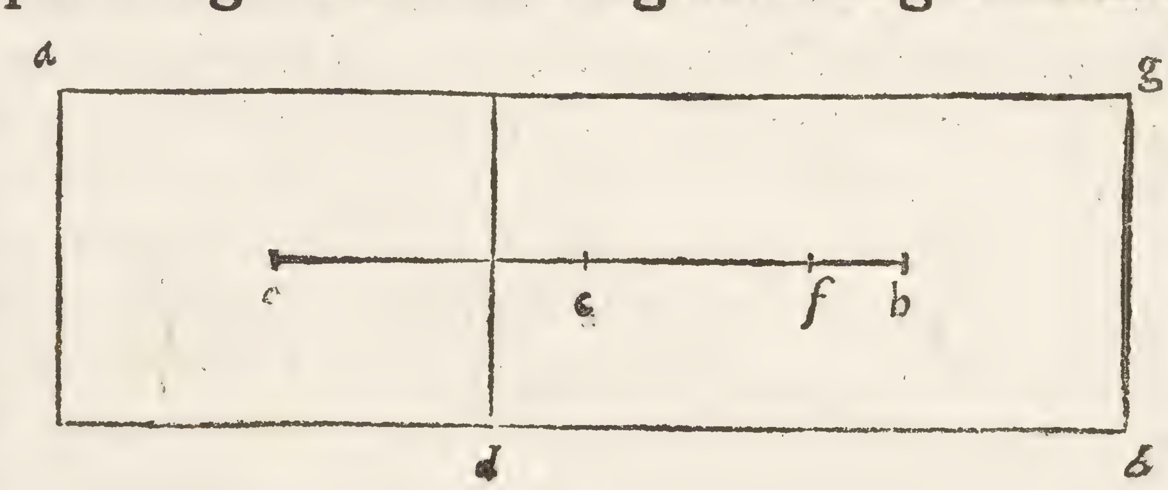
SI magnitudines incommenſurabiles fuerint, ſimiliter ęqueponderabunt, ſi in 7
diſtantijs ſuſpendantur, quę proportionem inter ſe magnitudinum mutuam ha-

habuerint. Sunto a b c magnitudines incommenſurabiles, diſtantię uero d e, e f. Habeat autem a b ad ipſum c eam proportionem, quam diſtantia e d ad e f. Dico quod magnitudinis compoſitæ ex a b c, centrum grauitatis eſt punctum e. nam ſi non, ęqueponderabit a b poſitum ad f, ipſi c poſito ad ipſum d, uel maius eſt a b ipſo c, ita ut ęqueponderet ipſi c, uel non. Eſto maius, & auferatur ab ipſo a b, minus exceſſu quo a b excedit c, ita ut æqueponderet: & reſiduum ſit commenſurabile ipſi c, quod ſit a.



Quoniam igitur magnitudines a c ſunt commenſurabiles, & minorem habet proportionem a ad c quàm d e ad e f, non ęqueponderabunt a & c in diſtantijs d e, e f, poſito ipſo a in f, & c in ipſo d. Per hęc eadem neque ſi c maius exiſtit, quàm ut ęqueponderet ipſi a.

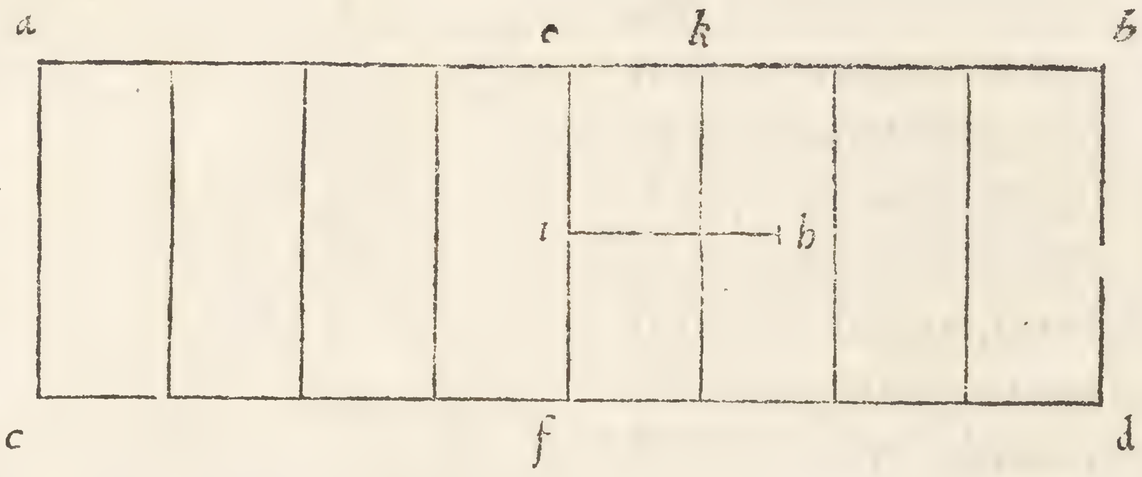
8 SI ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, reſiduæ magnitudinis centrum grauitatis exiſtit in linea recta, quæ centra grauitatis totius magnitudinis & ablatæ coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipſa à centro totius magnitudinis educitur extra, atq; in eo puncto quo ipſa ſic terminatur, ut ipſa iam educta ad eam quæ iungit centra prędicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatæ grauitas ad grauitatem reſiduæ. Eſto magnitudinis alicuius centrum grauitatis c, ipſa uero ſit a b. & auferatur ab ipſa a b magnitudo a d, cuius centrum grauitatis ſit e. ducta uero e c, & extra ducta intercipiatur c f, quæ eam proportionē habeat ad e c, quam habet grauitas magnitudinis a d ad grauitatem magnitudinis d g.



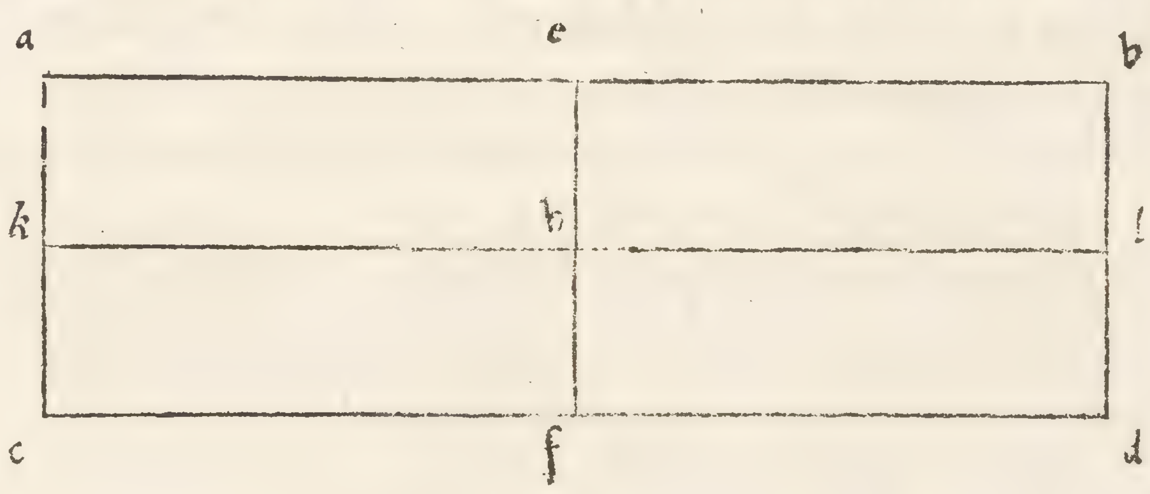
Oſtēdendum quòd magnitudinis d g centrum grauitatis eſt f punctum. Nam ſi non, eſto ſi fieri poteſt, h punctum. Quoniam igitur a d magnitudinis centrum grauitatis eſt e, ipſius uero d g eſt punctum h, magnitudinis ex utraque compoſitæ centrum grauitatis erit in linea e h, ita diuiſa ut partes mutuam inter ſe magnitudinum proportionē habeant. Quare non erit c punctum ſecundum proportionalem ſectionem, ei quæ dicta eſt. quare c non eſt centrum grauitatis eius magnitudinis, quæ ex a d, d g cōpoſita eſt: hoc eſt ipſius a b. poſitum uero fuerat, ipſum c eſſe dictum centrum. nō erit igitur h punctum centrum grauitatis d g magnitudinis.

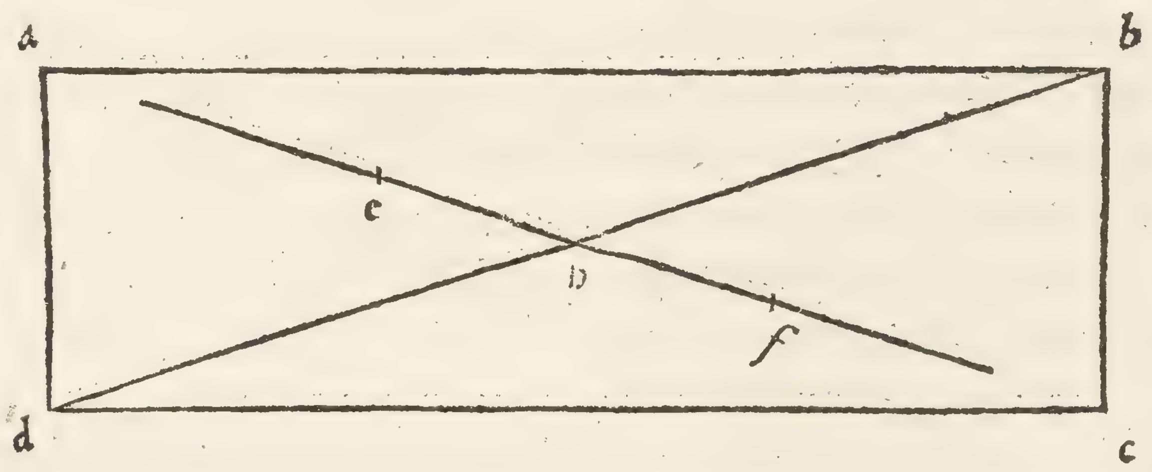
9 CVIuslibet figuræ æquediſtantiū laterum cētrum grauitatis eſt in linea recta, quæ coniungit latera oppoſita ipſius figuræ æquediſtantium laterum, diuiſæ in duo æqua, quæ latera in diuiſione figuræ ſecta fuerint. Eſto figura æquediſtantium laterum a b c d, in diuiſione uero in duo æqua ipſius a b c d, eſto e f. Dico a b c d centrum grauitatis eſſe in linea e f. nam ſi non, eſto ſi eſſe poteſt punctum h, & ducatur h i æquediſtans ipſi a b. Linea uero e b continuæ in duo æqua diuiſa erit, tandem quædam intercepta minor h i. Et diuidatur utraq; e b, e a in lineas æquales e k, & à punctis diuiſionum æquediſtantes ipſi e f. Diuidetur itaq; tota figura in figuras æquediſtantium laterum æquales, & ſimiles ipſi k f. Figuris itaq; æquediſtantium laterum ſimilibus, & æqualibus ipſi k f, inuicem coaptatis,

tis, & centra quoq; grauitatis earum erunt inuicem coaptata. Erunt iam magnitudines quædam æquediſtantiũ laterũ æquales ipſi k f, numero pares, & centrũ grauitatis earũ in eadem linea poſita, & media æqualia, & omnia quæ utrinq; ipſis medijs aſſiſtunt, & ipſa æqualia ſunt. & lineæ inter centra medię ſunt ęquales. Magnitudinis ergo ex omnibus compoſitæ centrũ grauitatis eſt in linea recta, quæ iungit centra grauitatis ſpaciorum eorũ quæ in medio ſunt. nõ eſt autem. nam h eſt extra figuras medias. Conſtat ergo, centrum grauitatis figuræ a b c d æquediſtantium laterum eſſe, in e f linea recta.



CVIuslibet figuræ ęquediſtantium laterum centrum grauitatis eſt punctum, 10
in quo diametri coincidunt. Eſto figura æquediſtantium laterum a b c d, & in ipſa ſit linea e f, diuidens in duo æqua a b c d lineas. & item k, l diuidens a c, b d. Eſt iam figuræ a b c d ęquediſtantium laterum centrum grauitatis in linea e f. Oſtenſum namq; eſt hoc, et eadem ratione eſt in linea k l. Igitur punctum h eſt cẽtrum grauitatis. in puncto autem h diametri figuræ æquediſtantium laterum cõcurrent, ut prius demonſtratum fuit. Contingit autem & aliter hoc idem demonſtrare. Eſto figura æquediſtantium laterum a b c d. eius diametros d b. trianguli ergo a b d, b d c erũt inter ſe ſimiles & æquales. quare ipſis coaptatis, & eorum centra grauitatis inter ſe coincident. Eſto iam trianguli a b d, centrum grauitatis e pũctum, & † ducatur e h, & protrahatur donec aſſumatur h f æqualis e h. Coaptato itaq; a b d triãgulo ad triangulum b d c, & latere a b ad latus d c. accommodato uero latere a d ad latus b c, coaptabitur quoq; e h linea recta ad h f rectam, & e punctum in f cadet, ſed et in centrum grauitatis trianguli b d c. Quoniam igitur trianguli a b d centrum grauitatis eſt e punctum, trianguli uero b d c eſt f, manifeſtum eſt, quod magnitudinis ex utriſq; compoſitæ centrum grauitatis eſt punctum medium lineæ e f rectæ, quod quidem eſt h punctum.

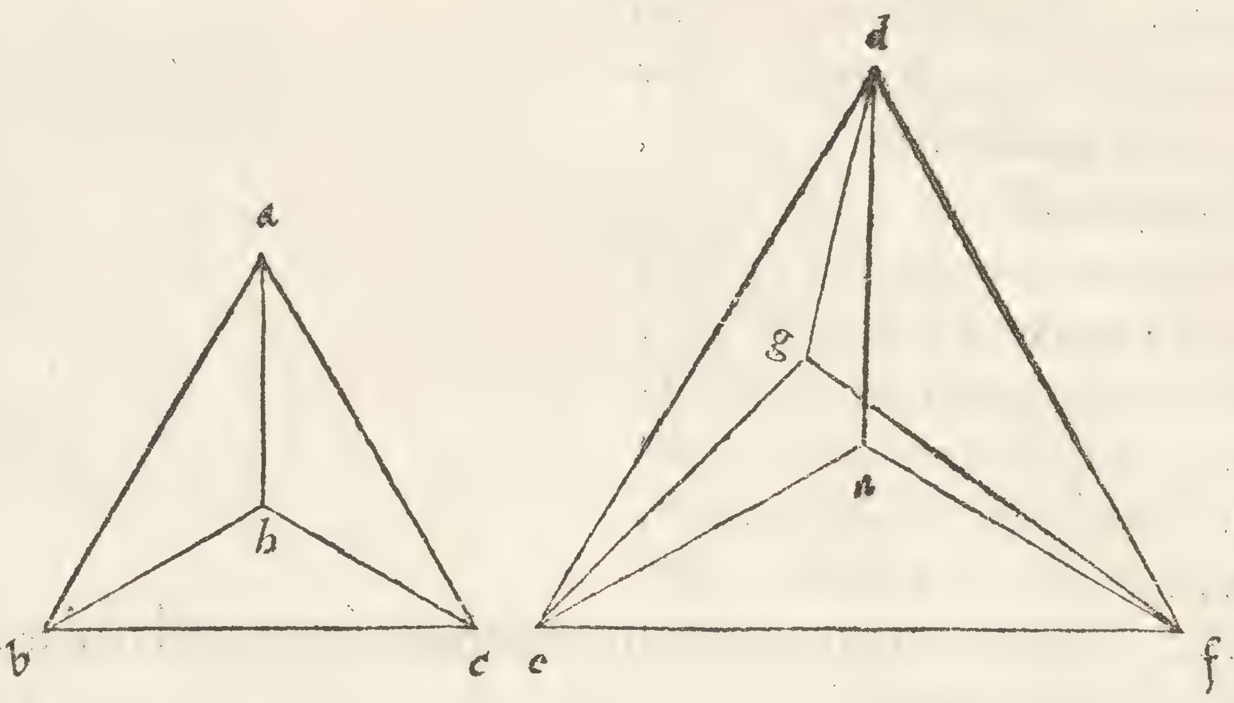




† Intellige diametrum b d diuiſam eſſe per mediũ in h puncto.

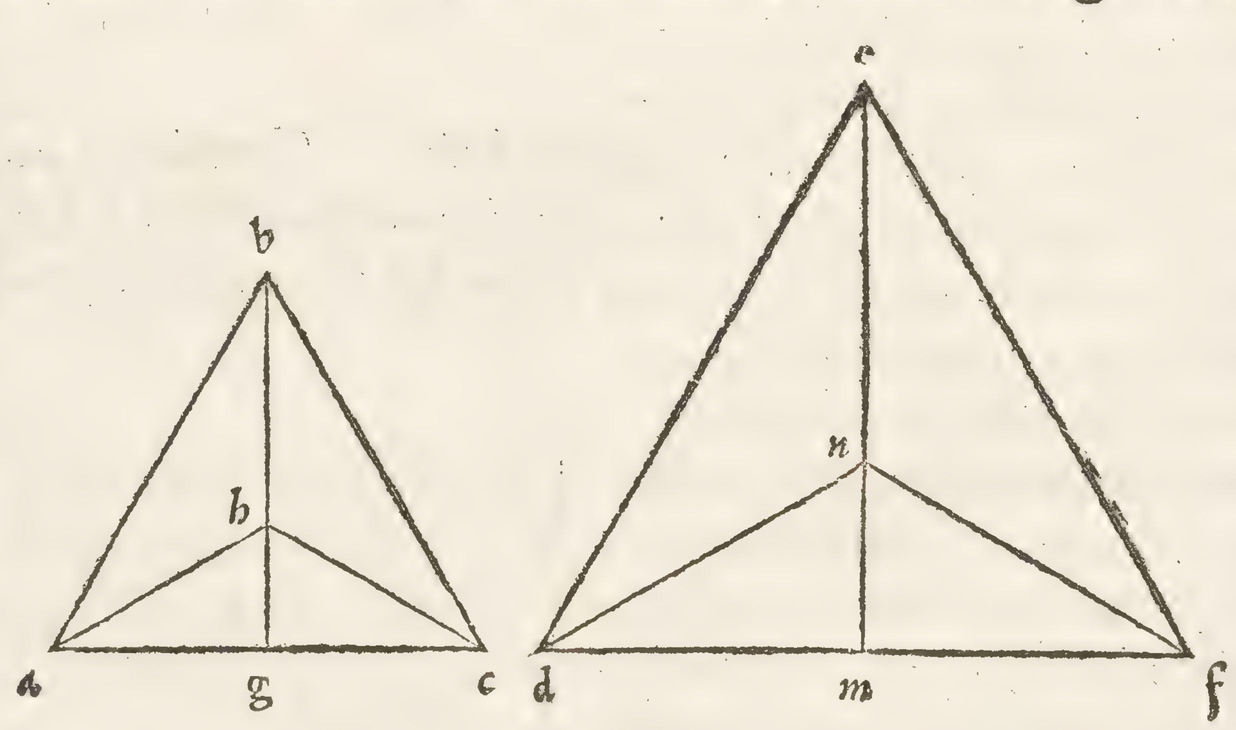
SI duo trianguli fuerint inter ſe ſimiles, & duo in ipſis puncta ſimiliter ad trian- 11
gulos ſe habentia in poſitione, & punctũ unum eius in quo eſt, triãguli ſit centrum grauitatis: reliquum quoq; punctum eius in quo eſt, trianguli centrum grauitatis exiſtet. Puncta uero dicimus ſimiliter ſe habere in poſitione ad ſimiles figuras, à quib. lineæ rectæ ab angulis ęqualibus eductæ, ad latera inter ſe correſpõdentia angulos æquales efficiant. Eſto duo trianguli a b c, d e f. & eſto ſicut a c ad

d f,ſic a b ad d e,& b c ad e f. & ſint in dictis triangulis puncta ſimiliter poſita,quæ ſint h, n,ſimiliter ſe in poſitione habentia ad triangulos a b c,d e f. & ſit h centrum grauitatis a b c trianguli. Dico quod n eſt centrum grauitatis d e f trianguli. nam ſi non,eſto ſi eſſe poteſt g punctum grauitatis trianguli d e f, & iūgantur h a,h b,h c. item n d,n e,n f. Quoniam igitur triangulus a b c eſt ſimilis triangulo d e f, & centra grauitatis ſunt h g puncta: ſimilium uero figurarum centra grauitatis ſimiliter



poſita ſunt,ita ut æquales angulos efficiant ad latera eiuſdem rationis unūquodque ad unumquodq;. Angulus igitur g d e,erit æqualis angulo h a b. Sed angulus h a b eſt æqualis angulo e d n: quia puncta h n, ſimiliter poſita ſunt. Angulus igitur e d g erit æqualis angulo e d n,maior ſcilicet minori: quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur g punctus centrum grauitatis trianguli d e f. quare punctum n erit centrum dictum.

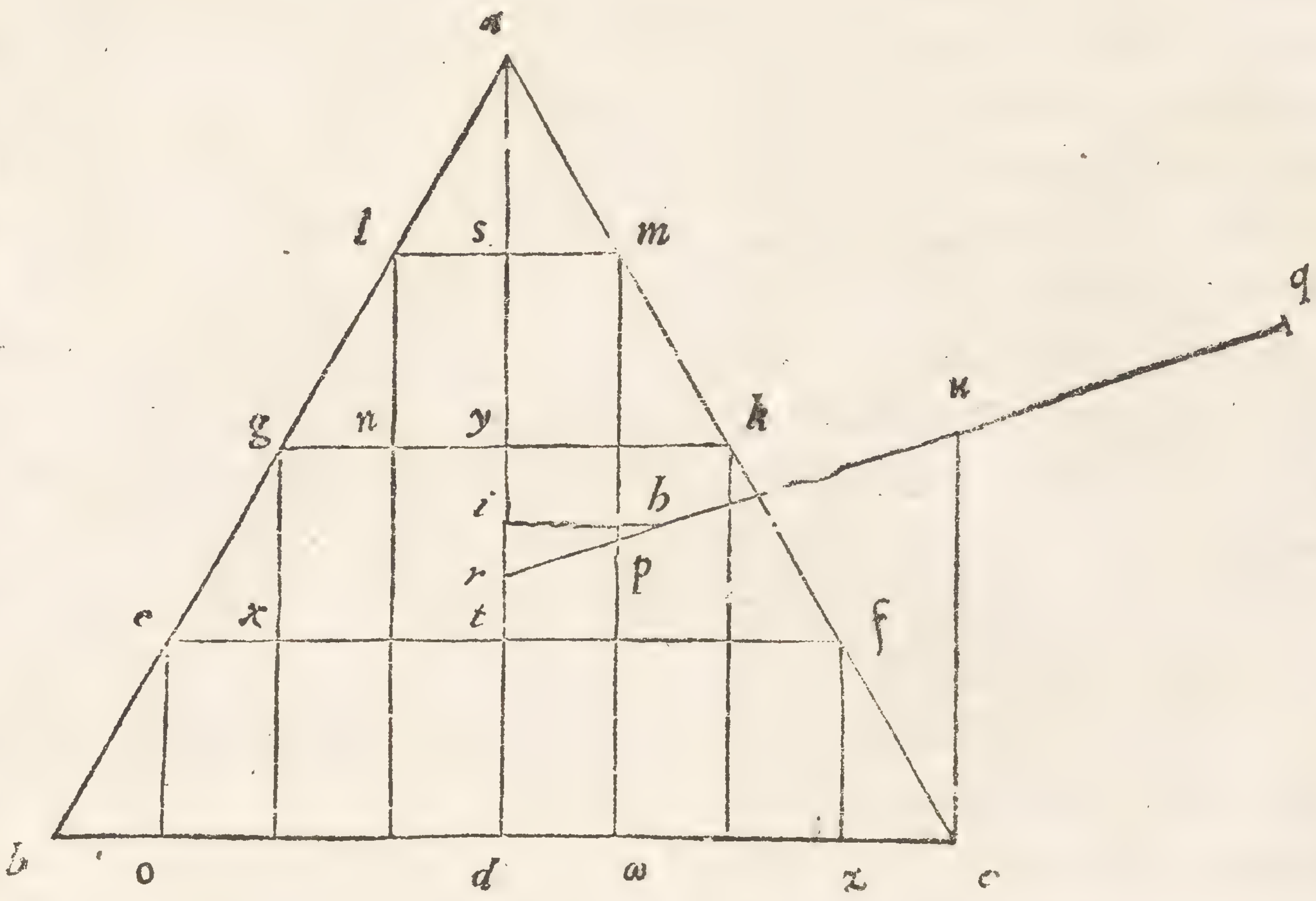
12 SI duo trianguli fuerint ſimiles,& centrum grauitatis alterius eorum fuerit in linea recta,quæ ab uno angulo eius ad mediam baſem ducatur: alterius quoq; trianguli erit centrum grauitatis in linea ſimiliter in eo ducta. Sunto trianguli duo a b c,d e f. & eſto ſicut a c ad d f,ita a b ad d e,& b c ad f e. et a c diuiſa in duo ęqua in puncto g,iungatur b g. Et eſto centrum grauitatis triāguli a b c, in linea b g, quod ſit h. Dico quod centrum grauitatis d e f trianguli erit in linea recta,ſimiliter in eo ducta. Diuidatur d f in duo æqua in puncto m. & iungatur e m, &



fiat ſicut b g ad b h,ſic m e ad e n: & iungant̄ a h, h c,d n,n f. Cum igitur ipſius c a dimidia eſt a g,& ipſius d f dimidia eſt d m: eſt ſicut b a ad e d,ita a g ad d m. & latera circa æquales angulos exiſtentia, ſunt proportionalia. Angulus igitur a g b eſt æqualis angulo d m e. & eſt ſicut a g ad d m, ſic b g ad e m. Eſt autē & ſicut b g ad b h,ſic m e ad e n: & per æquam ergo,ſicut a b ad d e, ſic b h ad e n. Et circa angulos æquales latera proportionalia conſiſtunt. Erit igitur angulus b a h,æqualis angulo e d n. Quare angulus h a c reliquus erit ęqualis angulo e f n. et angulus h c g,æqualis angulo n f m. Oſtenſum eſt autem,quod angulus a b h eſt æqualis angulo d e m. quare & angulus h b c reliquus, erit æqualis angulo n e f. Et omnino eadem ratione puncta h n,ad latera proportionalia ſimiliter poſita ſunt, & angulos æquales faciunt. Cum igitur h n puncta ſimiliter poſita ſint, & h eſt centrum grauitatis trianguli a b c, erit n quoq; centrum grauitatis trianguli d e f.

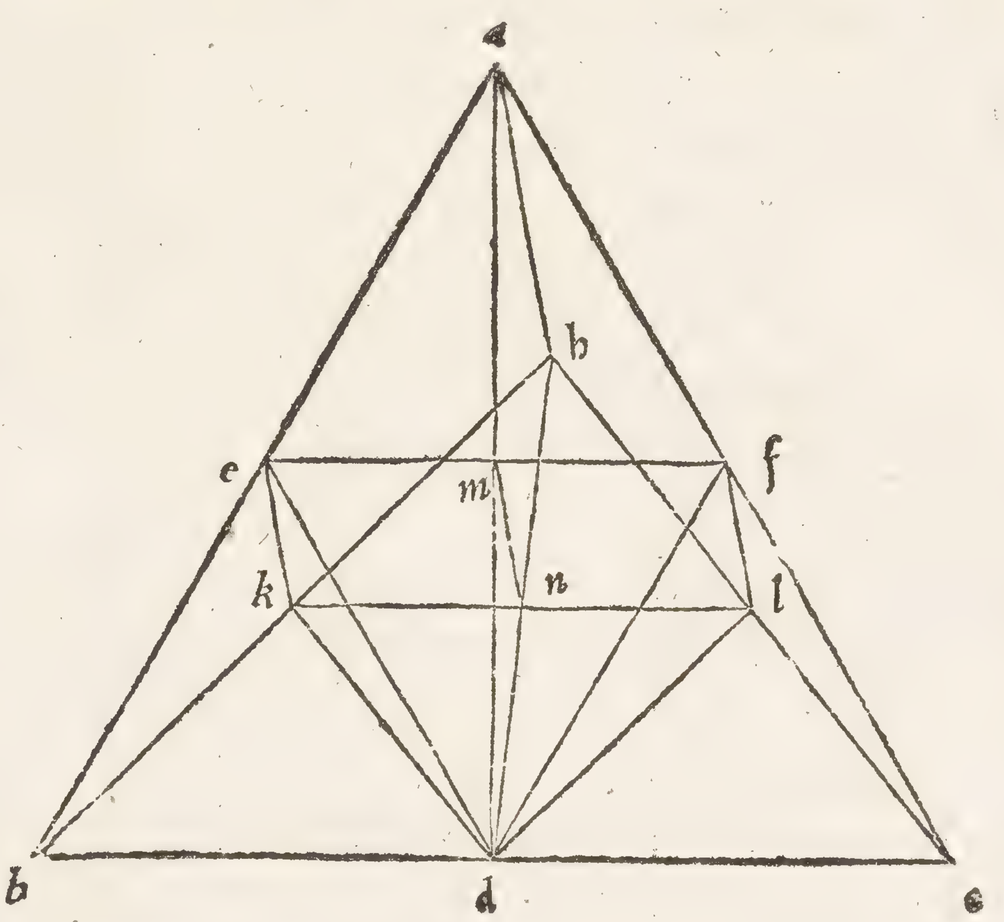
Cuiuſ-

CVIuſcunqꝫ trianguli centrum grauitatis exiſtit in linea recta, quæ ab angu- 13
lo ad dimidiam baſem ducta fuerit. Eſto triangulus a b c, & in ipſo a d du-
cta ad dimidiam baſem. Eſt itaqꝫ oſtendendum, quod in linea a d centrum graui-
tatis triãguli a b c e-
xiſtit. Nam ſi non,
eſto ſi eſſe poteſt pũ
ctũ h, & per ipſum
ducatur h i, æquedi
ſtans ipſi b c. Conti
nuè igitur diuiſa d
c in duo æqua, tan-
dem relinquetur li-
nea minor h i. Diui
datur utraqꝫ b d, d c
in duo ęqua: et à pũ
ctis ſectionum du-
cantur æquediſtan
tes ipſi a d, et iũgan
tur e f, g k, l m. Erũt
iam ipſæ æquediſtã
tes ipſi b c. Iam figu

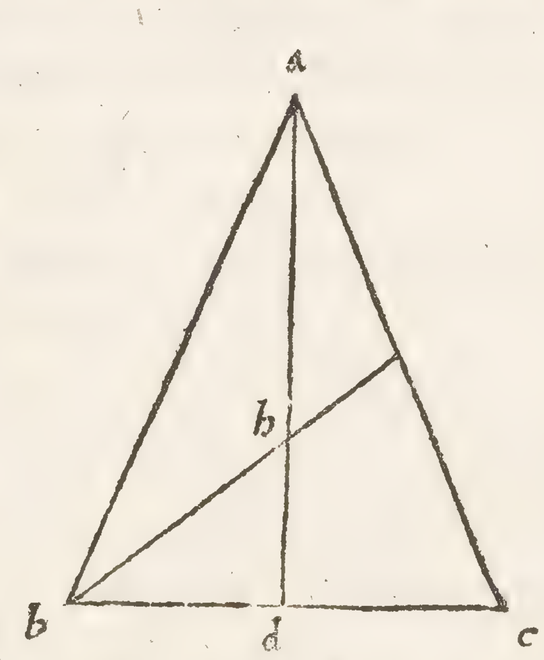


ræ æquediſtantium laterum m n, centrum grauitatis eſt in ſ y. Ipſius aũt k x in y t,
& ipſius f o, in t d. Magnitudinis ergo ex omnibus compoſitæ centrum grauita-
tis eſt in linea ſ d recta, quod ſit r. Et iungatur h r, & educatur & protrahatur, &
ducatur c u æquediſtans ipſi a d. triangulus autem a d c, ad omnis triangulos a m,
m k, k f, f c, lineis deſcriptos ſimiles ipſi a d c, eam habet proportionẽ, quam habet
c a ad a m. Quia a m, m k, k f, f c æquales ſunt. Quoniam autem & triãgulus a d b,
ad omnis triangulos à lineis a l, l g, g e, e b deſcriptos, ſimiles ſibi, eã habet propor
tionem, quã b a ad a l. Triangulus igitur a b c, ad omnis dictos triangulos, eam ha
bet, quã c a ad a m. Sed c a ad a m maiorem proportionem habet, qꝫ u r ad r h. nam
proportio c a ad a m eadem eſt ei quam habet tota u r ad r p. quia trianguli ſimiles
exiſtunt. & triangulus quoqꝫ a b c, ad dictos triangulos maiorem habet propor-
tionem, quàm u r ad r h. Fiat igitur, ut ſicut figuræ æquediſtantium laterum ſe ha-
bent ad triangulos, ſic q h ad h r. Quoniam igitur aliqua magnitudo exiſtit a b c,
cuius centrum grauitatis eſt h: & aufertur ab ea magnitudo cõpoſita ex m n, k x,
f o figuris æquediſtantium laterum: & ablatæ magnitudinis centrum grauitatis
eſt r punctum. reliquæ igitur magnitudinis, quæ ex triangulis circumrelictis cõ
ponitur, cẽtrum grauitatis in linea r h habetur, quæ educta & protracta eſt ad h r:
eamqꝫ habet proportionem ad illam, quam magnitudo ablata ad reliquam. Pun-
ctum ergo q centrum eſt grauitatis magnitudinis compoſitæ ex omnibus circum
relictis, quod eſſe non poteſt. nam linea recta à puncto q æquediſtãter ipſi a d du-
cta in plano, in eadem ipſius parte: hoc eſt in altera ipſius parte, centra omnia ha-
bentur. Manifeſtum eſt igitur propoſitum. Aliter idem. Eſto triangulus a b c,
& ducatur a d linea ad dimidiam baſem. Dico itaqꝫ, quod in linea a d centrũ gra-
uitatis trianguli a b c habetur. Nam ſi non, eſto h, ſi eſſe poteſt: & iungantur h a,
h b, h c, & e d, d f, f e, ad medias b a, a c. Ducantur ipſi a h æquediſtantes e k, f l: &
iungantur k l, l d, d k. item m n æquediſtans ipſi a h. Quoniam itaqꝫ triangulus
a b c ſimilis eſt triangulo d f c, cum b a ſit æquediſtans ipſi f d, & trianguli a b c cẽ-
trum grauitatis eſt punctum: & f d c trianguli quoqꝫ centrum grauitatis eſt pun-
ctum l. nam h l puncta ſunt ſimiliter poſita in utroqꝫ triangulo, cum ad latera eiuſ
dem rationis æquos angulos efficiant. conſtat enim iſtud. Eadem autem ratione

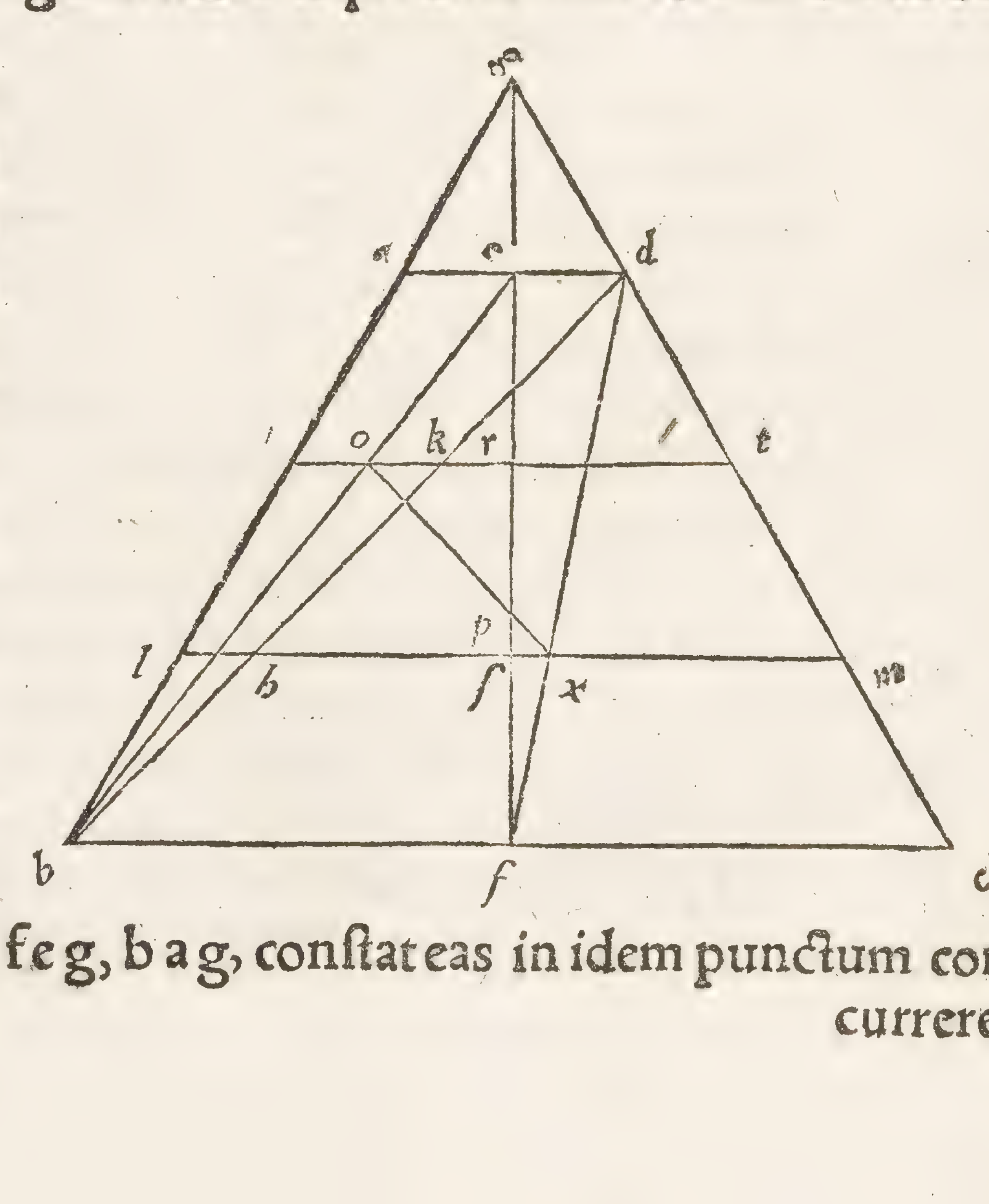
& trianguli e b d centrum grauitatis eſt k punctum. quare magnitudinis ex ambabus b e d, d f c triãgulis compoſitæ centrum grauitatis habetur in medio lineæ k l. cum triãguli e b d, f d c, ſint æquales. Et ipſius k l, medium eſt n: cum ſit ſicut b e ad e a, ita b k ad h k. Sicut autem c f ad f a, ſic c l ad l h. Si autẽ hoc ſic ſe habet, erit b c ipſi k l æquediſtans. Et iuncta eſt d h. erit igitur ſicut b d ad d c, ſic k n ad n l. Quare magnitudinis ex utriſq; dictis triangulis compoſitæ centrum grauitatis eſt n. eſt quoq; figuræ æquediſtantium laterum a e d f, centrum grauitatis pũctum m. Quare magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrum grauitatis habetur in linea m n. Eſt autem trianguli a b c centrum grauitatis h punctum. Igitur m n protracta per punctum h tranſibit, quod eſſe non poteſt. Centrum igitur grauitatis trianguli a b c, non extra lineam a d uſquam habetur. in ea igitur neceſſe eſt ipſum haberi. Quare conſtat propoſitum.



14 CVIuſcunque trianguli cẽtrum grauitatis eſt punctum, in quo lineæ rectæ ab angulis ad dimidias baſes ductæ concurrũt. Eſto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad mediam b c, & linea b e ad mediã a c. Si iam centrum grauitatis trianguli a b c habetur in utraq; a d b e, ſicut demonſtratum fuit, erit utique punctum h centrum grauitatis trianguli a b c.



15 CVIuſcunq; menſalis figuræ, quæ duo latera habeat æquediſtantia inter ſe, centrum grauitatis habetur in linea recta, quæ iungit laterum æquediſtantium ſectorum in duo æqua puncta diuiſionis, atq; in eo ipſius dictæ lineæ loco, ubi ipſa ſic diuiſa ſit, ut pars eius terminata ad minus laterum ęquediſtantium in duo æqua ſectorum ad reliquam partem eam habeat proportionẽ, quam habet utraque ſimul, duplũ maioris æquediſtantium cum minore, ad duplum minoris cum maiore. Eſto menſalis figura a b c d, quæ habeat a d, b c æquediſtantes. & e f iungat puncta diuiſionis ipſarũ a d, b c, quæ in duo æqua diuiſæ ſunt. Quod itaq; in linea e f, ſit centrum grauitatis menſæ, manifeſtum eſt, nam ſi protrahantur c d g, f e g, b a g, conſtat eas in idem punctum concurrere:

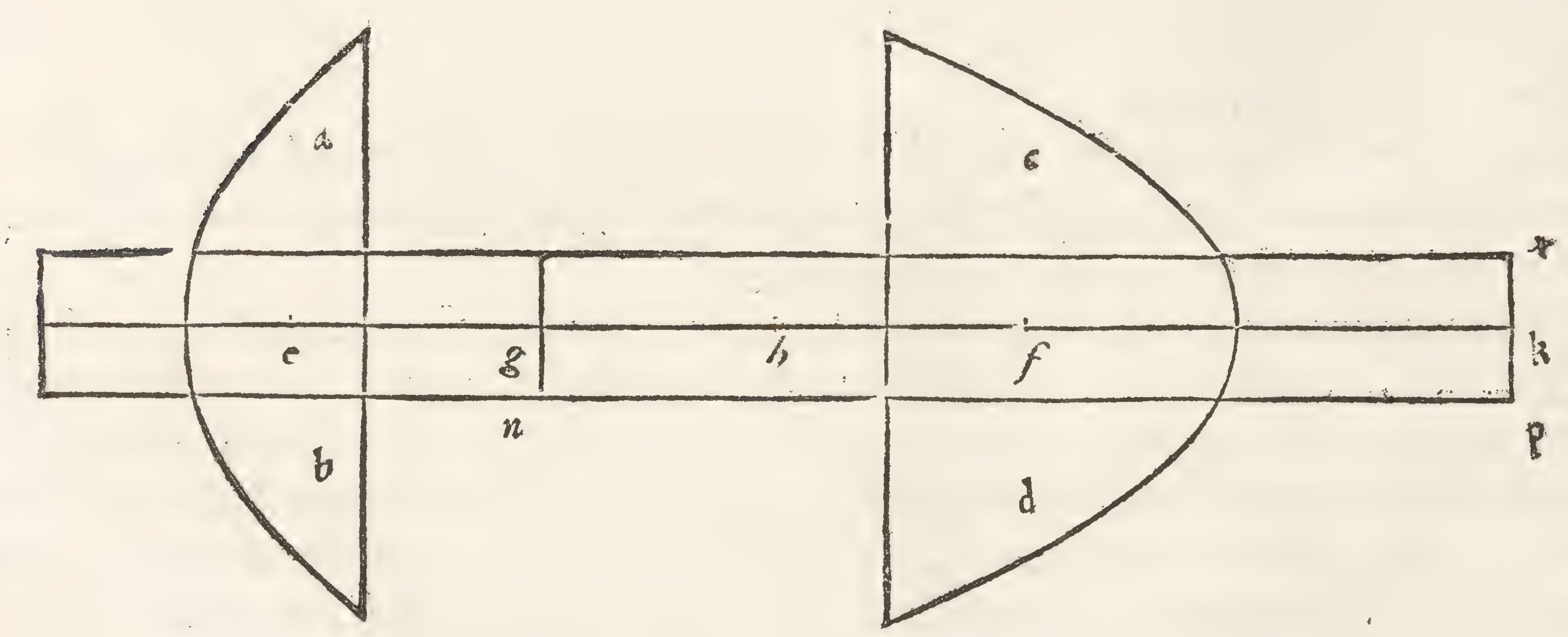


currere: eritq́ꝫ trianguli b g c centrū grauitatis in ipſa g f, & ſimiliter trianguli a g d cētrum grauitatis in ipſa e g. & reliquæ igitur menſæ a b c d, erit in ipſa e f. Ducta uero b d diuidatur in tria æqualia in punctis k h: & per ea puncta ducātur æque diſtantes ipſi b c lineæ l h m, n k t. & iungantur d f, b e, o x. Erit igitur centrum grauitatis triāguli d b c, in linea h m, cum h b ſit tertia pars b d, & per h ducta eſt h m æquediſtans ipſi baſi. Eſt autem centrū grauitatis trianguli d b c, in linea d f. Quare x erit centrum grauitatis dicti trianguli. Eadem autem ratione erit o punctum centrum grauitatis trianguli a b d. Magnitudinis ergo ex utriſq́ꝫ triangulis a b d, b d c compoſitæ, centrum grauitatis erit in linea recta o x. Quæ quidem magnitudo menſalis cum ſit, erit eius centrū grauitatis in linea e f. Quare menſalis a b c d, centrū grauitatis erit punctū p. Habet autem triangulus b d c ad triāgulum a b d eam proportionē, quam o p ad p x. Sed ſicut triangulus b d c ad triangulū a b d, ſic b c ad ipſam a d. Eſt autē ſicut o p ad p x, ita R p ad p s. Igitur ſicut b c ad ipſam a d, ſic R p ad ipſam p s. Quare ſicut duæ b c, cum a d ad duas a d, cum b c: ſic duæ R p cum p ſ, ad duas p ſ cum R p. Verum duæ R p cum p ſ, eſt utraq́ꝫ ſimul e R, R p, hoc eſt p e: duæ uero p ſ cum p R utraque ſimul, eſt p ſ f, hoc eſt p f. Oſtenſa ergo ſunt ea quæ propoſita fuerant.

FINIT PRIMVS ARCHIMEDIS LIBER de Aequeponderantibus.

ARCHIMEDIS DE HIS QVAE AEQVEPONDERANT LIBER *ſecundus*.

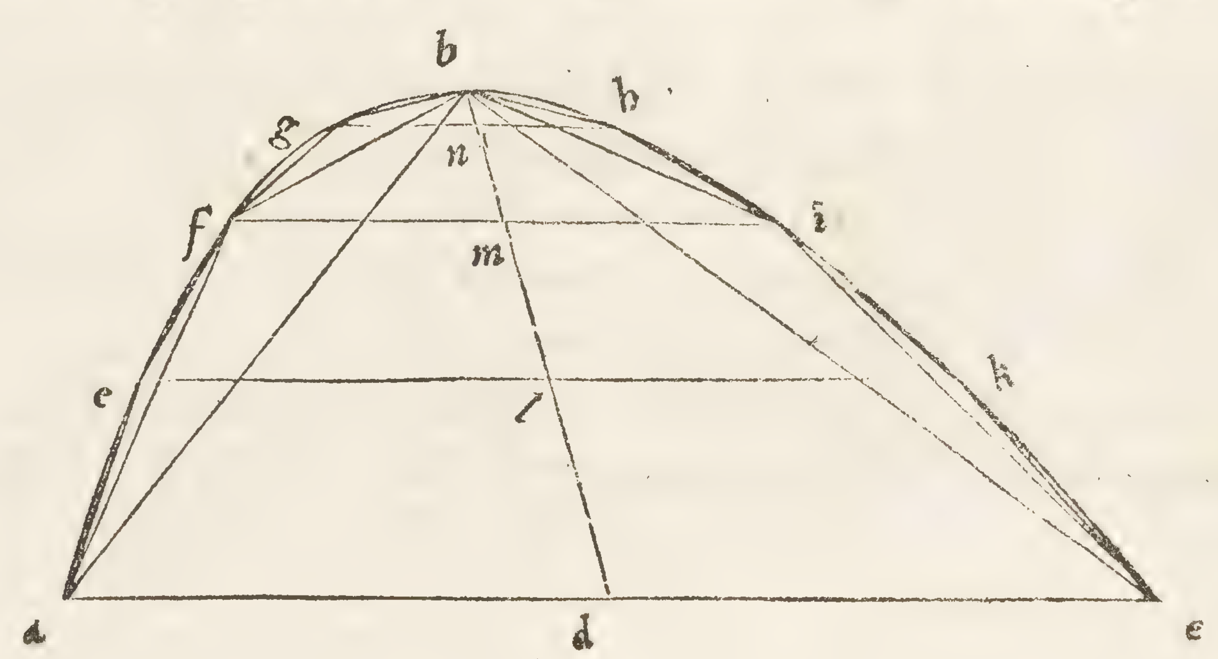
SI DVO ſpacia compræhenſa à linea recta & ſectione coni rectā- a guli, quæ ad lineam rectam datam poſſimus applicare, non habeāt idem centrum, centrū grauitatis eorum erit in linea quę iungit cētra grauitatis eorū: eritq́ꝫ punctū illud quod dictam lineam rectam ſic diuidet, ut partes eius inter ſe mutuam habeant proportionem ſpaciorum. Eſto duo ſpacia a b, c d, qualia dictum eſt. Cētra autem grauitatis eorum ſint puncta e, f. & quam proportionem habet a b ad c d, eam habeat f h ad h e. Oſtendendum eſt, quod magnitudinis ex utriſque a b, c d ſpacijs compoſitæ, centrū



uitatis eſt punctum h. Sit autem ipſi e h harum utraq; æqualis f g, f k. ipſi autem f h, hoc eſt g e, ſit e l æqualis. erit igitur & l h ipſi k h æqualis. Et eſt ſicut l g ad g k, ſic a b ad c d. nam utraq; utriuſq; dupla eſt. Protendatur autem in parte pūcti a linea æquediſtans ipſi l g, ita ut fiat ſpacium m n ipſi lineæ l g utrinq; adiectū, æquale ipſi a b. erit iam ipſius m n centrum grauitatis punctum e. Compleatur itaque n x. Habebit igitur m n ad n x eam proportionem, quam l g ad g k. habet autem & a b ad c d eam, quam l g ad g k. Igitur ſicut a b ad c d, ſic m n ad n x. & permutatim. At uero a b æquatur ipſi m n, ergo c d æquatur ipſi n x. Et centrum grauitatis eius eſt f punctum. Et quoniam l h eſt æqualis ipſi h k, & tota l k latera oppoſita diuidit in duo æqua totius p m, centrum grauitatis erit punctum h. Sed m p eſt æquale utrique ſimul m n, n x. Quare & compoſiti ex utriſque a b, c d centrū grauitatis erit h punctum.

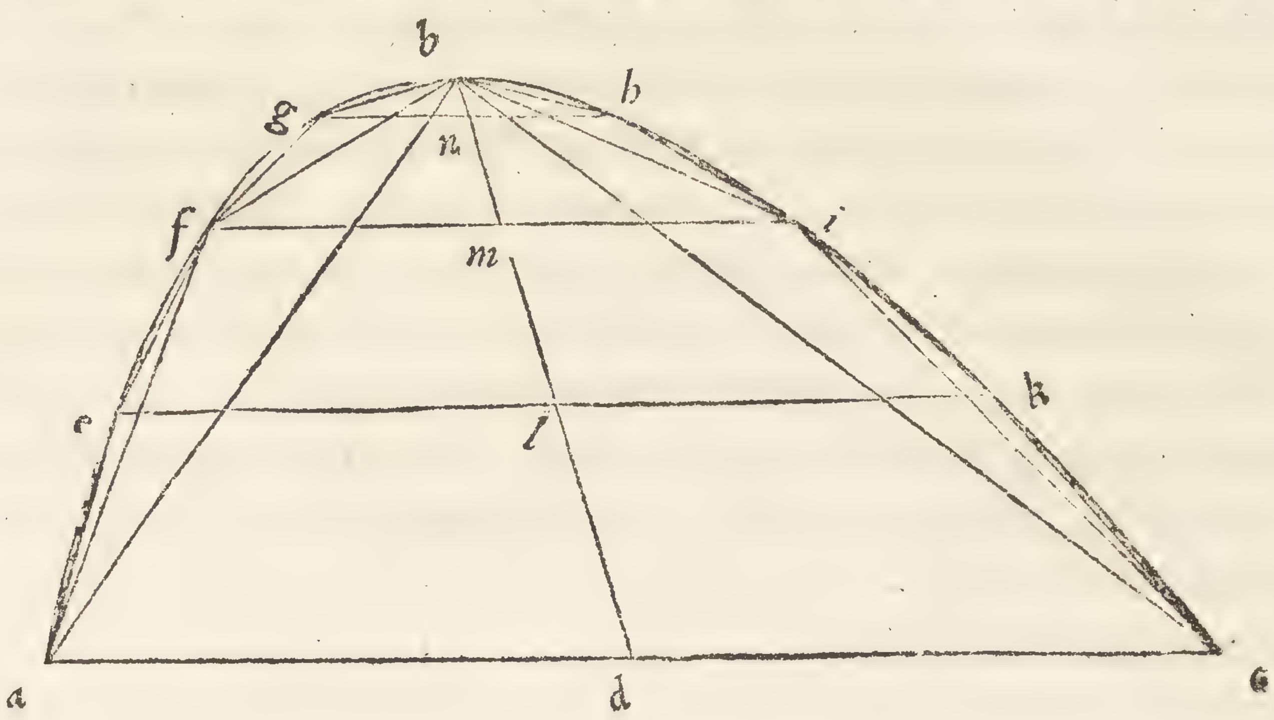
Si intra portionem à recta & coni rectanguli ſectione compræhenſam triangulus inſcribatur, qui baſem habeat cum portione eādem, & altitudinem ipſi æqualem, & item in reſiduis portionibus trianguli inſcribantur eaſdem cum portionibus baſes & altitudines æquales habentes, atq; item & hoc idem in reſiduis portionibus fiat: & huiuſmodi triangulorum inſcriptio continuetur figura, quæ hoc modo in ſectione deſcribitur, perſpectè inſcribi dicatur. Manifeſtum eſt autem, quod figuræ hoc modo inſcriptæ lineæ quæ iungent angulos eos qui uertici portionis proximi exiſtunt & eos qui deinceps ſequentur æquediſtabunt baſi ipſius portionis, & in duo æqua diuidentur à diametro portionis, & diametrum ipſæ diuident in proportiones à numeris ab unitate continenter imparibus dictas, ea parte quæ ipſi uertici coniuncta erit pro uno computata. hoc autem in ordinibus eſt oſtendendum.

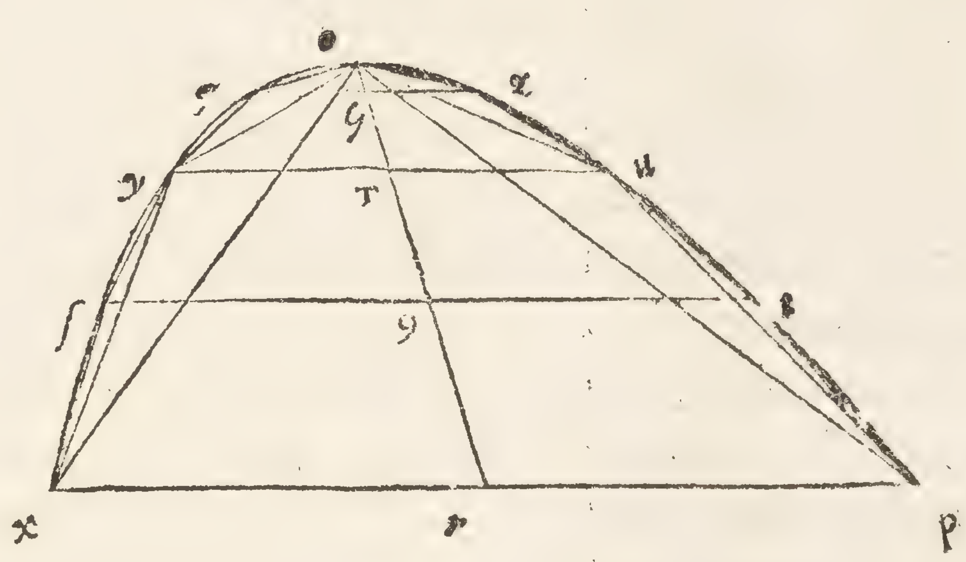
2 SI autem in portione quæ à recta & rectanguli coni ſectione compræhēditur, rectilinea figura inſcribatur, perſpectè centrum grauitatis figuræ inſcriptæ erit in diametro portionis. Eſto a b c portio qualis dicitur, & inſcribatur ei perſpectè figura rectilinea a e f g b h i k c. Oſtendēdum eſt, centrum grauitatis rectilineæ figuræ eſſe in b d. Quoniā enim mēſulæ a e k c centrū grauitatis eſt in l d, menſulæ uero e f i k centrum eſt in linea m l. ipſius uero f g h i menſulæ centrum eſt in linea m n. Ad hæc quoque trianguli g b h centrum grauitatis eſt in b n. Conſtat quod totius figuræ rectilineæ centrū grauitatis eſt in linea b d. quare conſtat propoſitum.



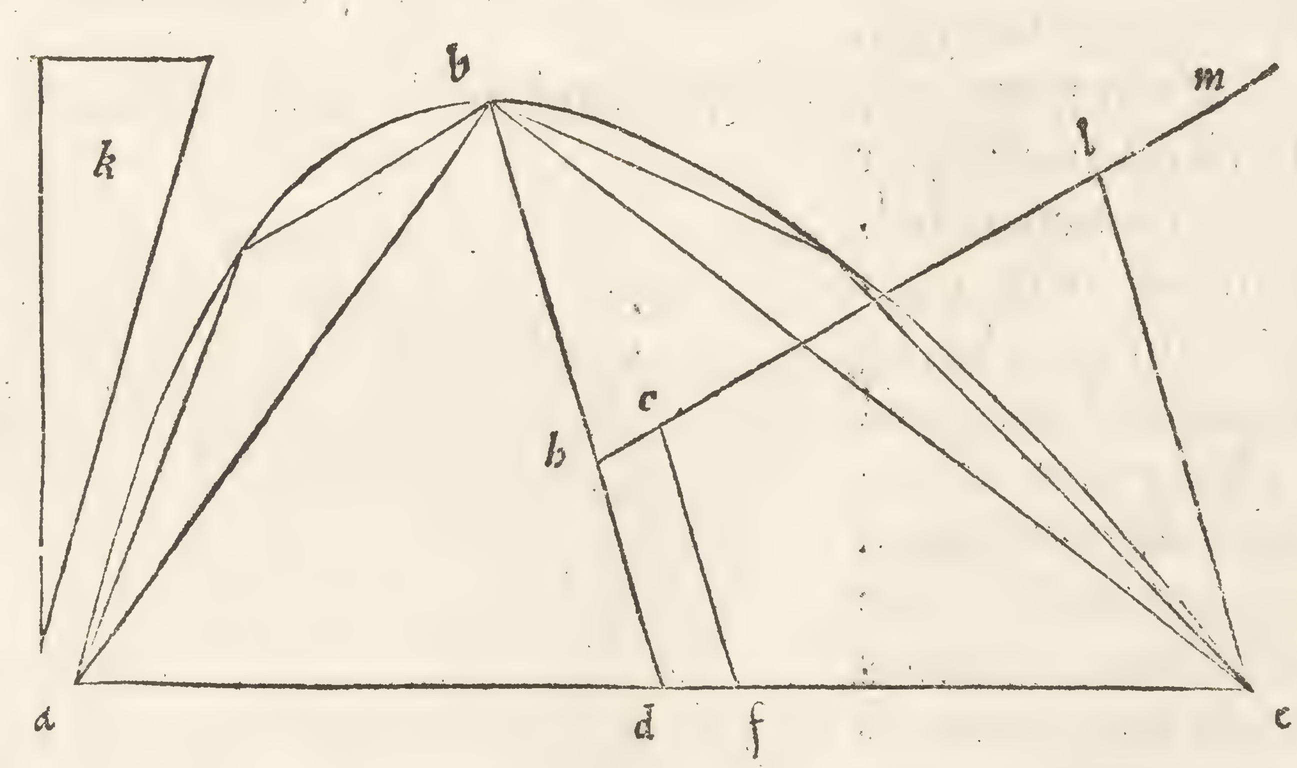
3 SI in utraque duarum portionum ſimilium à coni rectanguli ſectione, & linea recta compræhenſarum rectilineæ figuræ inſcribantur, perſpectè quæ latera numero inter ſe æqualia habuerint, rectilinearum figurarum centra grauitatis ſecabunt ſimiliter diametros portionum. Sint duæ portiones a b c, x o p, & eis inſcribantur figuræ rectilineæ notæ ſecundū omnia latera quæ ſint in utraq; numero æquali. Sint diametri portionum b d, o r. & iungantur e k, f i, g h. & ſ t, y u, q z. Quoniam igitur & b d diuiditur à lineis æquediſtātibus in proportiones à numeris imparibus, continenter ab uno diſpoſitis nominatas: & p o ſimiliter, & diuiſiones earum ſunt numero æquales inter ſe: conſtat quod partes diametrorum eiſdem

dem proportionibus habebuntur, & lineæ æquediſtantes eaſdem proportiones ſeruabunt, & menſularum ipſius quidem a e k c, & ipſius x ſ t p, centra grauitatis erunt in d l, 9 r lineis rectis ſimiliter poſita, cum eandẽ habeãt proportionem a c, e k, quam p x ad ſ t. Rurſus autem & menſularum e f i k, ſ y u t, centra grauitatis diuident ſimiliter lineas l m, 9 T. Sũt autem & triangulorum g b h, q o z centra grauitatis in lineis b n, o 9 ſimiliter poſita. Habent autem eandem proportionem menſulæ & trianguli. Cõſtat igitur, quod totius figuræ rectilineæ in portione a b c inſcriptæ, centrum grauitatis ſimiliter diuidit b d diametrum, ſicut figurę in x o p portione inſcriptæ centrum grauitatis in o r, quod demonſtrari oportuit.





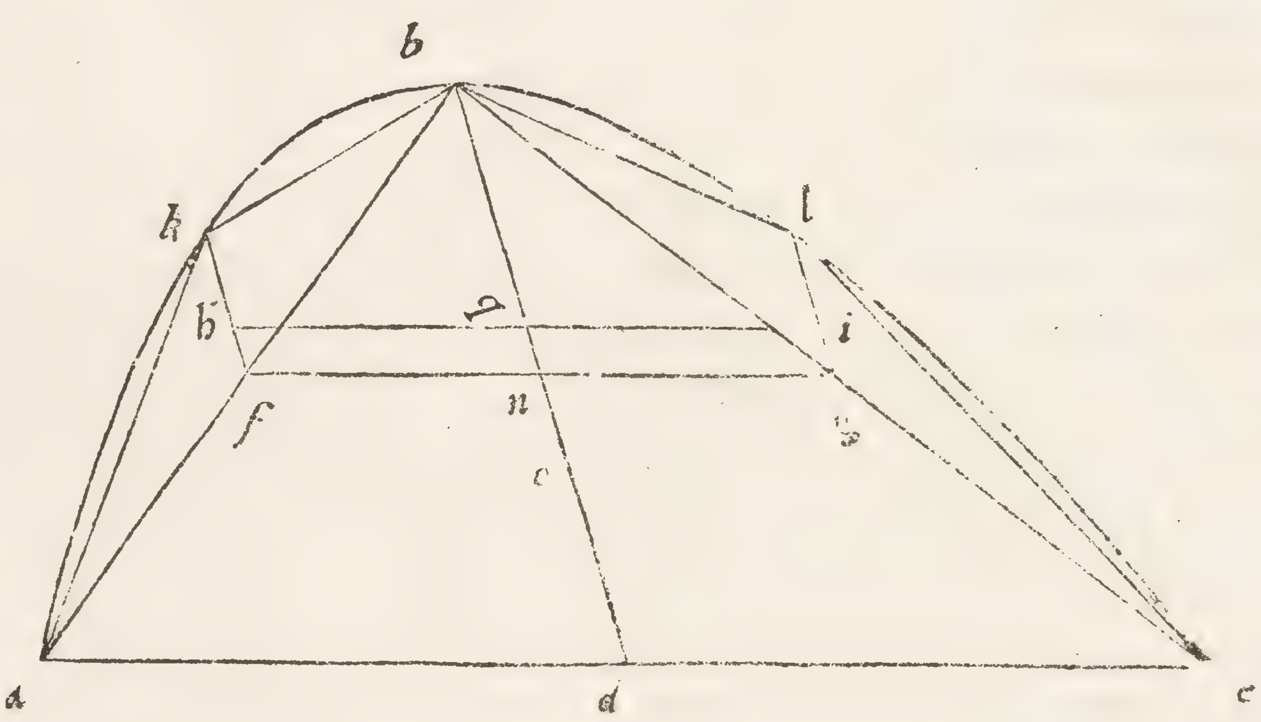
CViuſcunq; portionis à linea recta & ſectione rectanguli coni compræhenſæ, centrum grauitatis in diametro portionis exiſtit. Eſto portio, ut dicitur, a b c: eius diametros, b d. Oſtendendum eſt, dictæ portionis cẽtrum grauitatis eſſe in b d. Nam ſi non, eſto ipſum e, & per ipſum ducatur e f, ipſi b d æquediſtans, & inſcribatur portioni triangulus a b c eandem baſim habens, & altitudinem cũ portione eandem. & quam habet c f ad d f, hanc habeat triangulus a b c, ad ſpacium k. Inſcribatur iã in portione rectilinea figura perſpectè, ita ut quæ relinquẽtur portiões, ſint minores ipſo k. figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in b d. Sit h, & iungatur h e, et producatur, & ducatur c l æquediſtans ipſi b d. Conſtat autem, quod maiorẽ proportionem habet inſcripta portioni figura ad eas quæ relictæ ſunt portiones, quàm a b c triangulus ad ſpacium k, qui eam habet quam c f ad d f. Figura igitur inſcripta, ad portiones relictas maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, hoc eſt e l ad e h. Habeat itaque m e ad e h, eã proportionem, quam rectilinea figura ad portiones. Quoniam igitur e eſt centrũ 4



totius

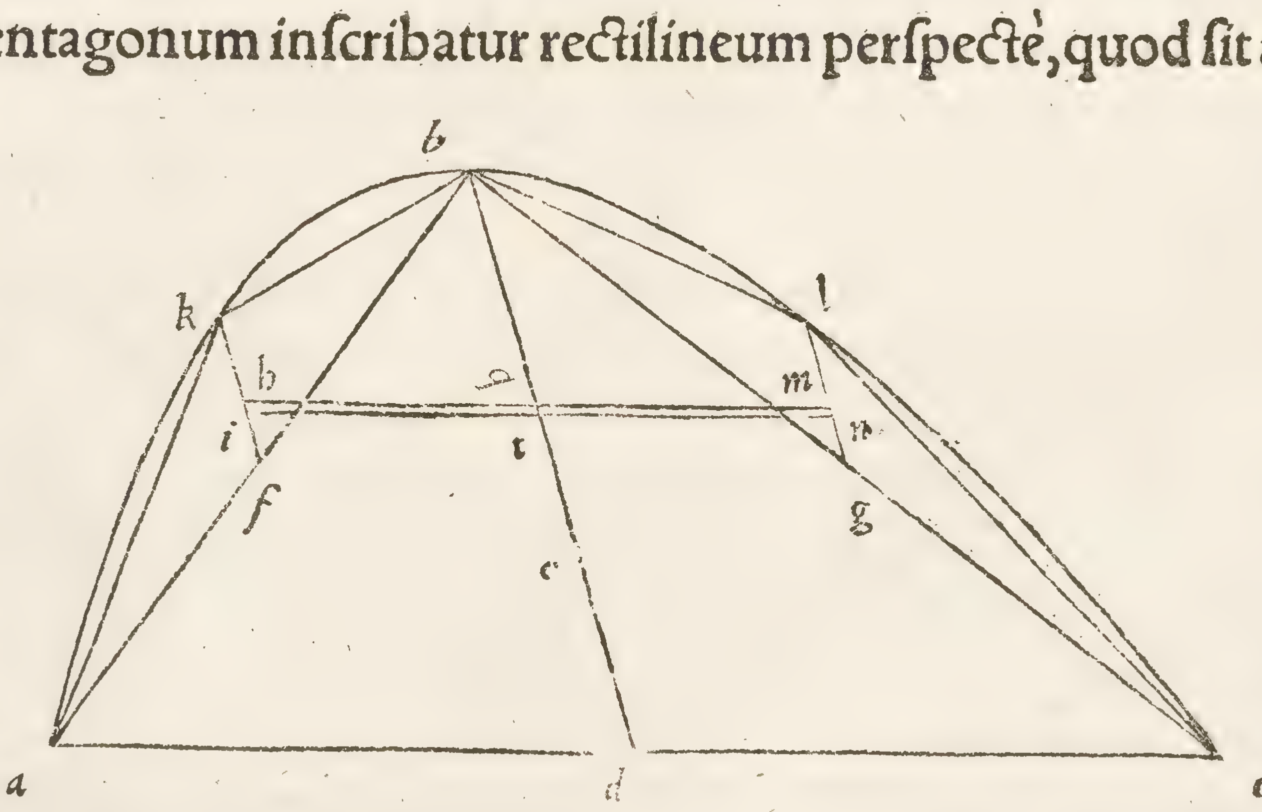
totius portionis:figuræ uero inſcriptæ portioni centrum eſt h : conſtat quod magnitudinis compoſitæ ex reliquis portionibus, centrum grauitatis eſt in parte h e producta, quæ eam ad h e proportionẽ habet, quam figura inſcripta ad reliquas portiones. Quare erit magnitudinis ex reliquis portionibus compoſitæ centrum grauitatis punctum m:quod eſt inconueniens. nam ei quæ per m punctum ducitur lineæ æquediſtanter ipſi b d,in eandem partem erunt omnis reliquæ portiones. Manifeſtum eſt igitur,quod in diametro b d centrum exiſtit grauitatis.

5 SI in portione à recta linea & ſectione rectanguli coni cõtenta,figura rectilinea inſcribatur perſpectè totius portionis centrum grauitatis erit uertici portionis propinquius, quàm centrũ figuræ rectilineæ inſcriptæ portioni. Eſto a b c portio qualis dicitur,cuius diametros b d, & inſcribatur eidem triãgulus primum perſpectè,& notè a b c,et diuidatur b d in puncto e, ita ut b e ſit dupla e d. erit igitur trianguli a b c centrum grauitatis punctum e. Diuidatur iã in duo æqua utraq; a b,b c,in punctis f g: & per f g ducãtur f k,l g, æquediſtantes ipſi b d. Eſt igitur



portionis a k b centrum grauitatis in linea f k.portionis uero b c l,centrum grauitatis in g l linea. Sint autem ea h i, & iungantur h i:& quoniam h f g eſt figura laterum æquediſtantium,& g i eſt æqualis ipſi f h : eſt igitur f g æqualis h i. Quare magnitudinis ex utriſque compoſitæ ex a k b,& b l c portionibus,centrum grauitatis eſt in media h i:cum portiones quidem ſint æquales,hoc eſt punctum q. quoniam autem trianguli a b c centrum grauitatis eſt e, magnitudinis uero ex utriſq; a k b,b l c compoſitæ centrum eſt q : conſtat quod portionis totius a b c centrum grauitatis eſt in linea q e:id eſt inter puncta q e. quare centrum grauitatis totius portionis erit uertici ipſius portionis propinquius, quàm centrum trianguli in ipſa perſpectè inſcripti.

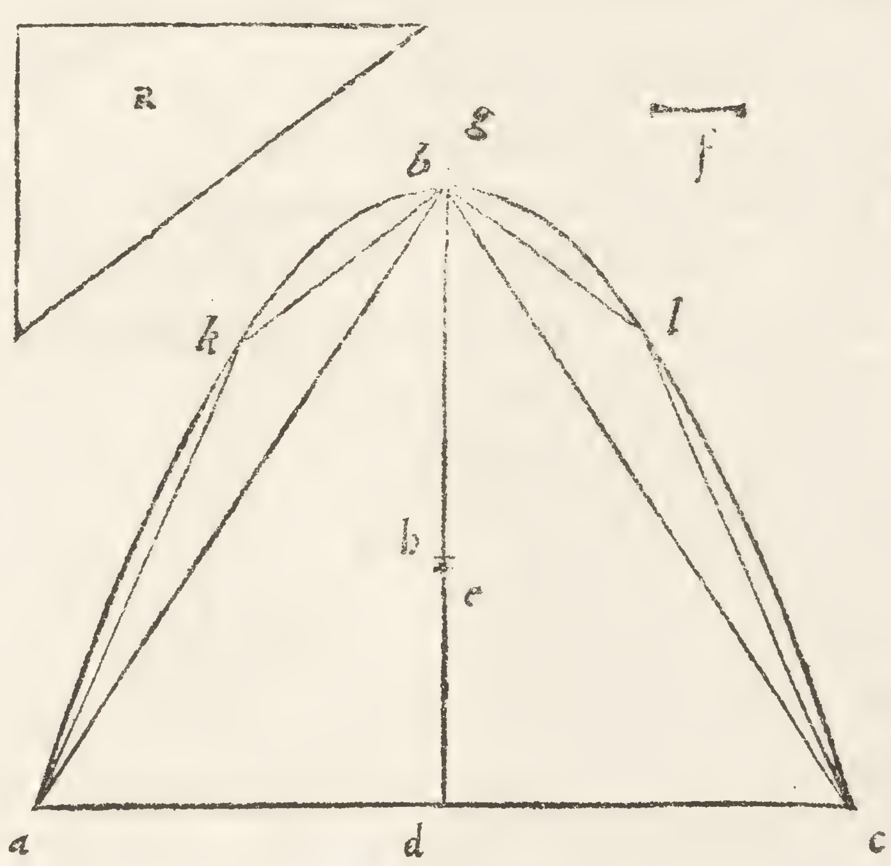
Rurſus portioni pentagonum inſcribatur rectilineum perſpectè,quod ſit a k b l c.Et eſto totius portionis diametros b d, utriuſque uero portionis utraque k f, l g diametros.Et quoniã in a k b portione inſcripta eſt rectilinea figura perſpectè, ſiue notè, totius portionis cẽtrum grauitatis eſt propinquius uertici ipſius portiõis,quàm cẽtrum rectilineæ inſcriptæ.



Eſto itaque ipſius portionis centrum grauitatis h, trianguli uero I. Rurſus eſto portionis b l c centrum grauitatis m,trianguli uero n. Eſt autem magnitudinis

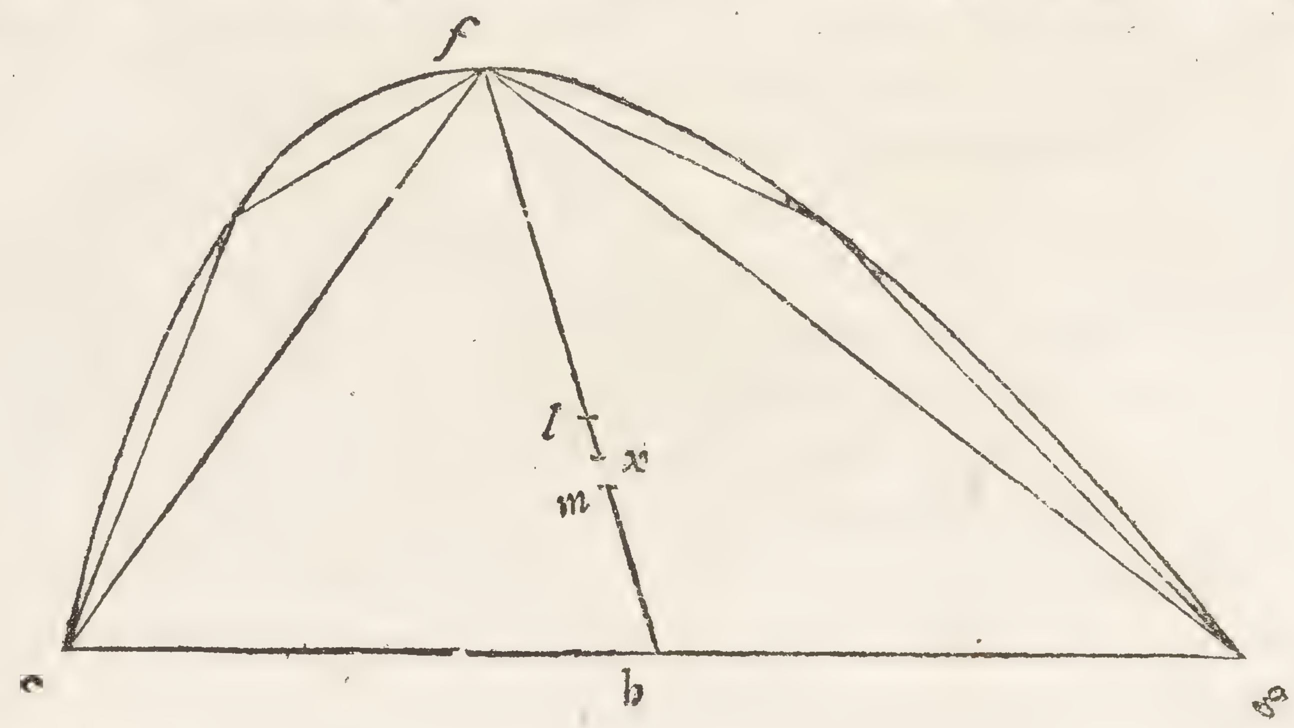
dinis ex utriſque a k b, b l c portionibus compoſitæ, centrum grauitatis q: magnitudinis autem ex utriſque a k b, b l c triangulis compoſitæ, centrum eſt T. Rurſus quoniam trianguli a b c centrum grauitatis eſt e, compoſitæ autem ex utriſque a k b, b l c portionibus, centrum eſt q: conſtat quod totius a b c portionis cētrum grauitatis eſt in linea q e, ſic diuiſa, ut quā proportionem habet a b c triangulus ad utraſq; ſimul a k b, b l c portiones, eam habeat eius pars terminata ad q, ad partem minorem. Pentagoni autem a k b l c centrum grauitatis eſt in linea recta e t, ſic diuiſa, ut quam proportionem habet a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, eam habeat eius lineæ pars terminata ad t ad reliquam. quoniam igitur maiorem habet proportionem a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, quàm ad portiones, manifeſtū eſt portionis a b c centrum grauitatis eſſe uertici b propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inſcriptæ. & in omnibus figuris rectilineis inſcriptis portionibus notæ eadem ratio habetur.

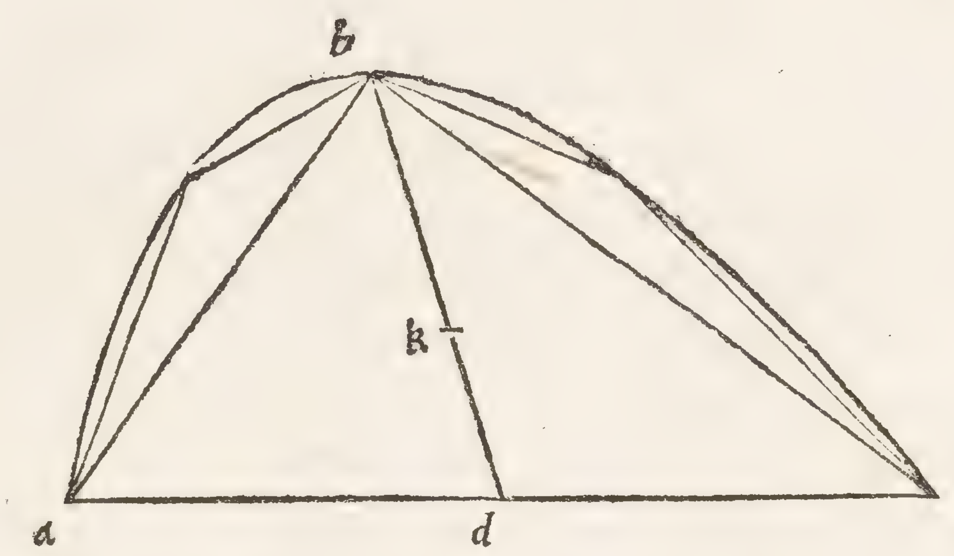
PORtione à linea recta & ſectione rectanguli coni compræhenſa data, poteſt 6
ipſi portioni figura rectilinea perſpectè ita inſcribi, ut linea quæ inter centrum grauitatis portionis & centrum figuræ inſcriptæ capitur, ſit quacunque linea recta data minor. Detur portio a b c, qualis dicitur, cuius cētrum grauitatis ſit h, & inſcribatur ipſi perſpectè triāgulus a b c, & ſit data linea f: & quā habet proportionem b h ad f, eam habeat triangulus a b c ad ſpacium R, inſcribatur etiam ipſi portioni a b c perſpectè rectilinea figura a k b l c, ita ut portiones reſiduę ſint minores ſpacio R: & eſto figuræ inſcriptæ centrum grauitatis e. Dico iam lineam h e minorem eſſe linea f data. Nam ſi non, uel æqualis, uel maior erit. Quoniā itaque a k b l c figura rectilinea ad reſiduas portiones maiorem proportionem habet, quàm a b c triangulus ad R, hoc eſt quàm h b ad f: habet autem h b ad f nō minorem proportionem, quàm ad h e, cū nō ſit minor f: multo magis ergo figura a k b l c rectilinea ad reliquas portiones maiorem proportionem habebit, quàm b h ad h e. Quare ſi faciamus, ut ſicuti a k b l c figura inſcripta ad reſiduas portiones habet, ſic alia quæcunq; linea ad h e: cum iam portionis a b c centrum grauitatis ſit h, protracta e h, & aſſumpta aliqua recta eam ad e h proportionem habēte, quam figura a k b l c rectilinea ad reſiduas portiones, erit ipſa maior h b: habeat igitur g h ad h e talem proportionem. erit igitur g centrum grauitatis magnitudinis ex portionibus reſiduis compoſitæ: quod quidem eſſe non poteſt. nam eſt, quæ per g ducta ęquediſtanter ipſi a c in eandem partem portioni. Conſtat igitur, lineam h e minorem eſſe linea f. quod fuerat demonſtrandum.



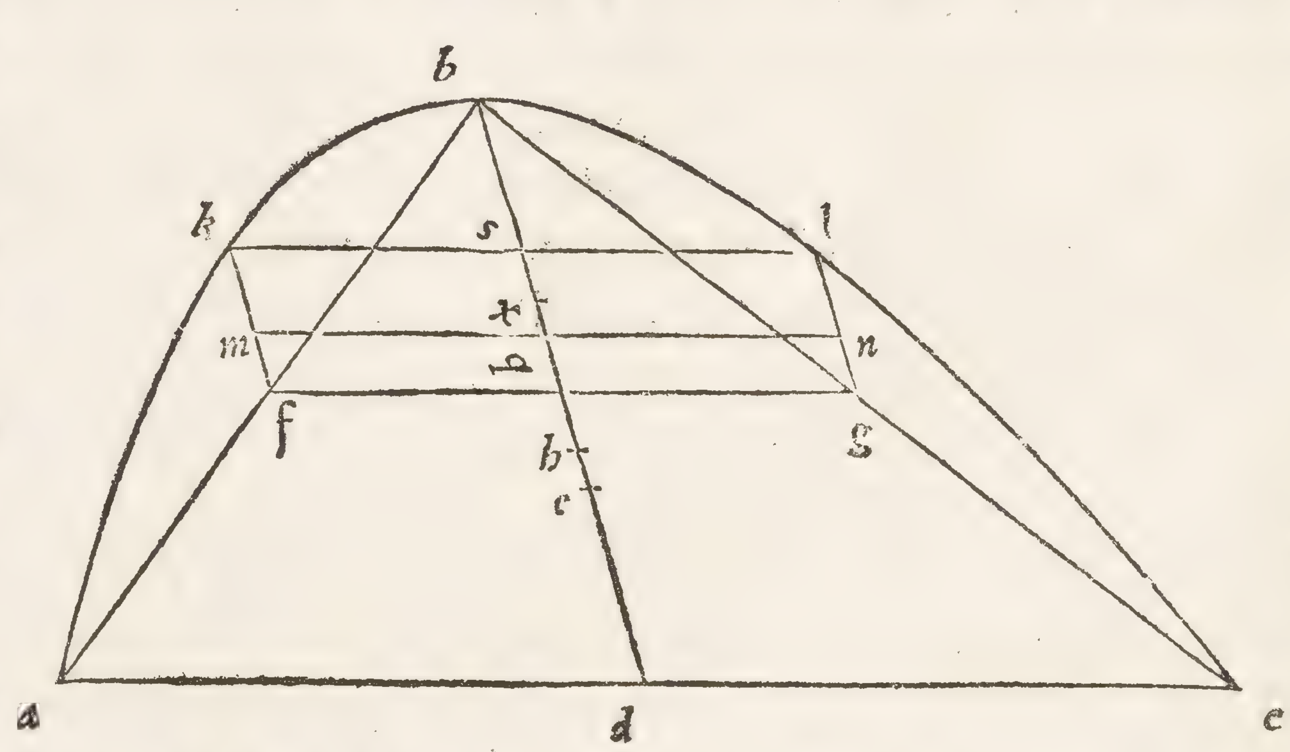
DVarum portionum ſimilium, quæ linea recta & coni rectanguli ſectione 7
compræhenduntur, centra grauitatis in eandem proportionem diametros earum diuidunt. Sint duæ portiones, quales dicitur a b c, e f g, quarum diametri b d, f h: & eſto portionis a b c, centrum grauitatis k punctum: ipſius uero e f g, ſit centrum grauitatis l. Oſtendendum quod in eandem proportionem diuidunt ipſas diametros centra k l. Nam ſi non, eſto ſicut k b ad k d, ſic f m ad h m, & inſcribatur ipſi e f g portioni figura rectilinea notæ, ita ut linea inter centrum portionis, & centrum figuræ inſcriptæ capta, ſit minor l m. & eſto fi-

guræ inſcriptæ centrum grauitatis x punctum. Inſcribatur quoq; ipſi a b c portioni figura rectilinea ſimilis figuræ ipſi e f g portioni inſcriptæ, hoc eſt ſimiliter notæ, cuius centrum grauitatis uertici portionis erit propinquius, quàm centrum portionis: quod quidem eſſe nõ teſt. Conſtat igitur, b k ad k d eam, quam f i ad i h, habere proportionem.





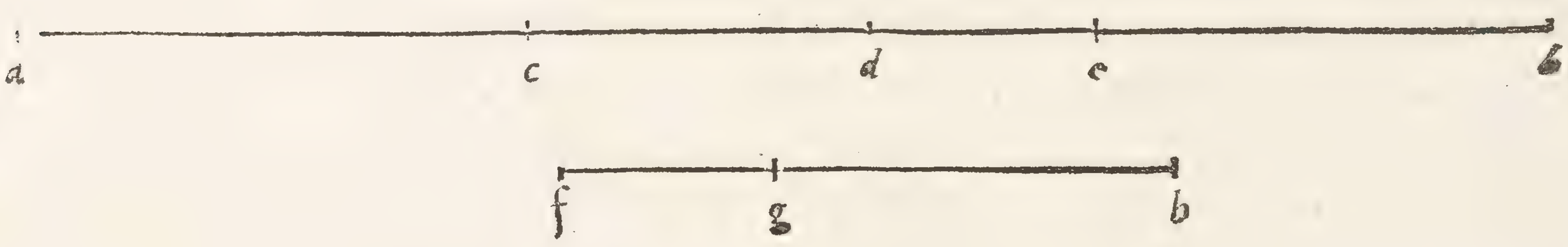
8 Cuiuſcunq; portionis à recta linea & rectanguli coni ſectione compræhenſæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portionis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, ſit ad partem eam ſeſquialtera, quæ ad baſim portionis terminatur. Eſto a b c portio qualis dicitur: eius diametros eſto b d, cẽtrum grauitatis punctum h. Oſtendendum eſt, quod b h ad h d eſt ſeſquialtera. Inſcribatur ipſi a b c portioni triãgulus per ſpeciẽ a b c, cuius centrum grauitatis eſto e: & utraque b a, b c in duo æqua diuidatur punctis f g, & ducant̃ k f, l g ęquediſtanter b d. Erũt igit̃ k f l g diametri portionũ a k b, b l c. Sit itaque portionis a k b centrũ grauitatis m: ipſius uero b l c punctum n. Et iungantur f g, m n, k l. magnitudinis ergo ex utraque portione compoſitæ centrum grauitatis eſt q. Et quoniam eſt ſicut b h ad h d, ſic k m ad m f, & componendo, & permutatim ſicut b d ad k f, ita h d ad m f. Sed b d ad k f, quadrupla eſt. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignũ ✐: igitur h d eſt quadrupla m f. Quare reſidua b h, ad reſiduam k m quadrupla eſt: hoc eſt ipſius ſ q. reliquarum ergo utraque ſimul, hoc eſt b ſ, q h tripla eſt ad ſ q. eſto b ſ tripla ſ x: & q h ergo erit tripla x q. Et quoniam b d eſt quadrupla ipſius b ſ, hoc enim demonſtratum eſt: & b ſ eſt tripla ſ x: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Eſt autem & e d pars tertia ipſius b d, cum punctum e ſit centrum grauitatis trianguli a b c: & reliqua igitur x e erit tertia pars b d. Quoniam uero totius portionis centrum grauitatis eſt h punctum: magnitudinis autem ex utriſq; a k b, b l c portionibus compoſitæ cẽtrum grauitatis eſt punctum q: trianguli a b c centrum eſt e: eſt quoque ſicut triã-



guli

guli a b c ad reſiduas portiones, ſic q h ad h e. Triplus uero eſt triangulus a b c ad reſiduas portiones, cum tota portio ſit ad triangulum a b c ſeſquitertia: igitur q h eſt ad h e tripla. Oſtenſum autem eſt q h triplam eſſe q x. Igitur x e quincupla eſt ipſius e h: hoc eſt d e ad h e. nam illæ ſunt æquales. quare d h ſexcupla eſt ipſius h e, & eſt b d tripla ipſius d e. igitur b h ipſius h d ſeſquialteram eſſe neceſſe eſt.

SI quatuor lineæ fuerint in proportionalitate cõtinua proportionales, & quam 9
proportionem habuerit minima earum ad exceſſum quo maxima minimam ſuperat, eam habeat quædam linea ſumpta ad tres quintas eius exceſſus quo maxima proportionalium tertiam ſuperat: quam uero habuerit linea ſumpta æqualis ſimul iſtis, duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ ſecundæ, & ſextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ, ad lineam ſumptam iſtis ſimul æqualem, quincuplæ maximæ, & item decuplæ ſecundę & tertiæ, & quincuplæ quartæ, eam habeat linea quædam ſumpta ad exceſſum quo maxima proportionalium excedit tertiam: lineæ ſumptæ utreq; ſimul erũt duæ quintæ illius lineæ quæ maxima eſt proportionalium linearum. Sint quatuor lineæ proportionales a b, b c, b d, b e: & quam proportionem habet b e ad e a, eam habeat f g ad tres quintas ipſius a d. Quam uero habet linea æqualis iſtis ſimul duplæ a b, quadruplæ b c, ſexcuplæ b d, triplæ b e, ad lineam æqualem ſimul iſtis, quincuplæ a b, decuplę c b, & b d, &

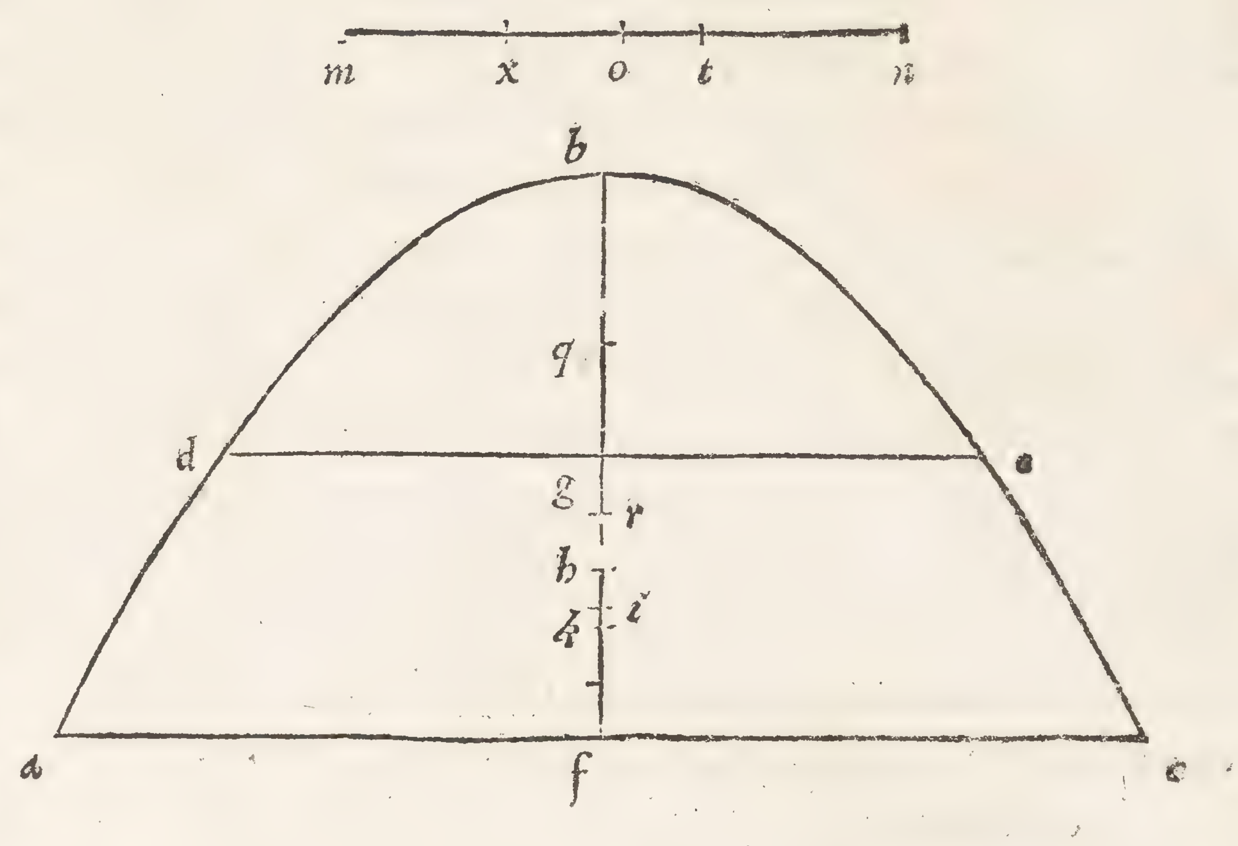


quincuplæ b e, eam habeat proportionem g h ad ipſam a d. Oſtendendum eſt, quod f h eſt duæ quintæ ipſius a b. Quoniam enim a b, b c, d b, b e ſunt proportionales: erunt etiam a c, c d, d e in eadem proportione. et utraque ſimul a b, b c ad ipſam b d, eam habet proportionem, quam a d ad d e: & ſimiliter utraque ſimul c b, b d ad e b, & omnes ad omnes. Eam ergo habet proportionem a d linea ad d e, quam linea æqualis iſtis ſimul, dupla a b, tripla c b, & b d, ad lineam æqualem iſtis ſimul, duplæ b d, & e b. Quam autem proportionem habet linea æqualis iſtis ſimul, duplæ a b, & quadruplæ b c, & quadruplæ b d, & duplæ b e, ad lineam iſtis ſimul æqualem, duplæ d b, & ipſi b e, eam habebit d a ad aliquam minorem ipſa d e. Sit illa d o, & utræque ad primas eandem habebunt proportionem: habebit itaque o a ad ipſam a d, eam quam linea æqualis iſtis ſimul duplæ a b, quadruplæ b c, ſexcuplæ d b, & triplæ b e, ad compoſitam ex dupla utriuſque ſimul a b, b e, & quadruplæ utriuſque ſimul c b, b d. Habet autem & a d linea ad g h, eam quam quincupla utriuſq; ſimul a b, b e cum decupla utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla a b, & quadrupla c b, & ſexta b d, & tertia e b. Diſſimiliter autem proportionibus ordinatis: id eſt in proportionalitate perturbata. per æquam ergo eam habet proportionem a o ad g h, quam compoſita ex quincupla utriuſque ſimul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Verum compoſita ex quincupla utriuſq; ſimul a b, b e, & decupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad cõ poſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, eam habet proportionem quam quinq; ad duo. Igitur o a ad g h eam habet proportionem, quam quinq; ad duo. Rurſus quoniam o a ad d a eam habet proportionẽ, quam e b, cum dupla b d ad æqualem lineæ compoſitæ ex dupla utriuſque ſimul,

a b, b e, cum quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Eſt autem & ſicut d a ad d e, ſic cōpoſita ex dupla a b, tripla b c, & ipſa b d, ad æqualem ipſi e b, cũ dupla b d: diſſimiliter igitur proportionibus ordinatis & ſectis, id eſt perturbata proportionalitate per æquam ſicut o d ad d e, ſic dupla a b, cum tripla b c, & ipſa b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. quare & ſicut o e ad e d, ſic c b cum tripla b d, & dupla e b, ad duplam utriuſque ſimul a b, b e, & quadruplam utriuſq; ſimul c b, b d. Eſt autem & ſicut d e ad e b, ſic a c ad c b, & c d ad d b. quare ſecundum compoſitionem tripla c d, ad triplam d b, ſicut dupla d e ad duplam e b. & ideo compoſita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad compoſitam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Diſſimiliter rurſus proportionibus ordinatis, id eſt, in perturbata proportionalitate per æquam, eandem habebit proportionem o e ad e b, quam a c cum tripla c d, & dupla d e, ad duplam utriuſq; ſimul a b, b e, cum quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Tota igitur o b ad e b, eam habet proportionem, quam tripla a b, cum ſexcupla c b: & tripla d b, ad duplam utriuſq; ſimul a b, b e, cum quarta utriuſq; ſimul c b, b d. Et quia e d, d c, c a in eadem ſunt proportione, & utraque ſimul, unaquæq; c b, b d, d b, b c, c b, b a, erit ſicut e d ad d a, ſic utraque ſimul e b, b d ad utramq; ſimul d b, b c, cum compoſita ex c b, b a. Igitũ componendo ſicut e a ad d a, ſic utraque ſimul e b, b d, cum utraq; ſimul a b, b c, & utraq; ſimul c b, b d: quæ eſt utraque ſimul e b, b a, cum dupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad utramq; ſimul b d, d a, cum dupla b c. Quare & dupla ad duplam eandem habebunt proportionem: hoc eſt, ſicut e a ad d a, ſic dupla utriuſq; ſimul e b, b a, cum quarta utriuſque ſimul c b, b d, ad duplam utriuſque ſimul a b, b d, cum quadrupla b c. quare & ſicut e a ad tres quintas d a, ſic compoſita ex dupla utriuſque ſimul e b, b a, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla c b. Verum ſicut e a ad tres quintas a d, ſic e b ad f g. Sicut igitur e b ad f g, ſic dupla utriuſq; ſimul a b, b e, cum quadrupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, cum quadrupla c b. Oſtenſum eſt autem, ſicut o b ad e b, ſic tripla utriuſque ſimul a b, b d cum ſexcupla c b, ad duplam utriuſq; ſimul a b, b e, cum quarta utriuſq; ſimul c b, b d. per æquam igitur ſicut o b ad f g, ſic compoſita ex tripla utriuſq; ſimul a b, b d, & ſexcupla c b, ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla c b. Verum compoſita ex tripla utriuſque ſimul a b, b d, & ſexcupla c b, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla c b, proportionem habet quam tria ad duo. & ad tres quintas eiuſdem, proportionem habet quam quinq; ad duo. Oſtenſum eſt autem, quod o a ad g h proportionem habet, quam quinq; ad duo. Tota igitur a b ad totam f h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo. Quod ſi hoc uerum eſt, neceſſe quoq; eſt f h duas quintas ipſius a b eſſe. Quod fuerat demonſtrandum.

10 CVIuslibet fruſti à ſectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis eſt in linea recta, quæ fruſti exiſtit diametros: qua in quinq; partes ęquas diuiſa, cẽtrum in quinta eius media exiſtit, atq; in eo eius puncto quo ipſa quinta ſic diuiditur, ut portio eius propinquior minori baſi fruſti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem, quam habet ſolidum, cuius baſis ſit quadratum lineæ illius quę fruſti baſis maior extiterit. Altitudo uero iſtis utriſq; ſimul ęqualis, lineę quæ dupla ſit minoris baſis fruſti, & baſi maiori eiuſdem, ad ſolidum quod baſim habeat quadratum baſis minoris fruſti, altitudinem uero iſtis utriſq; ſimul æqualem, lineæ quæ dupla ſit maioris baſis, & baſi minori. Sint in ſectione rectanguli coni duæ lineæ rectæ a c, d e: diametros a b c portionis eſto b f. Conſtat quòd a c, d e ſunt æquediſtantes ei lineæ, quæ per punctum b ducta, contingit ipſam ſectionem: & diuiſa e f in quinque partes æquas, eſto quinta media h k. & h i ad i k eam habeat proportionem, quam ſolidum, quod baſim habeat quadratum a f, altitudinem

titudinem uero æqualem iſtis utriſq; ſimul, duplæ d g, & ipſi a f, ad ſolidum cuius baſis exiſtat quadratum f g, altitudo uero æqualis iſtis utriſq; ſimul duplæ a f, & ipſi d g. Oſtendẽdum eſt, quod fruſti a d c e, centrũ grauitatis eſt punctum i. Eſto itaq; m n æqualis ipſi f b, & n o æqualis b g: & ſumatur ipſarum m n, n o media proportionalis m x, & quarta proportionalis n t. & ſit ſicut t m ad t n, ita f h ad quandam ab ipſo i, quocũque proueniat in fruſto punctum. Nihil enim refert ſiue inter f g, ſiue inter b g pũcta proueniat: quæ ſit i r. Et quoniã in rectanguli co-



ni ſectione diametros portionis eſt f b, ipſa f b uel eſt principalis ipſius ſectionis, uel ei diametro æquediſtat. lineæ uero a f, d g in eam intentæ, ſunt ductæ, cum ſint æquediſtantes ei lineæ quæ à puncto b ducta ſectionem contingit. Si autem hoc fuerit, erit ſicut a f ad d g potentia, ſic f b ad b g longitudine: hoc eſt m n ad n x potentia. Sicut ergo a f ad d g potentia, ſic m n ad n x potentia. Quare & longitudine ſunt in eadem proportione. Sicut ergo cubus lineæ a f, ad cubum lineæ d g, ſic cubus ipſius m n ad cubum n x. Verum ſicut cubus a f ad cubum d g, ſic portio b a c ad portionem d b e. Sicut autem cubus m n ad cubum n x, ſic m n ad n t. Quare & diuidendo erit, ſicut fruſti a d, c e ad portionem d b e, ſic m t ad t n: hoc eſt tres quintæ f g ad i r. Et quoniam ſolidum baſim habens quadratũ a f, altitudinẽ uero compoſitam ex dupla d g, & ex a f ad cubum a f, eam habet proportionem quam dupla d g, cum a f ad a f. Quare & ſicut dupla n x, cum n m ad n m. Eſt autem ſicut cubus a f ad cubum d g, ſic m n ad n t. Sicut autem cubus d g ad ſolidum, baſim habens quadratum d g, altitudinem uero compoſitam ex dupla a f, cum d g: ſic d g ad compoſitam ex dupla a f & d g. Quare & ſicut t n ad compoſitam ex dupla o n et t n. Sunt igitur quatuor magnitudines: ſolidum, quod baſim habet quadratum a f, altitudinem uero compoſitam ex dupla d g & a f: & cubus a f, & cubus d g: & ſolidum baſim habens quadratum d g, altitudinem uero compoſitam ex dupla a f, & d g. quæ quatuor magnitudinibus ſunt proportionales, duabus ſimul ſumptis compoſitæ ex dupla n x & m n, & alij magnitudini ipſi m n, & alij deinceps n t, & poſtremò compoſitæ ex dupla n o & t n. Per æquam igitur fiet, ſicut ſolidum baſim habẽs quadratũ a f, & altitudinem compoſitam ex dupla d g, & a f, ad ſolidum quod baſim habeat quadratum d g, altitudinem uero compoſitam ex dupla a f: & d g eam habeat proportionem, quam compoſita ex dupla n x, & m n, ad compoſitam ex dupla n o, & n t. Verum ſicut ſolidum dictum, ad ſolidum dictum, ſic h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ſic compoſita ad compoſitam. Quare & componendo antecedentibus ſequentia, erit igitur ſicut f g ad i k, ſic quincupla utriuſque ſimul m n, n t, & decupla utriuſque ſimul n x, n o, ad duplam n o & t n. Et ſicut f g ad f k, quæ eſt duæ quintæ illius: ſic quintupla utriuſque ſimul m n, n t, & decupla utriuſque ſimul n x, n o, ad duplam utriuſque ſimul m n, n t, & quadruplam utriuſq; ſimul n x, x o. Erit igitur ſicut f g ad f i, ſic quincupla utriuſq; ſimul m n: n t, et decupla utriuſq; ſimul x n, n o, ad cõpoſitã ex

dupla m n,& quadrupla n x,& ſexcupla o n, & tripla n t. Quoniã igitur ſunt quatuor lineæ rectæ conſequenter proportionales,m n, n x,o n,n t: & eſt ſicut n t ad t m,ſic quædam ſumpta,hoc eſt r i,ad tres quintas f g, hoc eſt m o. Sicut autem cõpoſita ex dupla m n,& quadrupla n x,& ſexcupla o n,et tripla n t,ad compoſitam ex quincupla utriuſque ſimul m n,n t,& decupla utriuſq; ſimul x n,n o,ſic altera quædam ſumpta,hoc eſt i f ad f g,hoc eſt ad m o: erit per ea quæ prædicta ſunt r f, duæ quintæ m n,hoc eſt f b. Quare centrum grauitatis portionis a b c erit r punctum. Eſto iam d b e portionis centrum grauitatis q punctum. Fruſti itaque a d c e,centrũ grauitatis erit in linea q r recta,terminans lineam ab r eductam,quæ eãdem habet ad illam proportionem,quam fruſtum ad reſiduam portionem. Eſt autem punctum i,centrum ipſum: quoniam ipſius f b tres quintæ eſt ipſa b r: ipſius uero b g tres quintæ eſt b q. Reliquæ ergo,hoc eſt g f, tres quintæ eſt q r. Quoniã igitur eſt ſicut a d e c fruſtum ad b d e portionem,ſic m t ad n t. Sicut autem m t ad n t,ſic tres quintæ g f, quæ eſt q r,ad r i. Erit igitur & ſicut fruſtum a d c e, ad portionem d b e,ſic q r ad lineam quæ eſt inter centrum grauitatis a b c portionis, & centrum grauitatis fruſti. Sed cẽtrum grauitatis a b c portionis, eſt r punctum, et centrum grauitatis portionis d b e eſt q. Conſtat igitur,fruſti a d e c, punctum i eſſe centrum grauitatis.

FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

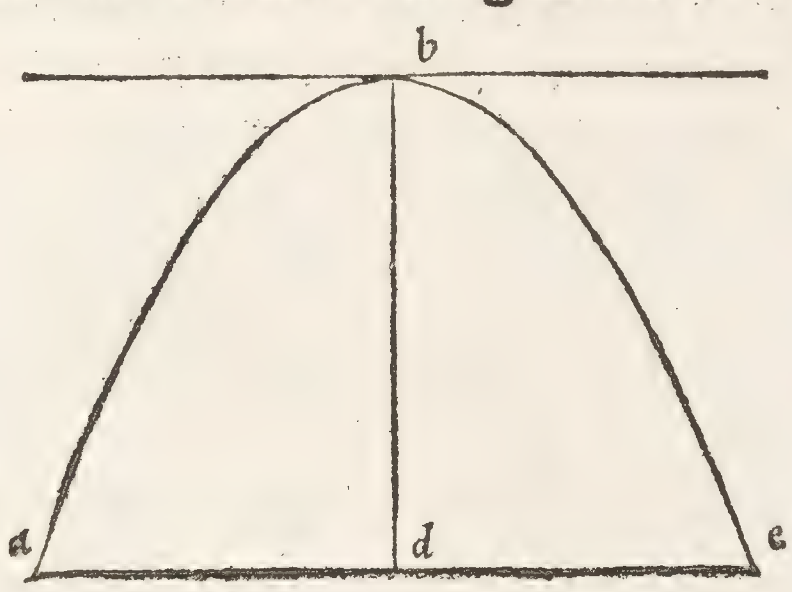
ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONtentæ à linea recta & ſectione rectanguli coni.

ARCHIMEDES DOSItheo rectè agere.

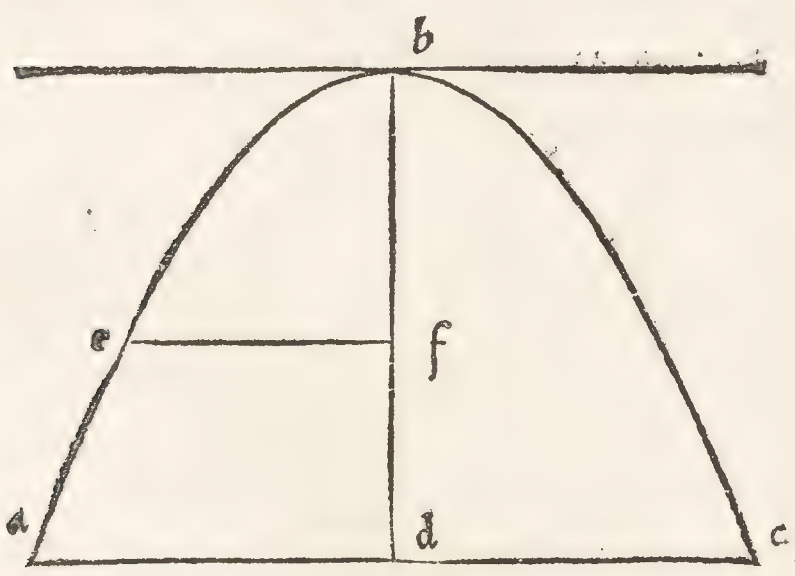
CV M audiſſem Cononem mortuum eſſe, qui nobis adhuc in amicitia reſidebat: teq; hominem Cononis antea admodum familiarem extitiſſe, & in Geometria maximè uerſatum, eius quidem uita priuati deſiderio, & dolore maximo affecti ſumus, cum eſſet homo, cum mei amantiſſimus, tũ in ſpeculationibus ingenio admirali, ac propè diuino. Tibi uero, ueluti antea Cononi ſcribere conſueueramus ſæpiſſimè, præconati ſumus inter cætera Geometricæ facultatis theoremata, hoc unum conſcriptum mittere: quod cum antea tentatum eſſet à nullo, nuper à nobis inſpectum, & depræhenſum eſt: primò quidem Mechanica ratione perquiſitũ, poſtea uero Geometrica quoq; demonſtratum. Eorum enim qui antehac Geometriæ operam dederunt, nõnulli id inueſtigare, & memoriæ mandare ſtuduerũt, circulo dato, uel circuli portione quacunq;, ſpacium rectilineum æquale illi poſſe inueniri. Itẽ ſpacium à coni totius rectanguli ſectione compræhenſum, & linea recta, ad quadrati formam & menſuram reducere conati ſunt, ſumentes non facilè conceſſibilia fundamenta ipſis, ſanè cum hæc ipſa à quàmplurimis non inuenta ſint. Illud etiã diuul-

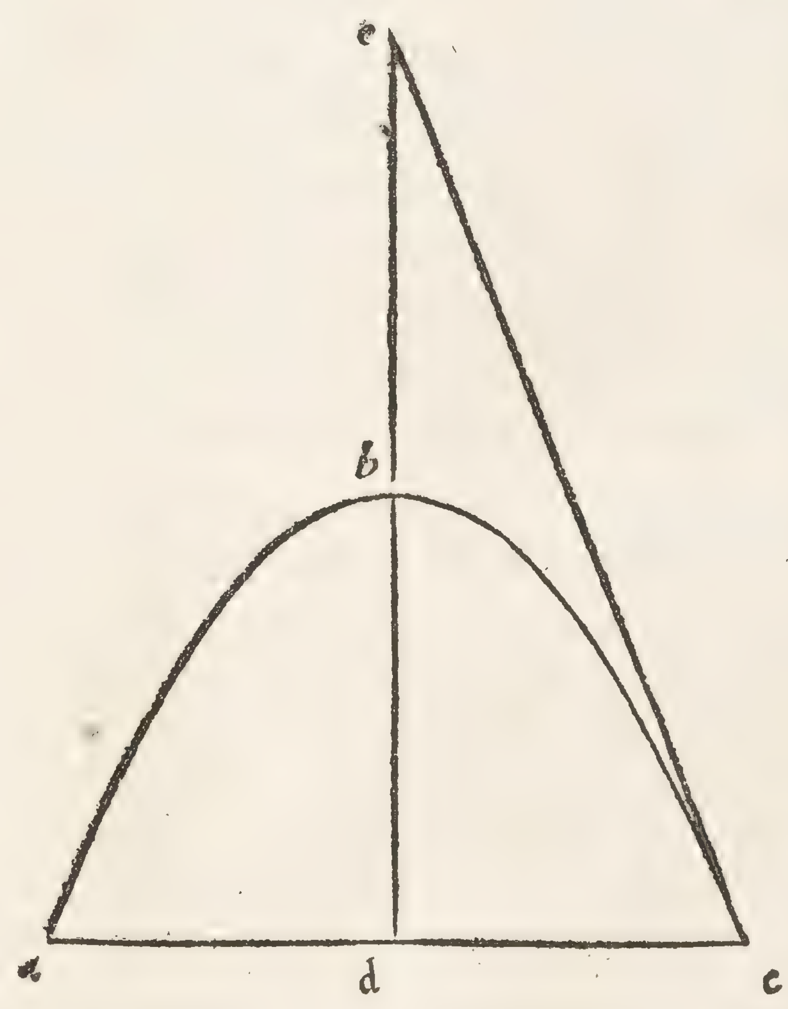
diuulgatum, portionem à rectanguli coni ſectione contentam ueterũ neminem ingreſſum quadrare comperimus, quod nuper à nobis inuentum eſt. Hoc enim demonſtratur, portionem omnem à recta linea & coni rectanguli ſectione compræhenſam, trianguli illius eſſe ſeſquitertiam, qui quidem triangulus baſim habeat & altitudinem cum portione eandem. Hoc fundamento ad eius demonſtrationem ſumpto, ſpaciorum inæqualium exceſſus quibus minus à maiore ſuperatur, ſibi ipſis totiens coaceruari poſſe, ut quodcunqꝫ ſpacium propoſitum quod ſit finitum ſuperent. Superiores quoque Geometræ hoc fundamento uſi ſunt: & circulos habere inter ſe proportionem diametrorum duplicatam, hoc demonſtrauerunt, illo fundamento muniti. Item ſphæras inter ſe proportionem ſuarum diametrorum habere triplicatam. Amplius, omnem pyramidem tertiam eſſe partem eius priſmatis, quod eandem pyramidi baſim & altitudinem æqualem habuerit. Item, omnem conum tertiam eſſe partem eius cylindri, qui baſim cono eandem, & æqualem habuerit altitudinem. Similiter eodem fundamento prouecti, illa ſcripſerunt, cum id accidat, eorum quæ prędicta ſunt theorematum unumquodqꝫ nihil minus ſibi fidei comparare, quàm ea quæcunque ſine eo fundamento ſunt demonſtrata. Nuper autem his quæ à nobis expoſita ſunt, in ſimilem huius fundamenti fidem adductis, deſcribentes igitur eius demonſtrationes mittimus: primum quidem quo pacto per Mechanicas rationes inſpecta fuerunt, deinde Geometricis argumentis demonſtrata. Præmittuntur autem initio ea Conica elementa, quibus ad eorum demonſtrationes maximè indigemus. Vale.

SI coni rectãguli ſectio ſit, in qua a b c, et linea b d recta ſit, aut æquediſtans diametro, aut ipſa diametros, & a c ſit æquediſtans lineæ contingenti in puncto b ſectionẽ rectanguli coni: æqualis erit a d ipſi d c. Quod ſi a d eſt ipſi d c æqualis, æquediſtantes erunt a c, & contingens ſectionem coni in puncto b. 1



SI coni rectanguli ſectio ſit a b c, ſitqꝫ b d æquediſtans diametro, aut ipſa diametros: linea uero a d c ęquediſtans lineæ coni ſectionem in puncto b contingenti: & linea e c ſectionem coni in puncto c cõtingat: erunt b d, & b e æquales. 2

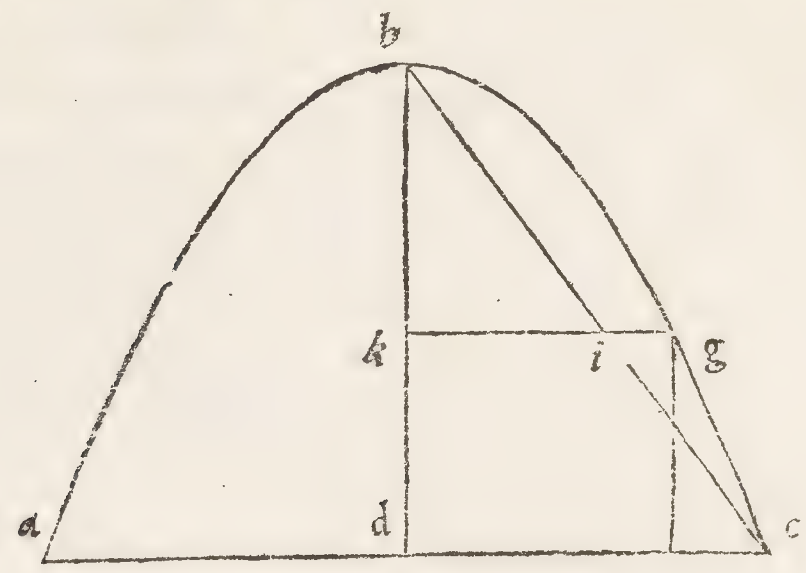


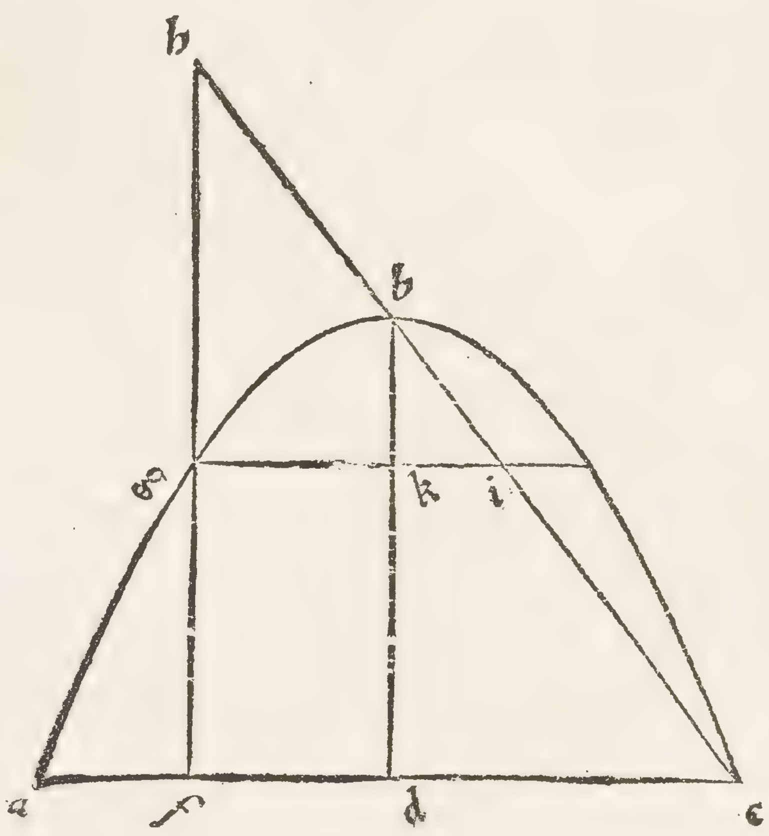


SI ſectio rectanguli coni ſit a b c, & b d, æquediſtans diametro, aut ipſa diametros: & ducantur quædam æquediſtantes illi, quæ in puncto b contingit ſectionem 3

ctionem, quæ ſint a d, e f. Erit ſicut b d ad b f longitudine, ita a d linea ad e f potentia. Hæc autem demonſtrata ſunt in Conicis elementis.

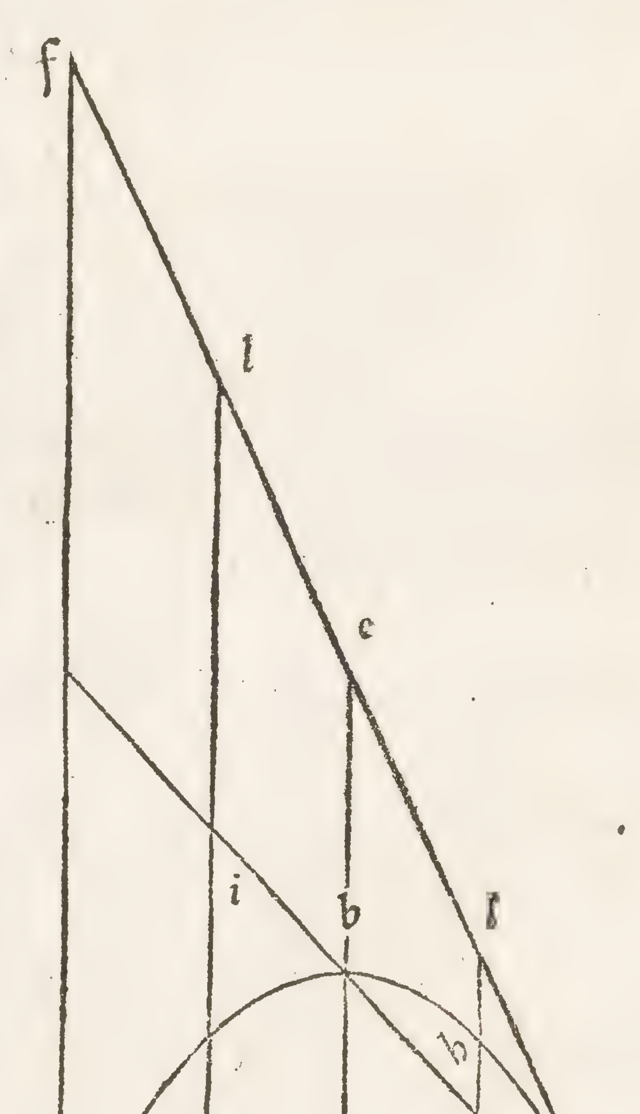
4 ESto portio compræhenſa à coni rectanguli ſectione, & linea recta a b c, & linea b d. à medio a c ducatur æquediſtans diametro, aut ipſa diametros: & ſit b c linea iũcta, et protracta. ſi iam ducatur alia quædam æquediſtãs ipſi b d, quæ ſit f h, diuidens lineas rectas c b, a c: ducatur item alia æquediſtans ipſi a c, ſecans lineam b d,





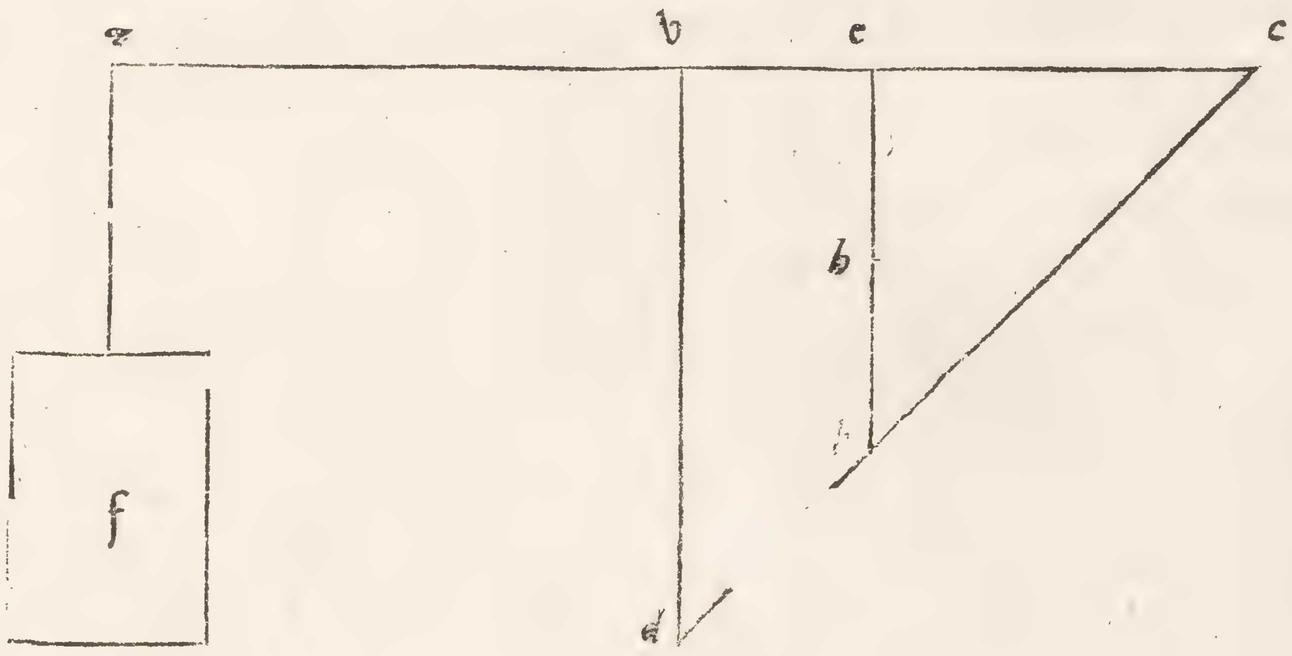
quæ ſit k g: eandem habebit proportionem f h ad h g, quam d a ad d f. Ducta eſt namque per punctum i, linea k g æquediſtans ipſi a c. Eſt igitur ſicut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potentia. nam hoc demõſtratum eſt. Erit igitur ſicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia. Aequales ſunt enim d f, k g. & ideo ſicut b c ad b h potentia: proportionales igitur ſunt b c, b h, b i lineæ. Quare eam habet proportionem b c ad b h, quam c h ad h i. Eſt igitur, ſicut c d ad d f, ita f h ad h g. Verum c d eſt æqualis ipſi d a. Cõſtat igitur, d a eam ad d f habere proportionem, quam f h ad h g.

5 ESto portio cõtenta à linea recta, & coni rectanguli ſectione a b c, & ducatur à puncto a, linea a f, æquediſtans diametro. à puncto c ducatur contingens ſectionem coni, cõcurrens cum a f, in puncto f. Si iam ducatur aliqua in triangulo f a c, quæ ſit æquediſtãs ipſi a f: ipſa ducta ſecundũ eandẽ proportionem à ſectione rectanguli coni ſecabitur, & ipſa a c ab ipſa producta proportionaliter. Eiuſdem uero rationis erit pars lineæ a c uerſus a, cuius pars lineæ ductæ uerſus a c lineam. Ducatur itaq; aliqua d e, æquediſtans lineæ a f: & primò ſecet lineam a c in duo æqua. Quoniam igitur a b c eſt ſectio coni rectanguli, & b d ducta eſt ęquediſtans diametro, & a d d c ſunt æquales, erit a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem rectanguli coni in puncto b. Rurſus quoniam d e diametro eſt æquediſtans, & à puncto c ducta eſt c e contingens ſectionem rectanguli coni in puncto c, & linea a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem coni, erit e b æqualis b d, Quare eandem habet proportionem d a ad d c, quam d b ad b e. Siquidem

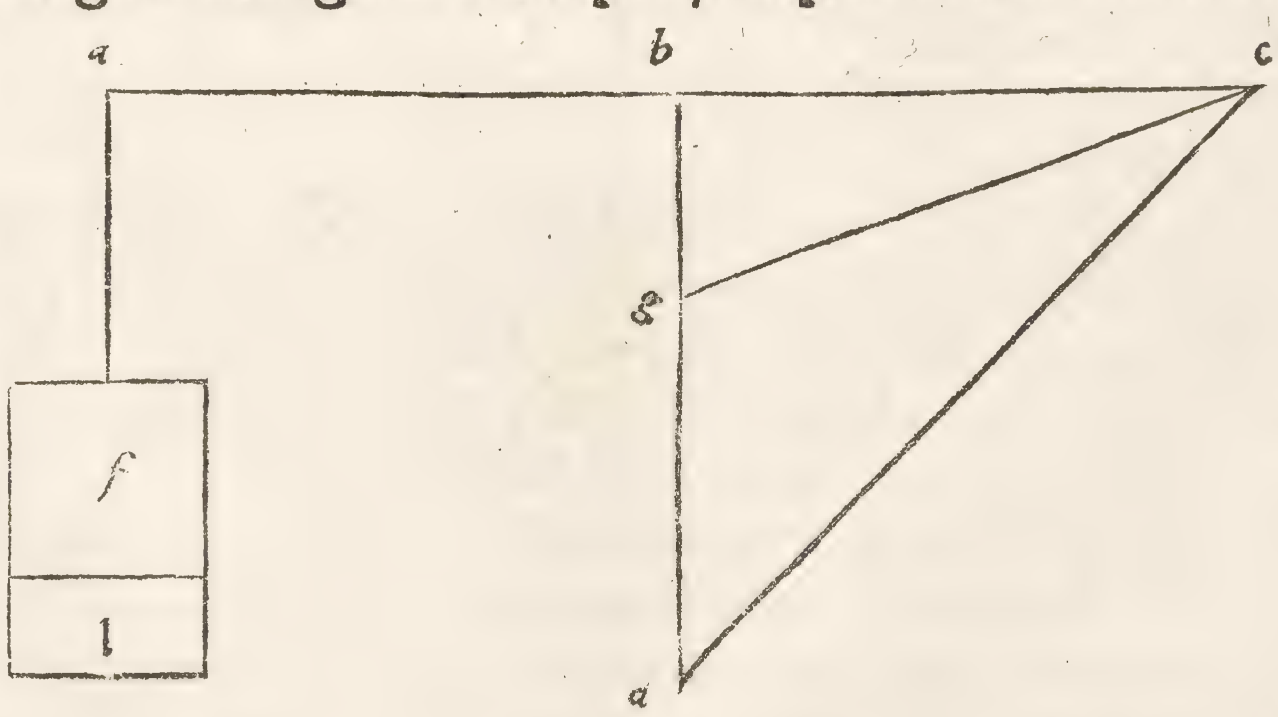


dẽ igitur linea ducta, per æqualia diuidat lineã a c, oſtenſum eſt. Sin nõ per æqua diuidat, ducat̃ alia quędã k l, æquediſtans ipſi a f. Oſtendendũ quod eandẽ habet proportionẽ a k ad k c, quam k h ad h l. Cũ igitur b d, ſit æqualis ipſi b e, æqualis erit & i l ipſi k i. Eandẽ ergo proportionẽ habet k i ad i l, quã d c ad d a. Habet aũt & k i ad i h, eam quã d a ad d k. nam hoc eſt prius oſtẽſum in præmiſſa. Quare eã habet k h ad h l, quam a k ad k c proportionem. Demõſtratũ eſt igitur propoſitũ.

6 INtelligatur autem hoc primum, quod eſt in inſpectione propoſitum, ſitq; conſpectum ad horizontem erectum, & lineæ a b: deinde pars quidem uerſus d intelligatur infrà, pars autem uerſus aliud ſuprà. Triangulus autem b d c ſit rectangulus, habẽs rectum angulum ad c, & b c latus ęquale dimidio libræ: ut ſit linea a b lineæ b c æqualis. Suſpendatur autẽ triangulus ex punctis b c, item ſuſpendatur aliud ſpacium f ex altera parte libræ in puncto a. & ſpacium f ſuſpenſum in puncto a, æqueponderet ipſi triangulo b c d, ſic



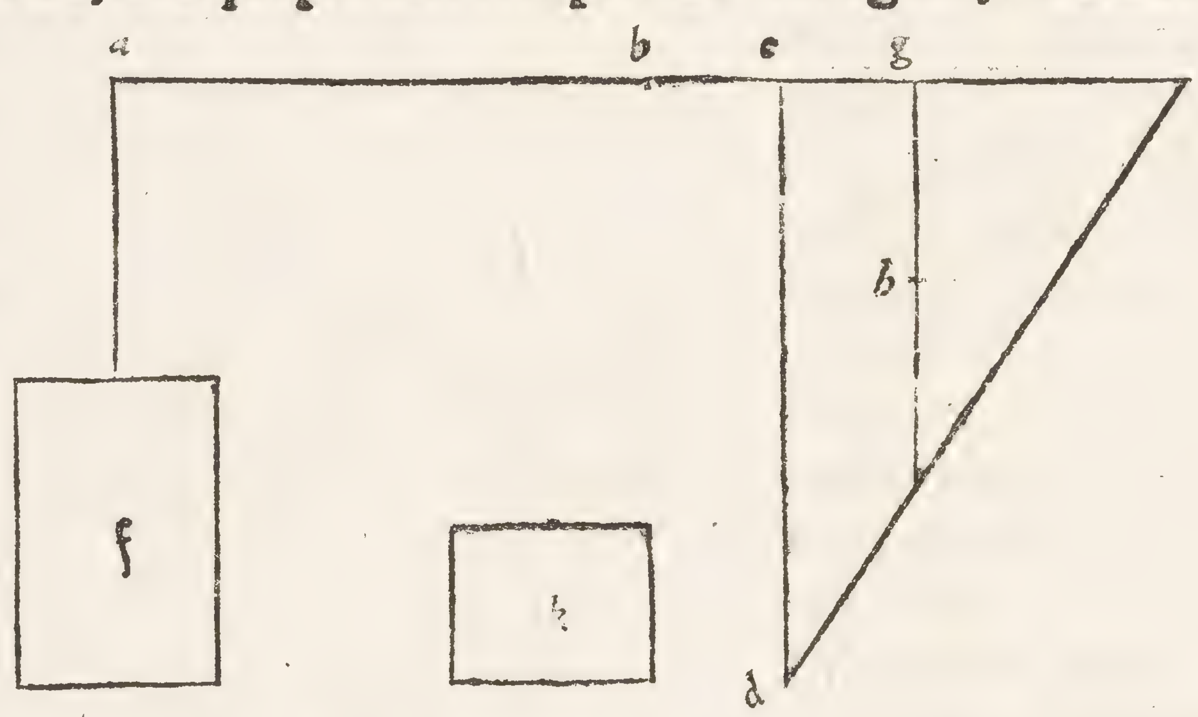
poſito ut nunc eſt collocatum. Dico tunc f ſpacium trianguli b c d tertiam partem eſſe. Quoniam igitur ſuppoſitum eſt, libram æqueponderare, a c linea ipſi libræ aſſimilatur. Terminantur autem lineæ ad angulos rectos ex ipſa a c ductæ in plano, erecto ſuper horizontẽ: & erũt perpendiculares ſuper horizõtem. Diuidatur iam linea b c in puncto e, ita ut c e dupla ſit ipſius e b: & ducatur k e æquediſtans ipſi d b, & hæc in duo æqua diuidatur in puncto h. trianguli itaq; b a c centrum grauitatis eſt punctum h. nam hoc eſt oſtenſum in Mechanicis. Si igitur trianguli b d c ſuſpenſio, quæ eſt ad b c, ſoluatur, & ipſe ſuſpendatur ad punctum e, manet triangulus ut nunc ſe habet. Vnumquodq; enim ſuſpenſorũ ex quo puncto conſtitutum manet, ita ut ſecundum lineam perpendicularem ſit punctum ſuſpenſibilis, & centrum grauitatis ſuſpenſi. nam hoc quoque oſtenſum eſt. Quoniam igitur triangulus b d c eandem habet conſtitutionem ad libram, æqueponderabit ſimiliter ipſi ſpacium f. Quoniam autem æqueponderãt f ſpacium ſuſpenſum in puncto a, & triangulus b d c in puncto e, conſtat quod mutuam inter ſe habent proportionem longitudinũ: & eſt ſicut a b ad b e, ita triangulus b d c ad ſpaciũ f. ſed a b tripla eſt ipſius b e, igitur triangulus b d c ſpacij f triplus exiſtit. Manifeſtũ quoq; eſt, quod ſi triangulus b d c ſpacij f triplus extiterit, ambo ſimiliter cõſtituta æqueponderabunt.



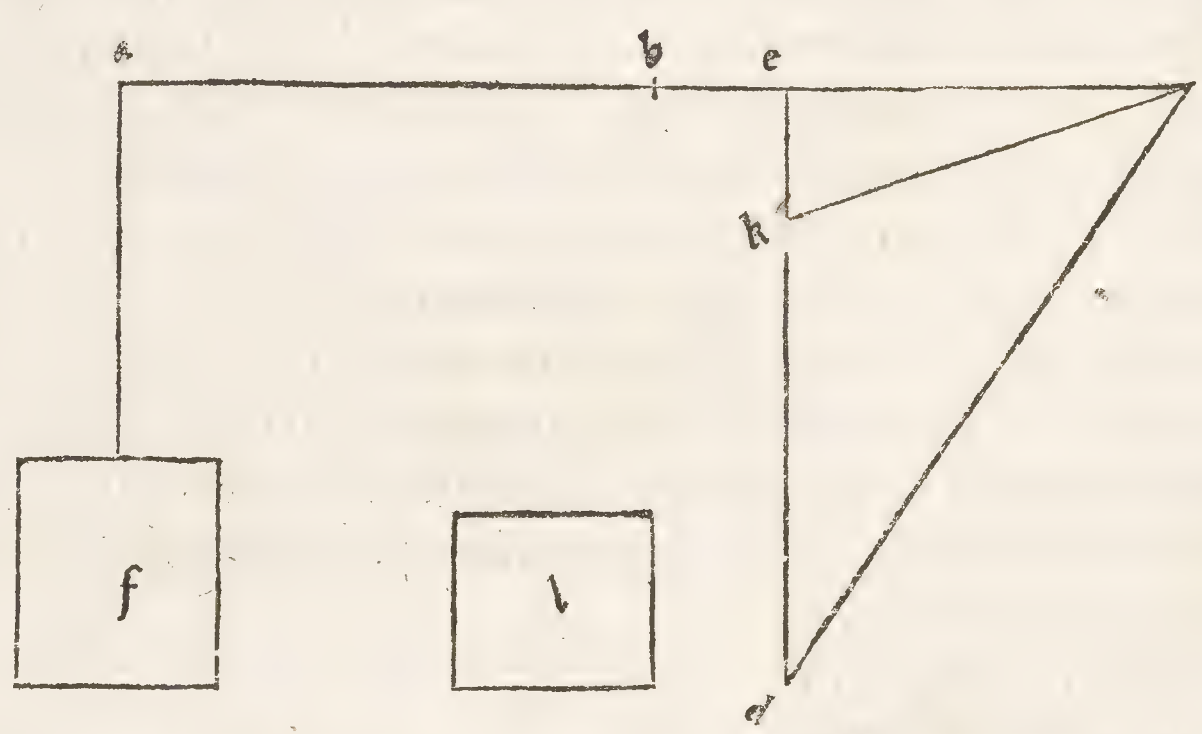
7 ESto itẽ libra linea a c, medium aũt eius ſit b, & ſuſpẽdadatur ſecũdum b triangulus c d g: triangulus uero c d g ſit triangulus ambligoni-

us,qui baſim habeat lineā d g, altitudinē uero ęqualem dimidiæ libræ, & ſuſpendat̄ d c g triāgulus ex b c pūctis. ſpaciū uero f ſuſpenſum ad a, æqueponderās eſto ipſi c d g triangulo, ſic ſe habenti uti nunc poſitū eſt. Similiter oſtēdetur ſpacium f eſſe tertiam partem trianguli c d g. ſuſpendatur autem & quoddam aliud ſpaciū ex a, quod ſit tertia pars trianguli b c g. triangulus itaq; b d c æqueponderabit ſpacio f l. Cum itaq; b c g triangulus æqueponderet ipſi l, & b c d ipſi f l, & trianguli b c d tertia pars eſt f l, manifeſtum eſt triangulum c d g ſpacij f triplum haberi.

8 Eſto libra a c, medium eius b: & ſuſpendatur ſecundū b triangulus c d e rectangulus, qui rectū angulum habeat ad e, & ſuſpendatur ex libra ſecundum c e, & ſpacium f ſuſpendatur ex a, & æqueponderato ipſi c d e triangulo, ſic ſe habente ſicut nūc poſitum eſt. Quam autem proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d e triāgulus ad ſpacium k. Dico iam, f ſpacium triangulo c d e minus eſſe, ſpacio autem k maius. Sumatur itaq; triāguli c d e centrū grauitatis quod ſit h, et ducatur h g ęque diſtans d e. Quoniam igitur triangulus c d e æqueponderat ſpacio f, eandem proportionem habet ſpacium c d e ad ſpacium f, quam a b ad b g. Quare f minus eſt c d e. & quoniam c d e triangulus ad ſpacium f, eam proportionem habet, quam b a ad b g: ad k uero eam quam b a ad b e: conſtat triāgulum c d e maiorem proportionē habere ad k, quàm ad f. quare f ſpacium ipſo k maius exiſtit.

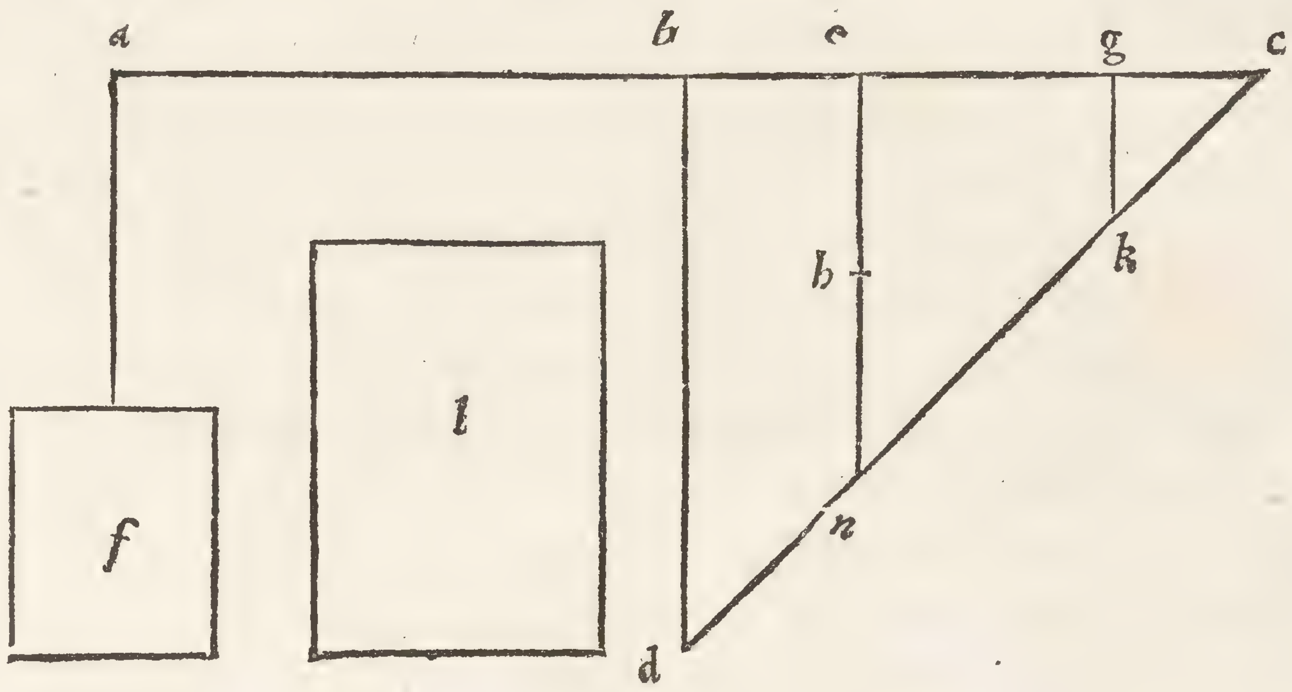


9 Eſto item libra a c, & medium eius b, & c d k triangulus ambligonius, qui baſim habeat d k, altitudinem uero e c, & ſuſpendatur ex libra in punctis c e. Spaciū uero f ſuſpendatur, & æqueponderato d e k triangulo, ſic ſe habēti ſicuti nūc iacet. Quam aūt proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d k triangulus ad ſpacium l. Dico iam ſpacium f, ipſo l maius eſſe, et ipſo d c k minus. Hoc ſimiliter præmiſſo, demonſtrabitur.

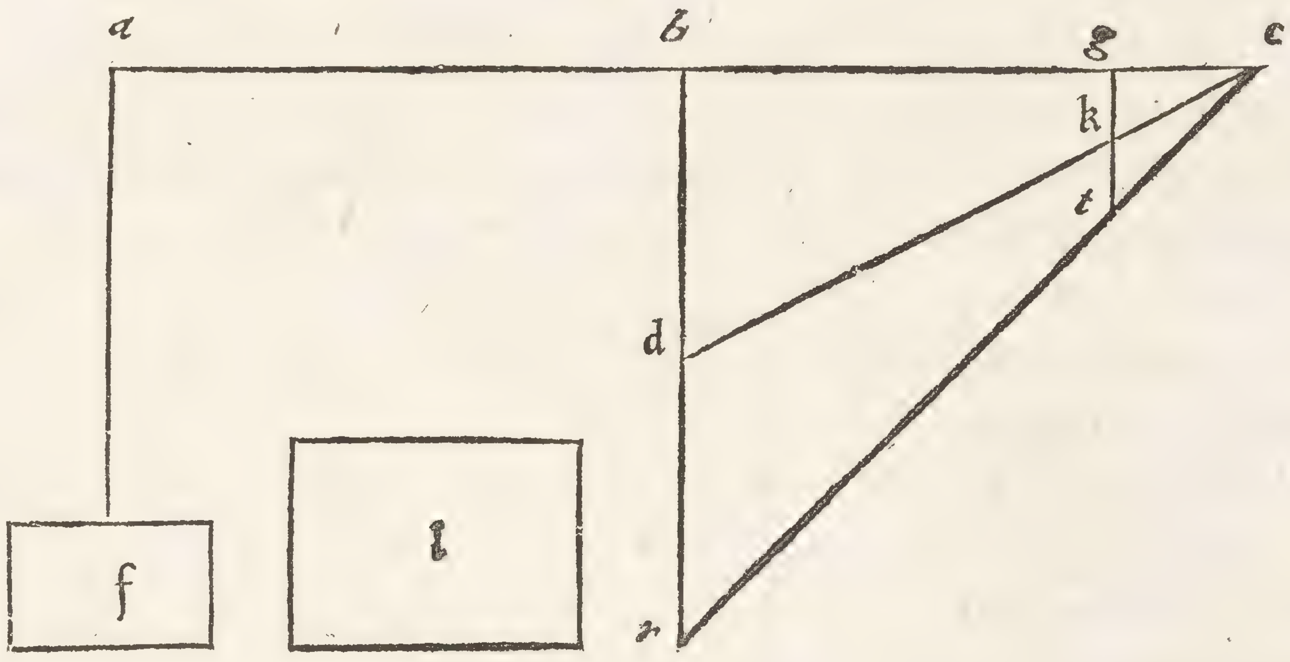


10 Eſto item a b c libra, eius medium b, menſula uero b d g k habeat angulos ad puncta b g rectos, latus uero k d inclinatum in c: & quam habet proportionē b a ad b g, eam habeat b d k g menſula ad l ſpacium. Suſpenſa autem ſic menſula b d k g ex libra in b g punctis, ſuſpenſum quoq; ſit f ſpacium in a, & æqueponderato ipſi b d k g menſulæ, ſic ſe habenti ſicut nunc iacet: dico iam f ſpacium ipſo l minus eſſe. Diuidatur itaq; b g, in puncto e, ita ut quam proportionem habet dupla d b, & ipſa k g ad duplam ipſius k g, & ipſam b d, eam habeat e g ad b e: & ducta per punctum e, linea e n æquediſtans ipſi b d, diuidatur in duo æqua in pūcto h, iam menſulæ b d k g centrum grauitatis eſt h, nam hoc oſtenſum eſt in Mechanicis.

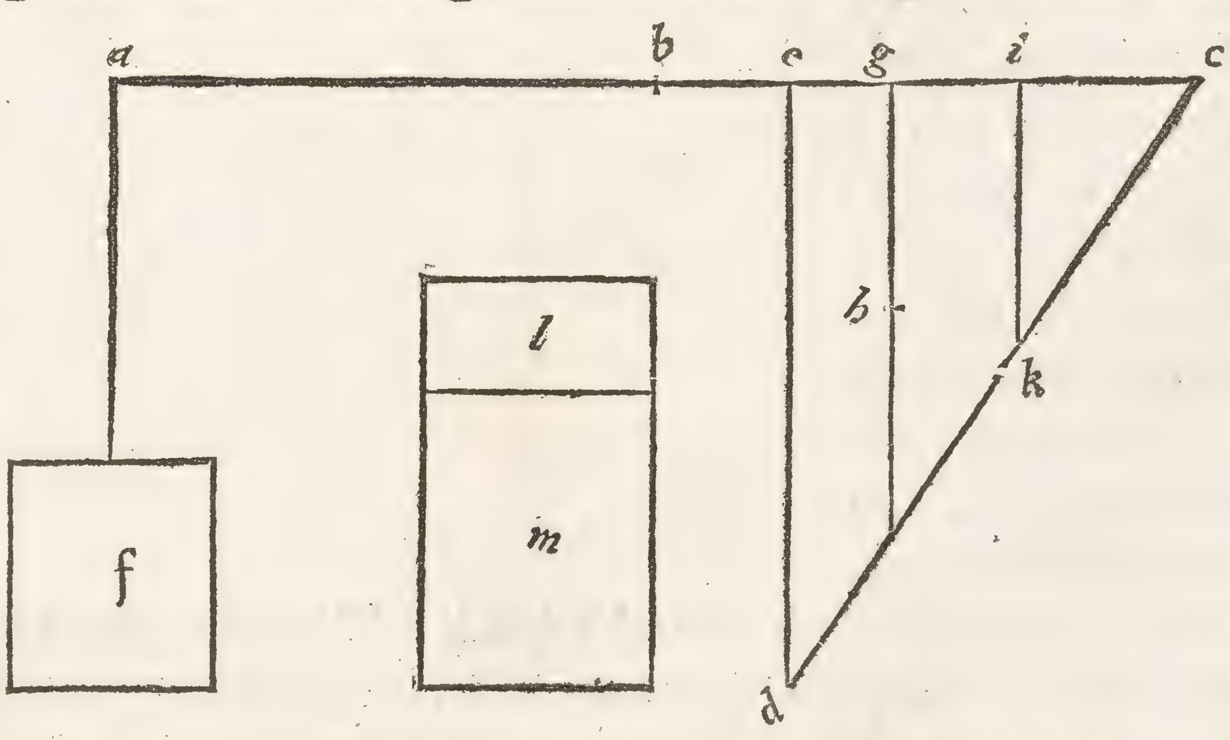
chanicis. Si igitur b d k g in e ſuſpendatur, à punctis autem b g ſoluatur, manet eandem habens conſiſtentiam, per eandẽ quæ in ſuperioribus rationem, & æqueponderabit ſpacio f. Quoniam igitur mẽſula b d k g in e ſuſpẽſa ęqueponderat ſpacio f in a ſuſpenſo, erit ſicut b a ad b e, ita menſula b d k g ad ſpacium f. Maiorem igitur proportiõem habet menſula b d k g ad ſpacium f, quàm ad ſpacium l, cum a b habeat ad b e maiorem proportionem, quàm ad b g. Quare ſequitur f ſpacium eſſe ipſo l ſpacio minus.



ESto item a b c libra, & medium eius b, & b d t r menſula ſit quæ habeat latera 11
k d, t r uerſus c inclinata: latera uero d r, k t ſuper b c perpendicularia, & d r cadat in b. Quam autem proportionem habet a b ad b g, eam habeat k d t r menſula ad l ſpaciũ: mẽſula uero k d r t ſuſpendatur ex libra in punctis b g, & ſpacium f in puncto a, et æqueponderato ſpacium f mẽſulæ k d t r, ſic ſe habenti uti nũc iacet. Similiter iam ſuperiorib. oſtendetur, ſpacium f ſpacio l minus eſſe.

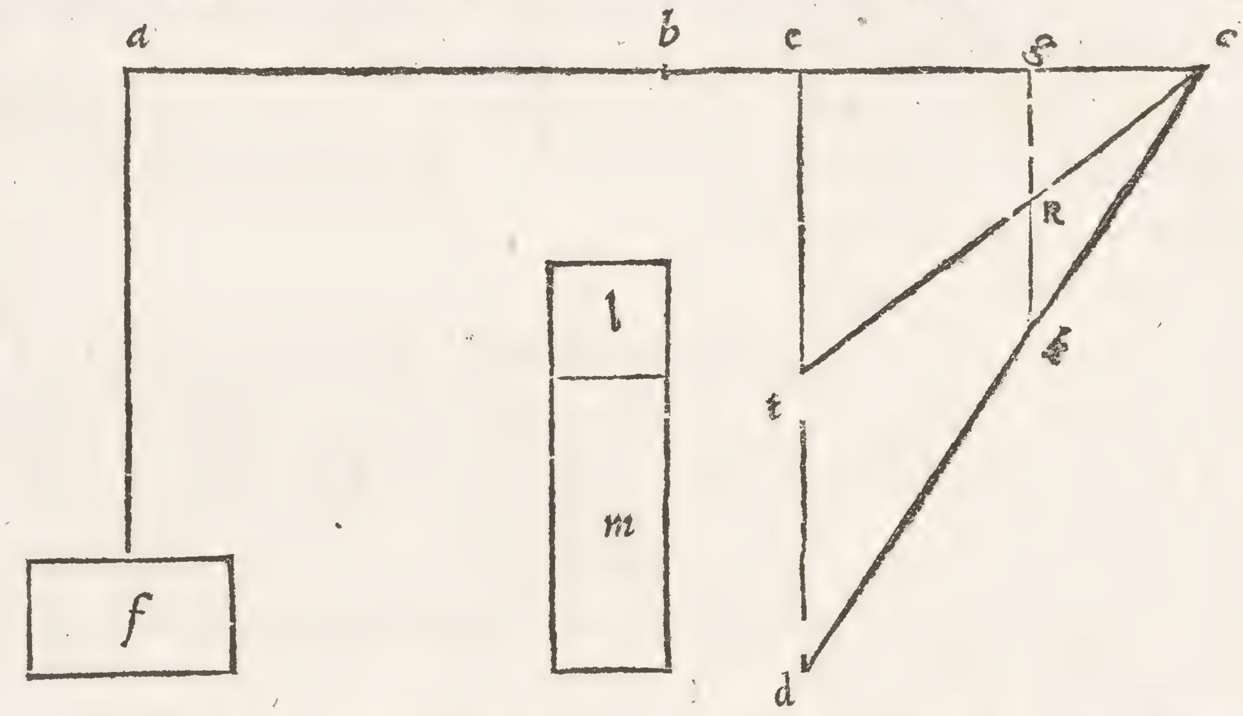


ESto item libra a b c, medium eius b, & menſula d e k g ſit, quæ angulos ad 12
e g puncta rectos habeat: lineas uero k d, e g uerſus c inclinatas. et quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat d e k g menſula ad m. Quã autem habet a b ad b e, eam habeat d e k g menſula ad l. menſula uero d e k g ſuſpenſa ſit in libra ex punctis e g: ſpaciũ uero f ſuſpendatur ex a, æqueponderans ipſi menſulæ, ſic ſe habenti uti nunc iacet. Dico iam ſpacium f ipſo l maius eſſe, ipſo uero m minus. Sumam enim centrum grauitatis menſulæ d e k g, quod ſit h. Sumetur autem ſimiliter ſuperioribus: & ducatur h i ęque

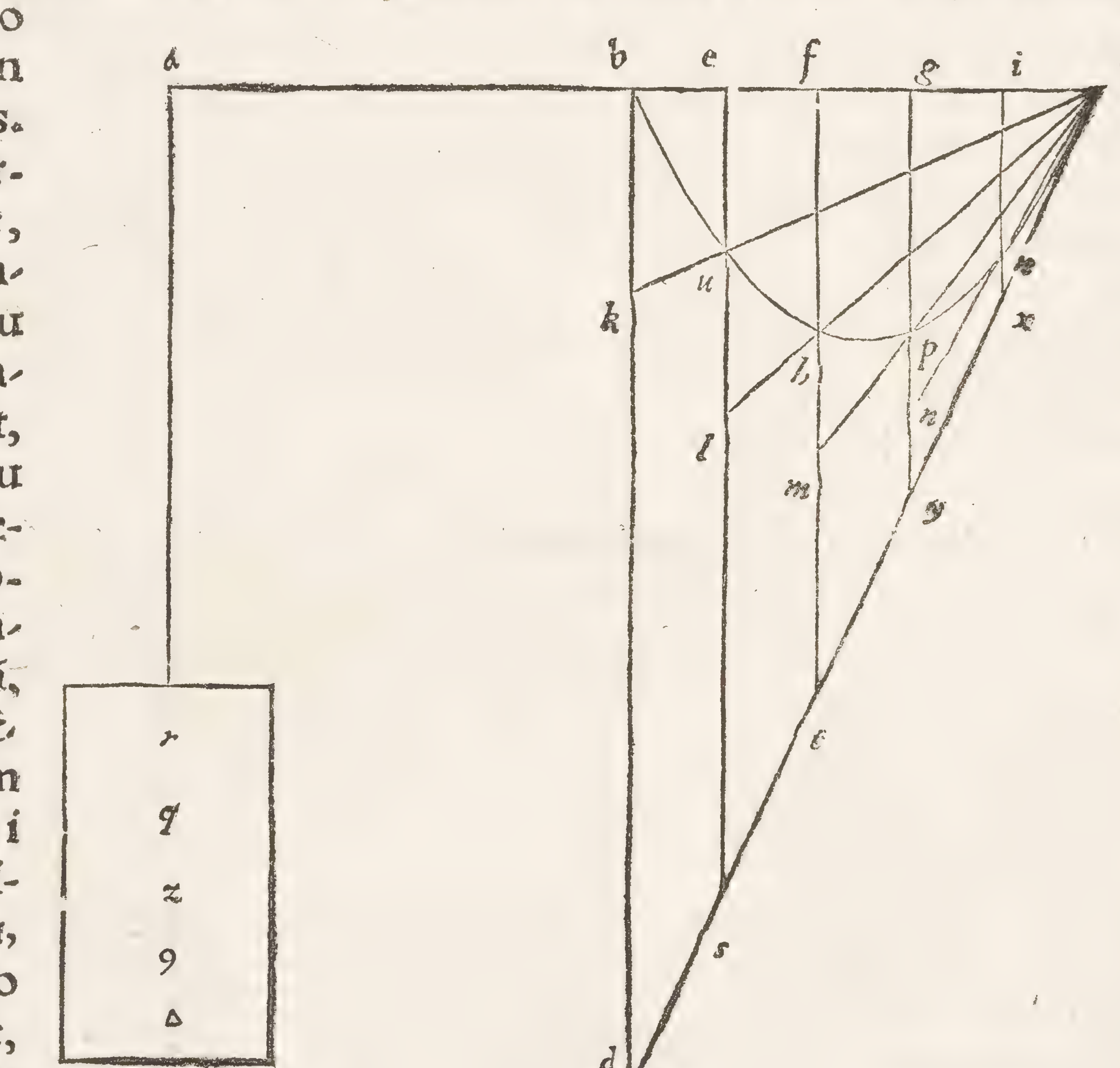


diſtans ipſi d e. Si igitur menſula ex libra ſuſpendatur in puncto i, & ſoluatur à punctis e g, manet eandem habens conſiſtentiam, & æqueponderabit ipſi f ſpacio eadem qua ſuperius ratione: quoniam menſula ſuſpenſa in puncto i, ęquepõderat ſpacio f ſuſpenſo in a. eãdem habebit proportionẽ menſula ad ſpaciũ f, quã a b ad b i. Cõſtat igitur d e k g maiorẽ ad l habere proportionem, quàm ad f: ad m uero minorẽ, quàm ad f. Quare f ſpaciũ ipſo l ſpacio maius eſt, ipſo uero m minus.

13 ESto rurſus libra a c, medium eius b, & menſula k d t r, ita ut latera eius k d, t r ſint uerſus c inclinata: ipſa uero d t, k r ſint ad a b perpendicularia. Suſpenſa autem ſit ex libra in puncto e, & ſpacium f ſuſpendatur in a, & æquepõderato ipſi mẽſulæ k d t r, ſic ſe habenti, ut nunc habet. & quam habet proportionem a b ad b e, eam habeat d t k r, ad ſpacium l. Quã uero habet a b ad b g, eam habeat menſula ad ſpacium m. Similiter, ut ſuprà proximè oſtẽdetur, f ſpaciũ ipſo l ſpacio eſſe maius, ipſo m uero minus.

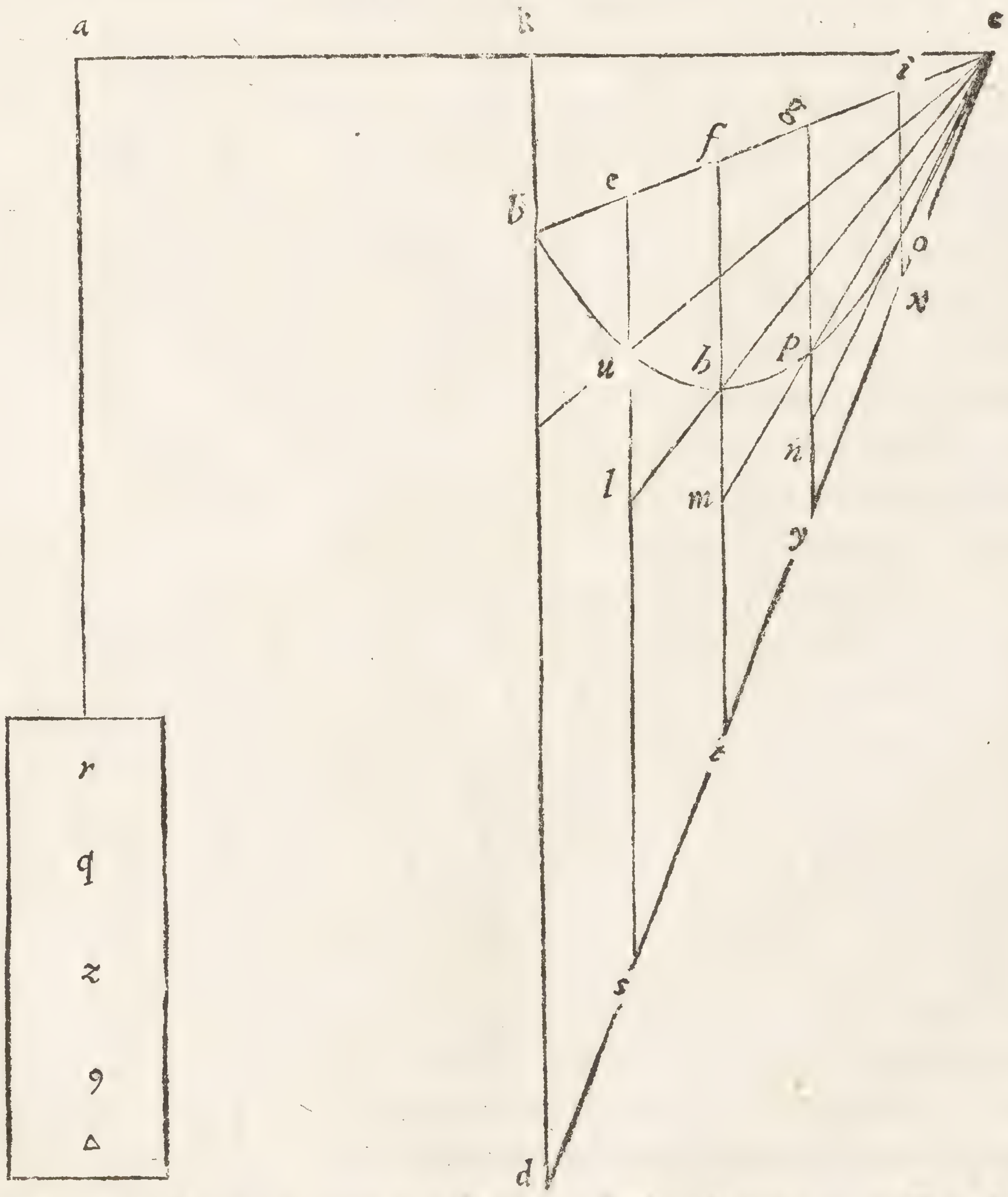


14 ESto portio b o c compræhenſa à recta linea, & rectanguli coni ſectione. Eſto primum b c ad angulos rectos ſuper diametrum, & ducatur à puncto b æquediſtans ipſi diametro: & à puncto c ducatur c d contingens ſectionem rectanguli coni in puncto c. erit iam b c d triangulus rectangulus. Diuidat̃ b c in partes quotcunqꝫ, b e, e f, f g, g i: & à punctis diuiſionum ducantur æquediſtantes diametro e ſ, f t, g y, i x. à punctis autem, quibus ipſę ſecant ſectionem coni, educãtur & iungant̃ ad c. Dico iã, b d c triangulũ mẽſulis quidẽ k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c minorẽ eſſe, ꝙ triplũ. mẽſulis aũt f u, g h, i p, & triangulo i o c maiorem eſſe, quàm triplum. Ducatur itaqꝫ linea recta a b c, & ſumatur a b æqualis ipſi b c, & intelligatur libra a c, cuius medium b, et pendeat ex b. Suſpendatur autem b d c ex libra in punctis b c: ex altera autem libræ parte ſuſpendantur ſpacia r q z 9 Δ in puncto a: & ſpacium r æqueponderet menſulæ d e, ſic ſe habenti ut nunc iacet: ſpacium uero q menſulæ f l: ſpacium z



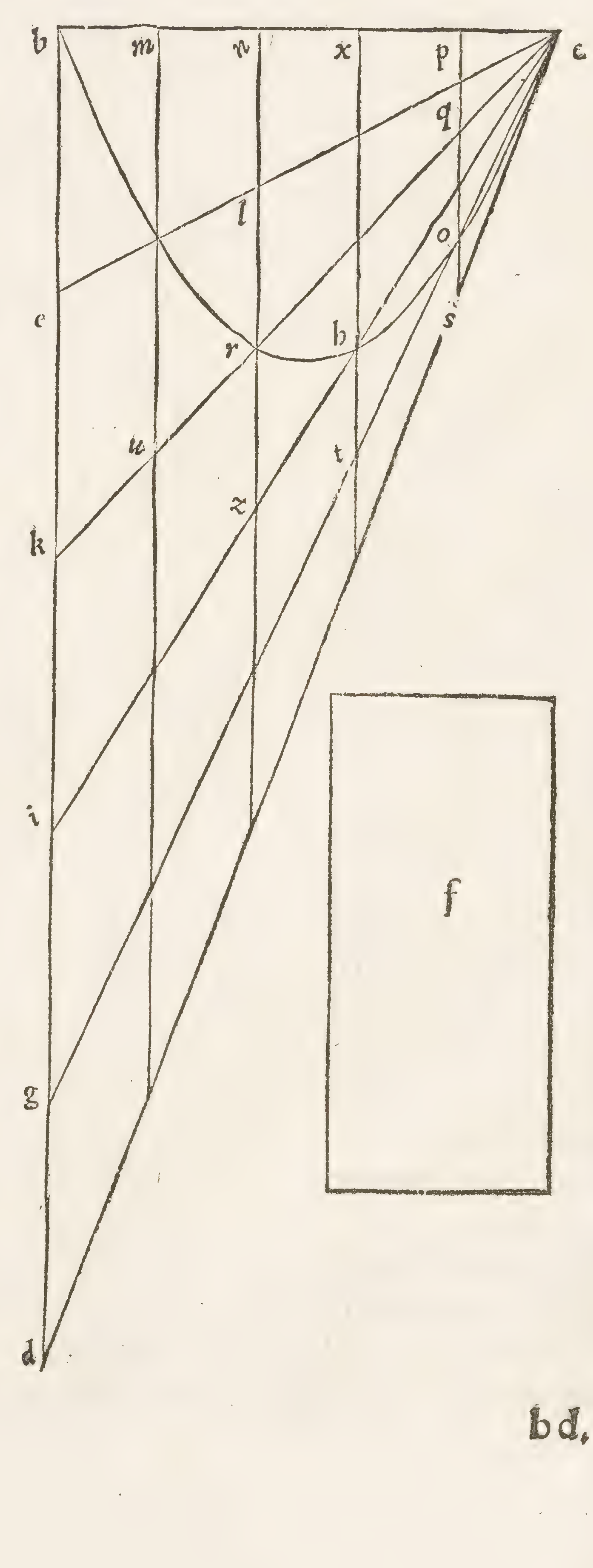
menſulæ

menſulæ t g: ipſum 9 menſulæ x i: ipſum uero Δ triangulo c i x: æqueponderabit iam totũ toti. Quare triangulus b d c, triplus erit ſpacio r q z 9 Δ. Et quoniã eſt portio b c o, quæ compræhenditur à recta & ſectione rectanguli coni, & à puncto b, ducta eſt b d æquediſtans diametro: & à puncto c ducta c d, contingens ſectionẽ coni in puncto c: ducta quoq; alia æquediſtãs diametro ſ e, eandem habebit proportionem b c ad b e, quam ſ e ad e u. Quare b a ad b e, eam habet quam menſula d e ad k e. Similiter oſtenditur, a b ad b f eam habere proportionem, quam ſ f menſula ad l f, ad b g autem eam quam t g ad m g. ad lineam uero b i, eam quam y i ad n i. Quoniam igitur menſula d e habet angulos ad puncta b e rectos, latera uero uerſus c inclinata: æqueponderat autem ipſi quoddam ſpacium r, ſuſpenſum ex libra in puncto a, menſula ſic manẽte uti nunc poſita eſt: & eſt ſicut b a ad b e, ſic mẽſula d e ad ſpacium k e. [ſicut autem b a ad b f, ita menſula d e ad ſpacium q. Spacium igitur q ſpacio r maius eſt. nam hoc oſtẽſum eſt.] quare ſpacium k e maius eſt ſpacio r. nam hoc oſtenſum eſt. Rurſus menſula f ſ, quæ angulos ad f e puncta rectos habet, & latus ſ t inclinatum uerſus c, & æqueponderat ei ſpacium q ex libra ſuſpenſum in puncto a, menſula ſic manente uti nunc iacet: & eſt ſicut b a ad b e, ſic f ſ menſula ad f u. Sicut autem a b ad b f, ita f ſ menſula ad l f. Quare q ſpacium menſula l f minus exiſtit, ipſa uero f u maius. Hoc enim oſtẽſum eſt. Eadem ratione & z ſpacium, menſula quidem m g minus: ipſa uero h g maius eſſe probatur. & 9 ſpacium menſula n i minus, ipſa uero p i maius. Similiter autem & d ſpacium triangulo quidem x i c minus, ipſo uero c i o maius. Quoniam igitur menſula k e eſt maior ſpacio r, & ipſa l f maior ipſo q, & m g ipſo r: & n i ipſo 9, & x i c triangulus ipſo Δ: conſtat quod omnia ſimul dicta ſpacia maiora ſunt ſpacio r q z 9 Δ. Eſt autem ſpacium r q z 9 Δ tertia pars trianguli b c d. Quare manifeſtum eſt, triangulũ b c d minorem eſſe quàm triplum menſularum k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c. Rurſus quoniam mẽſula f u minor eſt ſpacio q, menſula h g minor ſpacio z, & ipſa i p ipſo 9, & triangulus i o c ipſo Δ: conſtat, dicta ſpacia ſimul omnia minora eſſe ſpacio q z 9 Δ. Quare manifeſtũ quoque eſt, b d c triangulum maiorem eſſe quàm triplum menſularũ u f, h g, i p, & triangulo i c o: minorẽ uero quàm triplũ earũ quæ antè ſcriptæ ſunt.



ESto rurſus b o c portio à recta linea & à ſectione rectanguli coni compræhenſa, & b c linea non ſit ad angulos rectos ſuper diametrum, neceſſe iam eſt lineam à puncto b du- 25

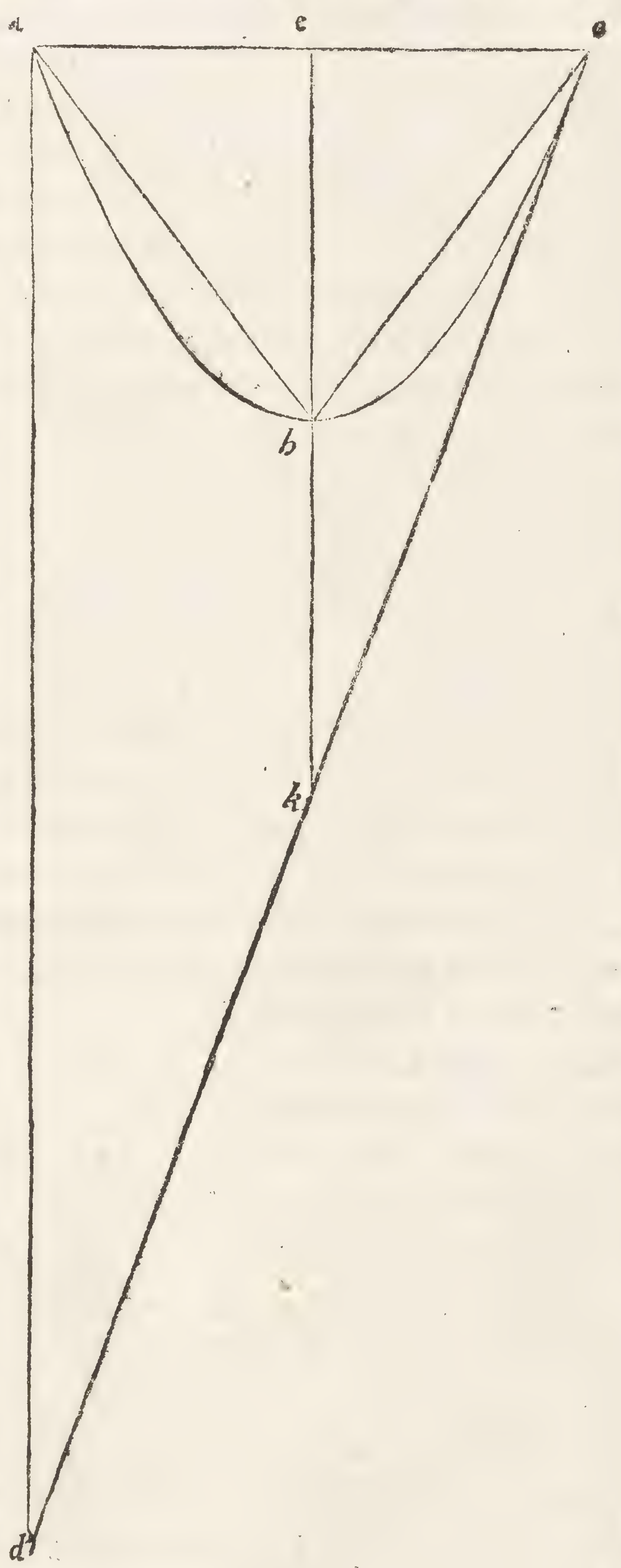
ctam , æquediſtantem diametro uerſus portionem facere angulum obtuſum
in parte uerſus b , aut uerſus c , & intra ſectionis portionem , aut extra . Eſto ita-
que quod faciat angulum extra obtuſum uerſus b , & ducatur b d æquediſtans
diametro à puncto b : & à puncto c ducatur c d contingens ſectionem in puncto
c, & diuidatur b c in partes æquas quotcunq; b e , e f , f g , g i , i c . à punctis uero e f g
i ducantur e ſ, f t , g y , i x diametro æquediſtantes , & à punctis quibus ipſæ ſecant
ſectionem coni iungantur lineæ ad c , & extrahantur . Dico iam & nunc trian-
gulum b d c eſſe menſulis ſ u , l f , m g , n i , & triangulo c i x eſſe minorem quàm
triplum: menſulis uero f u , g h , i p , & triangulo c o i maiorem eſſe quàm triplum .
Extrahatur d b in alteram partem, & à puncto c ducatur ad ipſam c k perpendicu
laris: & protendatur, donec ſumatur a k æqualis ipſi c k . Intelligatur rurſus libra
a c, cuius medium k , & pendeat libra ex k puncto: & c k d triangulus ſuſpẽdatur
ex media libra in pũctis k c, ſic ſe habens ut nũc iacet. Ex altera parte libræ ſuſpẽ-
dantur in puncto a, ſpacia r q z 9 Δ: & r quidẽ menſulæ d e æqueponderet, ſic ma-
nenti uti nunc poſita eſt: & ſpacium q menſulæ f f, ſpacium z menſulæ t g: & ipſũ
9 ipſi y i. & ipſum Δ ipſi c i x triangulo, æqueponderabit quoq; totum toti . Quare
triangulus d b c triplus exiſtit ſpatio r q z 9 Δ. ſimiliter ſuperiori proximo oſtende
tur , mẽſulam e z ſpacio r eſſe maiorem,
& menſulam l f maiorem ſpacio q, & f u
minorem : & menſulam m g maiorem
ſpacio z, ipſam uero g h minorem. & n i
maiorem ſpacio 9, & ipſam p i minorẽ.
& x i c triangulum ſpacio Δ maiorem, ip
ſum c i o minorem eodem . Quare con-
ſtat propoſitum.



16 ESto item portio b o c cõtenta à linea
recta, & à ſectione rectanguli coni.
et ducat̃ per b linea b d æquediſtãs dia-
metro, & à puncto c ducatur contingẽs
ſectionem coni in puncto c, quæ ſit c d.
Eſto trianguli b c d tertia pars ſpacium
f. Dico iam, portionem b o c ęqualem eſ
ſe ſpacio f. Nam ſi nõ, erit uel maior, uel
minor. Eſto primum ſi fieri poteſt ma-
ior, & ſit ut exceſſus quo portio b o c ſu-
perat ſpacium f, ſibijpſi totiẽs coaceruе-
tur, donec compoſitum ex ipſo excedat
triangulum b c d. Poteſt itaq; ſumi ſpa-
cium quoddã minus illo exceſſu, quod
ſpacium ſit pars trianguli b c d . ſit ergo
b e c triangulus dicto exceſſu minor, &
pars trianguli b c d. Erit quoq; linea b e
pars lineæ b d. Diuidat̃ itaq; b d in par-
tes, & ſint diuiſionum puncta g i k : & à
punctis g i k, ad lineam c e rectam ducã
tur lineæ rectæ, quæ ſecabũt ſectionem
coni, cum linea c d contingat eam in pũ
cto c. & per puncta quibus rectæ ſecant
ſectionem coni, ducãtur lineæ rectæ m
u, n r, x h, p ſ æquediſtantes diametro. e-
runt eædem æquediſtantes quoque ipſi

b d. Quoniã igitur triangulus b e c eſt minor exceſſu, quo portio b o c excedit ſpa
cium f. Conſtat utraq; ſimul, ſpacium f, et triangulum b e c, minora eſſe portione:
& triãgulo b c e æquales ſunt menſulæ illæ per quas ſectio coni permeat, quę ſunt
m e, u l, h r, h o cum triangulo c o ſ. nam menſula m e eſt communis: m l autem eſt
æqualis u l, & l x æqualis ipſi h r, & q x æqualis ipſi h o, & triangulus c q p æqualis
triangulo c o ſ. Spacium igitur f minus eſt menſulis m l, x r, p h, cũ triangulo p o c:
& eſt triangulus b c d triplus ſpacij f. Quare b c d minor eſt, quàm triplus menſu-
larum m l, r x, h p cum triangulo p o c, quod quidem eſſe non poteſt. nam oſten-
ſus eſt maior eſſe, quàm triplus. non eſt igitur portio maior ſpacio f. Dico item
eam neq; eſſe minorem illo. Eſto enim, ſi eſſe poteſt, minor. Rurſus exceſſus quo
ſpacium f ſuperat portionem b o c, ipſe ſibijpſi totiēs coaceruetur, donec ſuperet
triangulum b c d. Poteſt itaq; ſpaciũ aliquod ſumi quod ſit minus exceſſu, quod-
que ſit pars trianguli b c d, & reliqua eadem diſponantur ut prius. Quoniam igit̃
triangulus b c e minor eſt exceſſu quo ſpacium f ſuperat portionem b o c, triangu
lus b e c, & portio b o c, utraq; ſimul ſunt minora ſpacio f. Eſt autem & ipſum f ſpa
cium minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p ſ. nam b c d triangulus
ſpacij f eſt triplus: ſpaciorum autem prædictorum minor, quàm triplus, ut in prę
miſſo eſt oſtenſum. Igitur triangulus b c e,
& portio b o c, ſimul ſunt minora quadrila-
teris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p ſ. Qua
re portione inde ablata, quę communis eſt,
triangulus b c e minor erit ipſis ſpacijs com
præhenſis, quod eſſe non poteſt. nam oſten
ſum eſt, triangulum b c e menſulis e m, u l,
h r, h o, & triangulo c o ſ eſſe æqualem, quæ
ſimul ſunt maiora dictis ſpacijs compræhē
ſis. Non eſt igitur portio b o c minor ſpacio
f: & oſtenſum eſt eo maiorem eſſe nō poſſe.
Portio ergo ſpacio erit æqualis.

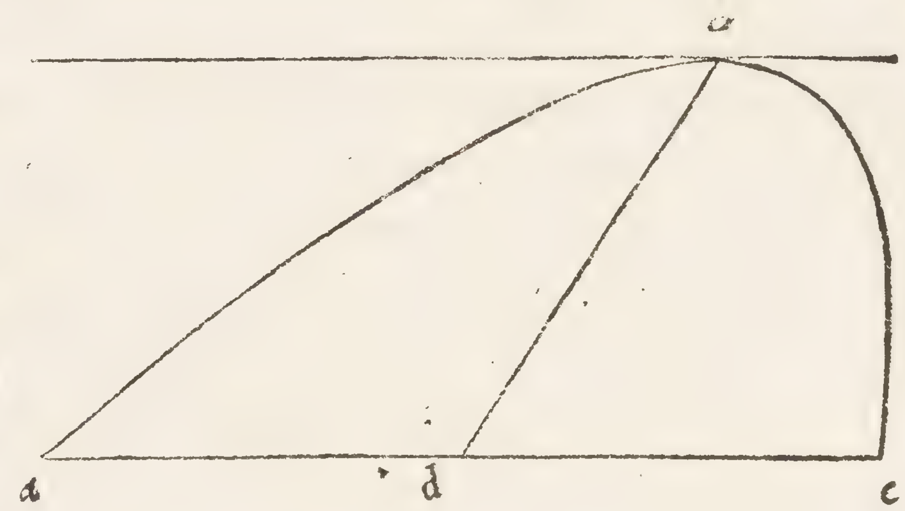
HOc autem demōſtrato, manifeſtũ eſt,
portionē à recta linea et à ſectione re- 17
ctanguli coni compræhenſam, eſſe ſeſqui-
tertiam triangulo, qui habeat baſim cũ por-
tione eandem, & altitudinem eidem æqua-
lem. Eſto portio comprehenſa à linea recta,
& ſectione rectanguli coni: uertex eius eſto
punctum h, & inſcribatur ei triangulus b h
c, qui baſim habeat cum portione eandem,
& altitudinem æqualem. Quoniam igitur
punctum h eſt uertex portionis, linea recta
à puncto h ducta æquediſtans diametro in
duo æqua diuidit lineam b c, & b c eſt æ-
quediſtans lineæ cōtingenti portionem in
puncto h. Ducatur autem e h diametro æ-
quediſtans: ducatur item à puncto b æque-
diſtans diametro quæ ſit b d, & à puncto c
ducatur contingens ſectionem in puncto
c, quæ ſit c d. Quoniam igitur e h k linea eſt
diametro æquediſtans, & c d contingens ſe
ctionem in puncto c, & linea b e c eſt æque
diſtans lineæ contingenti ſectionem in pũ-



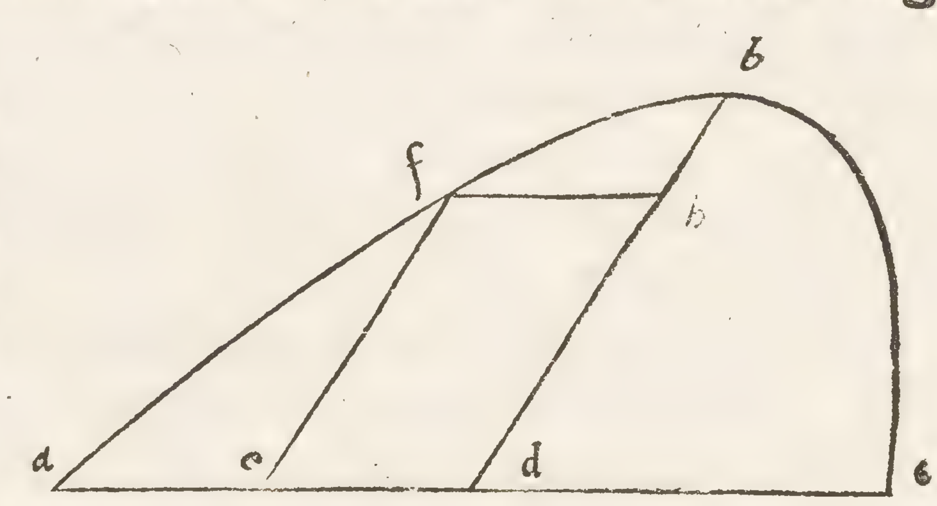
cto h, erit triangulus b c d quadruplus triangulo b h c. Cum igitur triãgulus b c d ſit quadruplus triangulo b h c, & triplus portioni, manifeſtum eſt portionẽ b h c triangulo b h c ſeſquitertiam eſſe.

Earum portionum quæ continentur à curua, & à recta linea, baſim uoco ipſam rectam: altitudinem uero maximam perpendicularem, quę à curua linea ad baſim portionis aptata ſit: uerticem autem, punctum illud à quo perpendicularis maxima ad baſim ducitur.

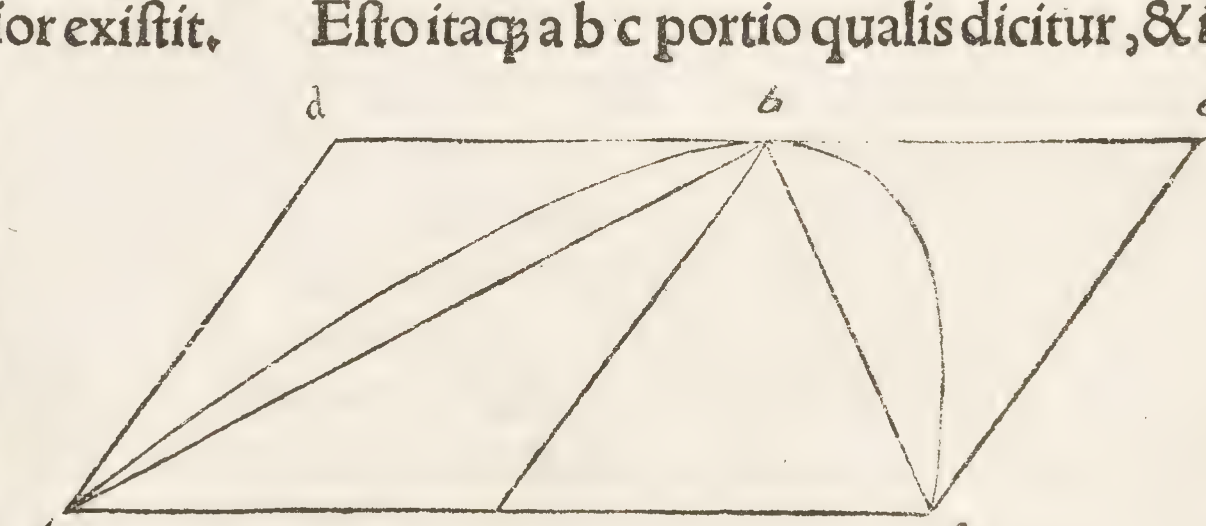
18 SI in portione quæ comprænhenſa ſit à linea recta, & à coni rectanguli ſectione, à media baſi ducatur recta diametro æquediſtans, punctum illud in quo dicta æquediſtans diametro ſecat coni ſectionem, eſt uertex ſectionis. Eſto a b c portio compræhenſa à linea recta, & à ſectione rectanguli coni, & à medio a c ducat̃ d b diametro æquediſtans. Quoniã igitur in rectanguli coni ſectione ducta eſt b d diametro æquediſtans, erit a d æqualis ipſi d c. Conſtat a c ęquediſtãtem eſſe lineæ contingenti ſectionem in puncto b. Manifeſtum eſt igitur, quod perpendicularis quæ ducet̃ à ſectione ad lineã a c, erit maxima omnium illa quę à puncto ducta fuerit. Punctum igitur b portionis uertex exiſtit.



19 IN portione à linea recta, & à rectanguli coni cõpræhenſa ſectione linea ducta à media baſe, æquediſtãs diametro, eſt ſeſquitertia lineæ ductæ ſimiliter à dimidia dimidiæ baſis. Eſto a b c portio contenta à recta, & à ſectione coni rectanguli: & ducatur b d à dimidia baſi æquediſtans diametro, & e f ducatur à dimidia a d: ducatur item f h æquediſtãs ipſi a c. Quoniã igitur in ſectione rectanguli coni ducta eſt b d ęquediſtans diametro, & a d f h ſunt æquediſtantes cõtingenti ſectionem in puncto b, conſtat eandem habere b d ad b h proportionem longitudine, quam a d linea ad f h potentia. Igitur b d eſt quadrupla ipſius b h longitudine. Conſtat igitur b d ipſius e f eſſe ſeſquitertiã longitudine.



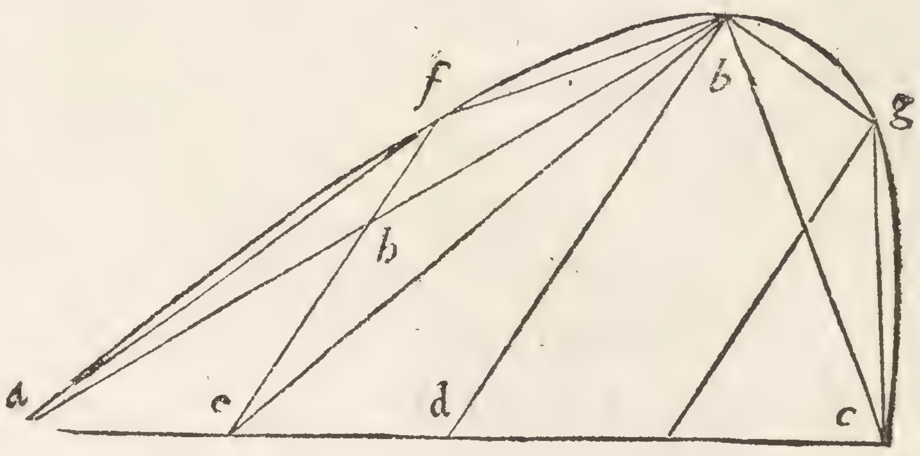
20 SI portioni à recta, & ſectione rectanguli coni contentæ triangulus inſcribatur, qui habeat baſim cum portione eandem, & altitudinem eandem, triangulus dimidio portionis maior exiſtit. Eſto itaq; a b c portio qualis dicitur, & inſcribatur ei triangulus a b c, eãdem habens baſim toti, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur triangulus habet baſim, & altitudinem cum portione eandem, neceſſe eſt pũctum b uerticem eſſe portionis. Quare linea a c eſt æquediſtans contingenti ſectionem in puncto b. ducatur b e, per punctum b æquediſtans ipſi a c. & à punctis a & c, ducantur a d, c e æquediſtantes diametro. cadent iam ipſæ extra portionem. Quoniam igitur triangulus a b c eſt dimidium figuræ a d e c æquediſtantium



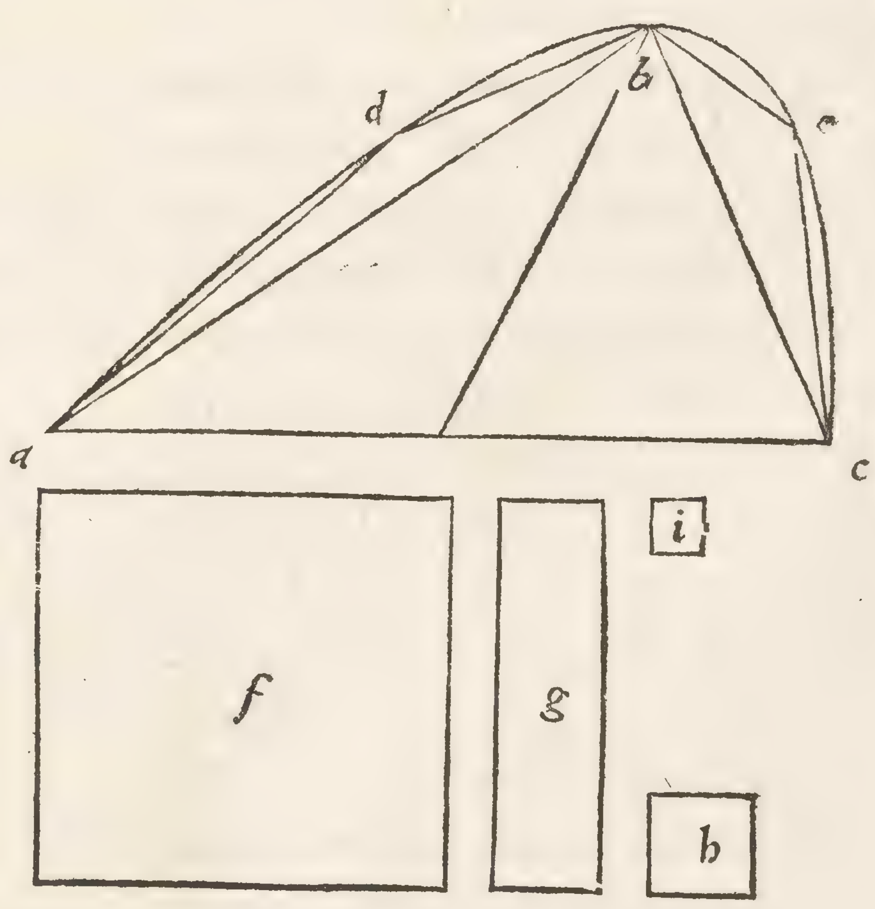
um

rum laterum, conſtat ipſum plus quàm dimidium eſſe portionis. Hoc demonſtrato manifeſtum eſt, poſſe figuram multorum angulorũ inſcribi portioni, ita ut portiones reſiduæ ſint quocunqꝫ ſpacio dato minores. nã continuè plus dimidio ablato ex hoc conſtabit, quod diminuentes hoc modo tandem faciemus portiones reſiduas quocunqꝫ ſpacio propoſito minores.

SI in portione à recta, & à ſectione rectanguli coni contenta, triangulus inſcribatur, eandem baſim cum portione, & eandem altitudinẽ habens: item in portionibus reſiduis alij trianguli inſcribantur, eandem & baſim & altitudinem cum portionibus habentes: utriuſqꝫ trianguli in reſiduis portionibus inſcripti, octuplus eſt triangulus ille qui in tota portione deſcriptus exiſtit. Eſto a b c portio qualis dicitur, & diuidatur a c puncto d, & ducatur b d diametro æquediſtans. punctum ergo b erit uertex portionis, & triangulus a b c eandem baſim habet cum portione, et altitudinẽ eandem. Diuidatur item in duo ęqua a d puncto e, & ducatur e f ęquediſtãs diametro: diuidatur autem a b puncto h. pũctum igitur f, erit uertex portionis a f b: & triangulus a f b, eandem & baſim & altitudinem cum portione a f b habebit. Oſtendendum eſt, triangulum a b c, octuplum eſſe trianguli a f b. Eſt itaqꝫ b d ſeſquitertia lineæ f e, & dupla ipſius e h. Quare e h, dupla eſt ipſius h f. Quare a e h triãgulus, duplus eſt a f h: & ideo æqualis triangulo a f b: & triangulus a b d quadruplus eſt triangulo a h e. igitur & trianguli a f b. Quare totus triangulus a b c, erit trianguli a f b octuplus. Similiter oſtendetur octuplus eſſe triangulo in b g c portione deſcripti. 21



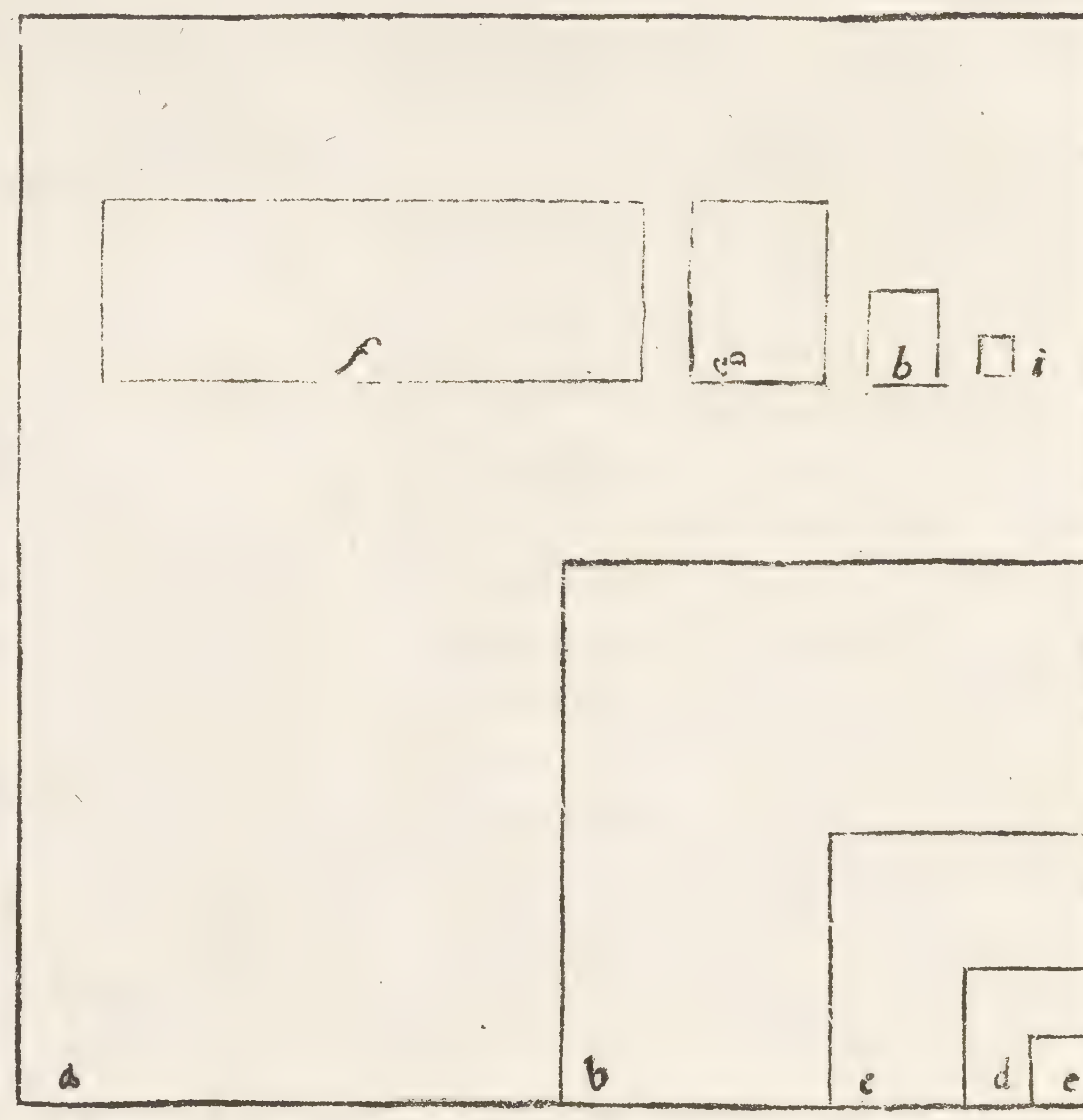
SI ſit portio à recta & à ſectione rectanguli coni comprẹhenſa, & ſpacia quotcũque ponantur conſequenter in quadrupla proportione: ſit autem horum ſpaciorum maximum æquale triangulo, qui baſim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ſpacia hæc ſimul omnia ſunt ipſa portione minora. Eſto itaqꝫ portio a b e c, à recta & ſectione rectanguli coni compræhenſa. Sunto itẽ ſpacia quotcunqꝫ numero continenter poſita, f g h i: & ſit præcedens quadruplũ ſequentis. Eſto autem eorum maximũ f, & eſto f æquale triangulo habenti baſim, & altitudinem cum portione eandem. Dico a d b e c portionem, ſpacijs f g h i, ſimul omnib. eſſe maiorem. Eſto totius quidem portionis uertex b, & reſiduarum portionum uertices d, e. Quoniam igitur triangulus a b c, eſt octuplus utriuſqꝫ trianguli a b d, b e c: Conſtat quod utriuſqꝫ ſimul quadruplus exiſtit. Et quoniam a b c triangulus æqualis eſt ſpacio f, eadem ratione & trianguli a d b, b e c ſunt ſimul æquales ſpacio g. Similiter oſtendetur, triangulos deinceps reliquis portionibus inſcriptos, eãdem baſim & altitudinem cum portionibus habẽtes, æquales eſſe ſpacio h, & triangulos portionibus deinde reſiduis inſcriptos æquales eſſe ſpacio i. Spa 22



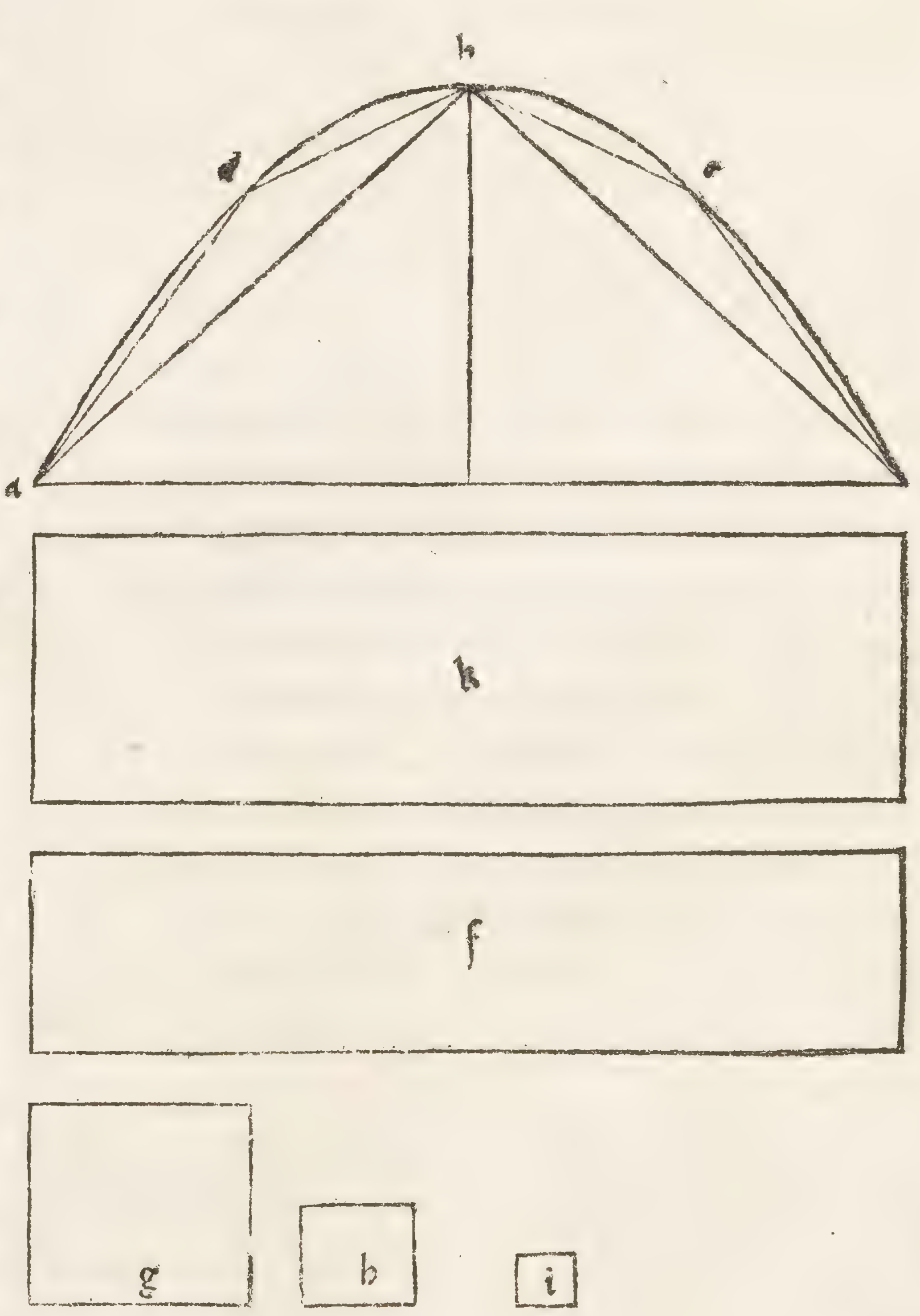
u cia

cia igitur propoſita ſimul omnia, ſunt æqualia figuræ cuidam multorum angulorum portioni inſcriptæ. Quare ipſa portione conſtat eſſe minora.

23 SI magnitudines quotcunq; conſequenter in proportione quadrupla diſponãtur, hæ magnitudines ſimul omnes cum tertia parte minimæ illarum, ſunt ſeſquitertiæ magnitudini illarum maximæ. Sunto itaq; quotcunq; magnitudines continenter poſitæ, unaquæq; præcedens, quadrupla proximæ ſequentis a b c d e: & ſit earum maxima a. Sit autẽ f tertia pars ipſius b, et g tertia pars ipſius c, & h ipſius d, et i ipſius e. Quoniam igitur f eſt tertia pars ipſius b, & b quarta ipſius a, erit b f utraque ſimul tertia pars ipſius a. & eadem ratiõe c g, tertia ipſius b, et h d ipſius c, & i e ipſius d: & iam ſimul omnia b c d e f g h i, tertia pars cõpoſitæ ex omnibus ſimul a b c d e. Sunt autem f g h tertia pars ipſarum b c d. Quare & reſiduũ b c d e i, erit reſidui, hoc eſt ipſius a tertia pars. Conſtat igitur ea ſimul omnia a b c d e, cũ ipſo i tertia ipſius e, eſſe ipſius a ſeſquitertia: quare, &c.



24 QVæcunq; portio contenta à linea recta, & ſectione rectanguli coni, eſt ſeſquitertia trianguli illius qui baſim habuerit, & altitudinem cum ipſa portione eandem. Eſto itaq; portio a d b e c compræhenſa à recta, & à ſectione rectanguli coni: & a b c ſit triangulus qui eandem baſim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ipſius uero trianguli eſto k ſpacium ſeſquitertiũ. Oſtendendum eſt, ipſum k eſſe æquale portioni a d b e c. Nam ſi non, erit aut maius, aut minus eadẽ. Eſto prius, ſi eſſe poteſt, portio a d b e c maior ipſo k ſpacio: inſcribam iam triangulos a d b, & b e c, uti ſupradictum fuit. Et



item

item in reſiduis portionibus inſcribam alios triangulos eandem baſim, & altitudinem cum portionibus eandem habentes: & ſimiliter in reſiduis portionibus inſcribam duos triangulos, baſim & altitudinem cum portionibus eandem habentes, donec reſiduæ portiones ſint tandem minores exceſſu, quo portio a d b e c excedit ſpacium k. Quare figura multiangula ipſi portioni inſcripta, maior erit ſpacio k, quod eſſe non poteſt. Cum ſint quædam ſpacia in proportione quadrupla diſpoſita, quorum primum eſt triãgulus a b c, quadruplus triãgulis a d b, & b e c: deinde ipſi trianguli ſunt quadrupli triangulis, qui in portionibus ſequentibus ſunt deſcripti, & reliqui identidem. Quare conſtat omnia ſimul triangulorũ ſpacia minus quàm ſeſquitertia eſſe triangulo a b c, maximi eorum: & poſitum eſt, k ſpacium eſſe ſeſquitertiũ eidẽ maximo. Non erit igitur portio a d b e c maior k ſpacio. Eſto item ſi eſſe poteſt, minor eodem. Ponatur autem triangulus a b c æqualis ſpacio f, & ſit g quarta pars ipſius f, et ſit h quarta pars ipſius g: & cõtinuæ ſemper ponantur conſequenter ita, donec ultimum ſumptum ſit minus exceſſu quo ſpacium k excedit portionem, & ſit ipſum minus i ſpacium. ſunt iam f g h i ſpacia ſimul cum tertia parte ipſius i, ſeſquitertia ipſius f. Eſt autem & k ſpacium ſeſquitertium ipſius f. quare ſpacium k erit æquale ſpacijs f g h i ſimul, cum tertia parte i. Cum igitur ſpacium k excedit ſpacia f g h i minori quantitate quàm ſit i, portionem uero excedit maiori quàm ſit idem i, colligitur ſpacia f g h i ſimul maiora eſſe portione: quod eſſe non poteſt. Oſtenſum namq; eſt, quod ſi ſint ſpacia quotcunq; in quadrupla proportione conſequenter poſita, & maximum eorum æquale fuerit triangulo portioni inſcripto, ſpacia illa ſimul omnia eſſe minora portione. Non eſt igitur a d b e c portio minor ſpacio k. Oſtenſum quoq; eſt, eam non poſſe ipſo eſſe maiorem. Quare eidem æqualem eſſe neceſſe eſt. At uero ſpaciũ k ſeſquitertium exiſtit trianguli a b c, portio igitur a d b e c, eiuſdem trianguli a b c ſequitertia exiſtet.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE QVAdratura Parabolæ, hoc eſt portionis contentæ à linea recta, & ſectione rectanguli coni.

ARCHIMEDIS TRACTATVS
DE ARENAE NVMERO.

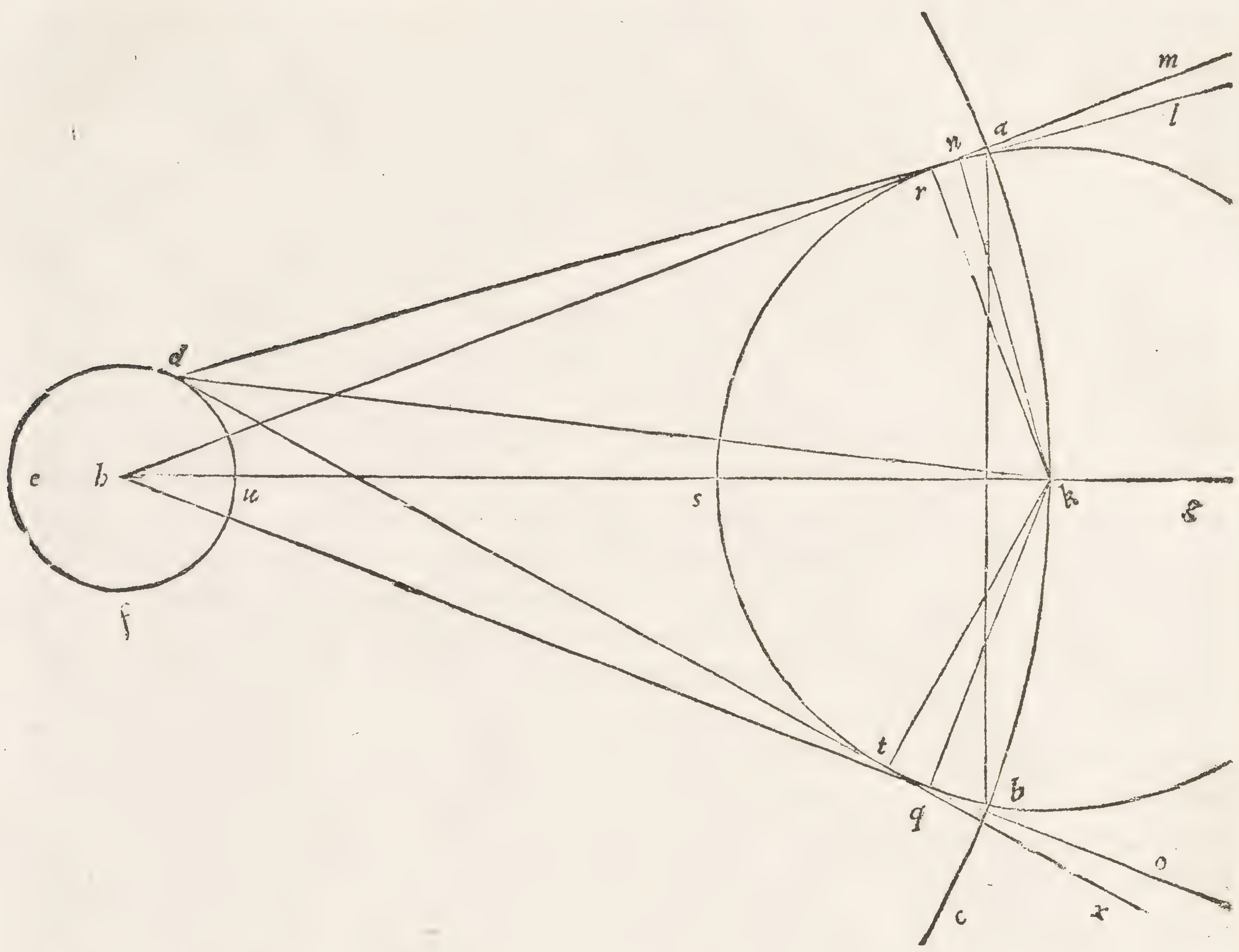
EXISTIMANT quidam, rex Gelon, arenam eſſe multitudine infinitam. Ego autem dico, non eam ſolum quæ circa Syracuſas, & circa reliquã Siciliam exiſtit, uerumetiã illam quę in uniuerſa habitabili ſimul et inhabitabili regione ubiq; cõtinetur, certo quodam numero comprehenſam eſſe. Nonnulli uero infinitam eam minime opinantur: nullum autem tantum excogitari poſſe numerũ credũt, quẽ illius multitudo nõ ſuperet. Igitur qui hac opinione ducuntur, ſi eiuſmodi cumulum arenæ concepiſſent, qualis eſſet ſi uniuerſe terræ tumor repleto mari, & omnibus canalibus uſque ad cuiuſq; altiſſimi montis uerticem arena collectus haberetur, huius quoq; tanti alter præterea multiplex excogitaretur, eos minimè dubiũ eſt ſenſuros fore, huiuſmodi cumuli multitudinem nullo prorſus numero poſſe contineri. Ego autem hoc declarare experiar demonſtrationibus Geometricis, quib. te aſſenſurũ minimè dubitarim, quod ex illis qui

à nobis expreſſi, & in his quæ ad Zeuxippũ ſcripſimus, expoſiti ſunt numeri, nõ nulli excellunt non ſolum arenę magnitudinem quæ fuerit tumori terræ ęqualis, quæ quidem terra uti diximus ubiq; repleta fuiſſet: uerum quæ toti mundo par haberetur. Non autem te fugit, quod mundus à quàm plurimis Aſtrologis appelletur ſphæra, cuius centrum eſt centrum terræ: quæ uero ex centro linea æqua eſt lineæ rectæ quæ à centro ſolis ad centrum terræ ſit ducta. Hæc itaq; quæ apud Aſtrologos conſcripta inueniuntur, refutãs & cõmutans Ariſtarchus Samius ſuppoſitionibus quibuſdam, ſcripta quædam tradidit, in quibus id perſpicitur, ex his quæ illic ſuppoſita ſunt, euenire mundum, dicto nuper mundo eſſe multiplicem. Nam apud eum ſupponitur ſtellas, quæ non errant, & ſolem immobilẽ permanere, terram uero circa ſolem ferri in circuli circumferẽtia, qui eſt in medio curſu ſitus. Sphæram uero ſtellarum fixarum circa idem centrum cum ſole ſitam eſſe: ea uero magnitudine haberi, ut circulus circa quem poſitum eſt terram ferri, eam habeat proportionem ad ſtellarum fixarum diſtãtiam, quam habet centrum ſphęræ ad circumferentiam. Hoc utiq; conſtat, eſſe non poſſe. Nam cum ſphæræ centrum nullam habeat magnitudinem, non utiq; ullam habere poſſe ad ſuperficiẽ ſphæræ proportionem, eſt opinandum. Oſtendendum eſt autem, Ariſtarchum hoc intellexiſſe & ſenſiſſe. Quoniam itaq; opinantur terram ueluti circa centrum mundi conſtitutam, quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictũ, eam habere ſphæram in qua circulus exiſtit, in cuius circumferentia ſupponitur, terram ferri ad ſphæram ſtellarum fixarum. Nam demonſtrationes eorum quæ apparent, id quod ſic ſuppoſitum eſt accõmodat, & maxime apparet magnitudo ſphęræ, in qua ponit terram moueri, æqualiter ſupponi ei qui à nobis dicitur mũdus. Dicimus utiq;, ſi fieret ſphęra ex arena, quæ tanta eſſet quantam Ariſtarchus ſphæram ſtellarum fixarum ſupponit eſſe, etiã ſic quaſdam haberi, & oſtendi poſſe ex his quæ in principijs habentur numerorum denominationibus, quæ hanc ipſam arenam multitudine ſuperarent, quæ magnitudinem dictæ ſphæræ haberet æqualem his quæ dicam ſuppoſitis. Primum quidem ambitum terræ eſſe ueluti ter mille milia ſtadiorum, uel etiam maiorem, cum tu quoq; illis aſſentias, qui experientia oſtenderunt eum eſſe trecentorum milium ſtadiorum. Ego autem exuberans, & ponens terræ magnitudinẽ decuplã eius quam ſuperiores poſuerũt, & opinati ſunt, ambitum eius pono eſſe ter mille milia ſtadiorum. Poſt hoc, diametrum terræ maiorem eſſe diametro lunæ, & diametrum ſolis maiorem eſſe diametro terræ, ſimiliter eadem ſumens quæ plurimi ſuperiorum Aſtrologorum poſuerunt. Poſt hoc, diametrum ſolis eſſe triceſies diametrum lunæ, & magis. & à prioribus aſtrologis, ab Eudoxo quidem uti nonuplum, Plidia uero uti duodecuplum: ab Ariſtarcho, qui demõſtrare conatus eſt diametrum ſolis diametro lunæ maiorem eſſe, quàm octo et decies ipſam: minorem uero quàm uigeſies eandem. Ego autem & hunc excedens, ut ſuppoſitum cum oſtenſum fuerit ſit minime ambiguum, ſuppono diametrum lunæ ueluti trigeſies tantum quantum nunc ponitur, uel etiam maiorem. Ad hæc quoq; diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, inſcriptæ maximo circulo mundi. Hoc autem ſuppono, cũ Ariſtarchus dicat ſolem uideri eſſe uigeſimãſeptimam partẽ circuli zodiaci. Ipſe enim hoc modo perſcrutatus, conatus eſt inſtrumentis depræhendere angulum cui ſol aptatur, qui uerticem habeat in oculo. Simile uero non facile eſt ſumere, cum neq; uiſus, neq; manus, neq; inſtrumenta, per quæ experiri oportet, ſatis habeant fidei ad declarandum id quod certum eſt. De his autem in pręſentiarũ non expedit diſceptare: alioquin cum hæc ſæpe ſuum errorem declarent. Sufficit autem mihi ad propoſitum demonſtrandum, angulum ſumere, qui maior ſit angulo illo cui ſol accommodatur, qui uerticem habeat in uiſu. Et item alterum ſumere angulum, qui non ſit minor eo cui ſol accommodatur, quiq; uerticem habeat in

eam

eam partem in quam uiſus. Poſita igitur longa regula ſuper planum erectum, in loco unde ſol oriri debet, & ſol aſpici poſſit, deinde cylindro per tornum facto, & longo poſito ſuper canonem erecte illico poſt ortum ſolis, deinde procedente ipſo uerſus horizontem & poſſit contra ſolem inſpicere, uertatur canon in ſolem, et uiſus conſtitutus ſit in extremo regulæ, & cylindrus in medio poſitus ſolis & uiſus, ita ut occultetur ſol uiſui, ſeparans autem cylindrum à uiſu donec incipiat ex utraq; parte cylindri ſolis extremũ quid & minimũ lymbi inſpicere: cõſtituatur illic cylindrus. Siquidem ſimiliter contingit uiſum ab uno puncto inſpicere, & uidere ductis lineis rectis ab extremo regulæ, ubi uiſus in inſpiciendo fuerat conſtitutus quæ contingant cylindrum, angulus, compræhenſus à lineis ductis maior eſt uno quodã ex his angulis, quibus ſol accõmodatur, qui uerticem habeat in uiſu propterea, quod ſol utriq; ex cylindro uidet̃. Quoniã uero uiſus nõ à pũcto uidet, ſed à magnitudine quadã, ſumatur magnitudo quædã uolubilis non minor uiſu, & hac magnitudine poſita in extremo regulę ubi uiſus fuerat cõſtitutus, ducantur lineæ rectæ contingentes magnitudinẽ & cylindrũ: angulus itaq; à lineis ductis cõpræhenſus minor eſt angulo cui ſol accõmodatur, qui uerticem habeat uerſus uiſum. Magnitudo uero quæ nõ ſit minor uiſu, hoc modo reperitur. Duo cylindruli ſumantur leues, terſi, æquè craſſi inter ſe, unus albus, alter non: & ſic diſponãtur ad uiſum, ut albus à uiſu remotior ſit: nõ albus iuxta uiſum proximus, ita ut attingat faciem. Siquidem igitur cylindruli leuiſſimi & terſiſſimi fuerint, aſpectu proximus uiſui ab ipſo uiſu præteritur, & albus conſpicitur: ſiquidem ipſi admodum terſi, et qui iuxta eſt fuerit omnino leuior. ſin autem non ſupra modũ, partesq; quædã uidebũtur cylindruli albi, ex utraq; parte cylindruli ad uiſum admoti. Sumptis deinde his ipſis cylindris, & poſitis, ita ut craſſitudine alterius alter uiſui occultetur, & ampliori loco. Tanta igitur magnitudo, quanta eſt craſſitudo cylindrulorũ hoc facientium maximè quodam modo eſt non minor uiſu. Angulus autem non eſt minor angulo cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu, Sic ergo ſumatur, & remoto per regulam ab ipſo uiſu, ita ut à cylindro ſol occultetur totus, & ducantur lineæ rectæ ab extremo regulæ, ubi uiſus eſt conſtitutus, cõtingentes cylindrum, angulus ab ipſis ductis compræhenſus non eſt minor angulo cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu. Iſtis angulis ſic ſumptis, dimetiatur angulus rectus, & fiat puncto & aculeo, ut angulo recto in centum & ſexagintaquatuor partes diuiſo, unus angulus qui ſit minor quàm una pars illarum: & ipſe angulus minor factus ſit recto angulo diuiſo in ducentas partes, maior una illarum partium. Conſtat igitur, quod angulus cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu minor eſt, quàm una pars recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: minor autẽ angulo ſolis dicto eſt maior, quàm una pars anguli recti diuiſi in ducentas partes. Conſtat item quod angulus cui ſol accõmodatur, qui uerticem habet in uiſu, minor eſt quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes, maior autem quàm una pars recti diuiſi in ducentas partes. Iſtis autem ſic conceſſis, ex quibus ſequitur ſolis diametrũ latere figuræ maiorem eſſe, quæ figura mille angulis conſtet, atq; inſcripta ſit circulo qui in mundo maximus habetur. Intelligatur planum per centrum terræ eductum, & per centrum uiſus minimo ſolis, uel ferè illico cum ſol ſuper horizontem ſteterit. Diuidat autem planum eductum mundum ſecũdum circulum a b c, terram uero ſecundum d e f, & ſolem ſecundum f g circulum. ſit autem centrum terræ h, & ſolis centrum k, & centrum uiſus d. Et ducantur lineæ rectæ contingentes circulũ f g à puncto d, quæ ſint d l, d x, & contingant in punctis n & t. & à puncto h ducantur h m, h o cõtingentes eundem in pũctis q & r. Circulum uero a b c diuidant lineæ h m, h o, in punctis a & b. Eſt itaq; o k maior quàm d k, cum ſol ponatur ſuper horizontem eſſe. Quare angulus contentus lineis d l, d x, maior exi-

ſtet angulo contento lineis h n,h o. Angulus autem contentus lineis d l,d x,maior eſt quàm ducenteſima pars anguli recti, minor uero quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes. Huic autem angulo æqualis eſt an-



gulus cui ſol accommodatur,qui uerticem habet in uiſu. Quare angulus contentus lineis h m,h o, minor eſt quàm una pars anguli recti,diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: linea uero a b recta, minor eſt quàm linea quæ ſubtēditur uni portioni circumferentiæ circuli a b n,diuiſę in ſexcentas ſex & quinquaginta partes. ambitus uero dictæ figuræ multorum angulorum,ad ſemidiametrum circuli a b c, minorem habet proportionem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem: propterea quod cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ,ambitus habet ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem. Noſti enim à nobis demonſtratum eſſe,cuiuſcunq; circuli circumferentiam maiorem eſſe,quàm triplam ſeſquioctauam diametri: minorem uero,quàm triplam ſeſquiſeptimam eiuſdem. Minorem uero habet proportionem b h ad h k, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k. Ipſi uero b a æquatur diametros circuli e g. quoniam eius dimidia u a eſt æqualis k r, cum h k ſit æqualis ipſi h a,cum ſint perpendiculares ductæ ab eiſdem angulis iunctæ. Cōſtat igitur, diametrum circuli a b c minorem eſſe quàm centeſimam partē lineæ h k. & e h y angulus minor eſt diametro circuli a b g,cum d e f circulus ſit minor circulo e g. Minores igitur utræq; erunt h y,k f lineæ, q̄ centeſima pars lineæ h k. Quare h k ad y f minorem habet proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam linea h k y minor eſt quàm h r, & linea f y minor linea d c: minorem igitur proportionem habebit h r ad d e, quàm centum ad nouem & nonaginta. Cū uero h k r, d k t trianguli ſint rectanguli,latera k r,k t æqualia erūt: lineæ uero h r, d t inæquales: & angulus maior contentus lineis d t,d k,ad angulum contentum

lineis

lineis h r,h k, maiorem habet proportionem, quàm h k ad d k: minorem uero, quàm h r ad d t. Si enim ſint duo trianguli rectanguli, & altera duorum laterum cõtinẽtia angulum rectum ſint æqualia, altera uero inæqualia, maior angulus ex his qui erunt apud latera inæqualia, ad minorem habet maiorem proportionem, quàm maior linea ſubtenſa angulo recto ad minorem ſubtentũ: & habet minorẽ, quàm maior linea earum quæ circa angulos rectos ſunt ad minorem. Quare angulus cõtentus lineis d l,d x, ad angulum contentum lineis h n,h m, minorẽ habet proportionem, quàm h r ad d t: quæ minorem habet proportionem, quàm centũ ad nouem & nonaginta. Quare angulus contentus d l,d x lineis, ad angulum contentũ lineis h m,h o, minorẽ proportionem habet quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam angulus contentus lineis d l,d x, eſt maior quàm ducenteſima pars recti, erit & angulus contentus lineis h m,h o maior quàm nouem & nonaginta partes anguli recti diuiſi in uigintimilia partiũ. Quare maior eſt quàm una pars anguli recti diuiſi in ducentas partes & tertia. Igitur b a maior eſt, quàm ſubtenta uni portioni circumferentiæ circuli a b c, diuiſæ in partes quadringẽtas duodecim: ipſi uero a b æqualis eſt ſolis diametros. Conſtat igitur, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ, quæ ſit mille angulis conſtituta.

Iſtis ſuppoſitis demonſtrãtur & iſta, uidelicet diametrum mundi minorem eſſe diametro terræ, quàm decies milies. Item diametrũ mundi minorem eſſe, quàm decies miles decem milia centies ſtadiorum. Quoniam igitur ſuppoſitum eſt, diametrum ſolis minorem eſſe diametro lunæ, quàm triceſies, & diametrũ terræ maiorem eſſe diametro lunæ: conſtat diametrũ ſolis minorem eſſe diametro terræ, quàm triceſies. Rurſus autem, quoniam oſtenſum eſt, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ quæ mille angulis conſtet, maximo mundi circulo inſcriptæ: conſtat ambitum dictę mille angulorum figuræ diametrum ſolis minus quàm milies cõtinere. Solis autem diametros diametrum terræ minus quàm triceſies continet. Quare ambitus figuræ mille angulorum, diametrum terræ minus quàm triceſies milies continebit. Diametro uero mundi maior eſt quàm triplus. Nam oſtenſum eſt, diametrum cuiuſcunque circuli minorem eſſe tertia parte ambitus cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ, quæ plus quàm ſex lateribus conſtet: cum hexagono inſcripto in circulo, diametros circuli eſt tertia pars ambitus ipſius hexagoni, erit ut diametros mundi diametrũ terræ contineat minus decies milies. Quod aũt diametros mundi minor ſit decies milies decem milibus centies ſtadiorum, hinc cõſtat. Quoniam enim ſupponitur, ambitum terræ maiorem eſſe quàm trecentorum decem milium ſtadiorum, & ambitus terræ maior eſt diametro quàm tripla, propterea quod cuiuſcunque circuli circumferentia eſt plus quàm tripla diametro, conſtat diametrũ terræ minorem eſſe quàm centies decẽ milia ſtadiorum. Quoniam autem diametros mundi diametrum terræ minus continet, quàm decies milies: conſtat diametrum mundi minorem eſſe quàm decies decem milia centies ſtadiorum. Circa diſtantiam igitur magnitudinũ hæc ſuppono. Verum de arena iſta ponantur. Si fuerit aliqua magnitudo ex arena compoſita, quę non ſit papauere maior, eius arenæ numerũ nõ maiorem decem milib. eſſe: & diametrum papaueris eſſe non minorem quadrageſima parte digiti. Suppono autẽ hoc cõſiderans hoc modo: poſita in regula terſa & leui fuerũt papauera in eadem linea recta conſtituta, aptata inter ſe, & trigintaquinque papauera plus loci occupabant quàm digiti lõgitudo exiſtat. Minorem itaque diametrũ papaueris ponens ſtatuo, ut ſit pars quadrageſima digiti, & nõ minor: uolens etiã per hęc nõ ambiguè, indubitatiſſimè demonſtrare propoſitũ. Hæc aũt ſunt quæ ſuppono. At uero utile eſſe arbitror, denominationes numerorũ enumerare, ut in his qui cõpoſiti ſunt à me in libro quẽ ad Zeuxippũ ſcripſi, nõ curẽt qui hic legẽt, propterea quod nil hic præter ea quæ in eo libro dicta ſunt, additũ habetur. Cõtingit aũt nomina nu

merorum à nobis tradita in decē milib. collecta, & ſuprà decem milia perfectè, et ſatis intelligimus numerū miliū decem referentes eū in reliquos ſuperiores. Sunto itaque qui à nobis dicti ſunt numeri in milies decem milia primi nominati. horum itaq; qui primi dicūtur decies milies decem milia, uocetur unitas eorum qui ſecundi ſunt, & numerorum ſecundorum unitates, & unitatum decem, & centeni & milleni & decies milies erunt unitatum, quæ dicuntur decies milies decē milia: & itē decies milies decem milia ſecūdorum numerorū, uocetur unitas tertiorū numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates, & unitatum deceni & centeni, & milleni, & decies milleni, erunt decies milies decem milium unitatū dictarum. Eodem autem modo & tertiorum numerorum decies milies decē milia uocentur unitates quartorum numerorum: & decies milies decem milia quartorum numerorū ſimiliter uocent̃ unitates quintorū numerorū: et hoc modo procedentes numeri huiuſmodi nomina habentes, erunt decies milies denorum milium decies milies decem milia. Sufficiūt quidem, & ex tantis hi numeri cognoſcūtur. Licet autē & in plus producere. Sunto igit̃ hi qui nuper dicti ſunt numeri primæ periodi uocati. Vltimus aūt numerus periodi unitas uocetur ſecundæ periodi primorum numerorum, & rurſus decies milies decem milia ſecundę periodi ſecundorū numerorū: ſimiliter et horū ultimus unitas uocetur ſecūdę periodi tertiorum numerorum: & ſic ſemper numeri procedentes nomina habeāt ſecūdæ periodi, erunt decies milies decem milia denorum milium decem milia decies milies. Rurſus ultimus ſecūdæ periodi numerus decies milies decem milia uocetur unitas tertiæ periodi primorum numerorum decies milies decem milium. Et hoc modo procedentib. erūt decies milies denorū milium decies milies dena milia decies milies decem milia. Iſtis hoc modo denominatis, erūt numeri ab unitate proportionales effecti. qui uero iuxta unitatē ad decē procedūt, hi octo primi cū unitate primorū decies milies decē miliū uocatorū erūt primi. Octo autem qui poſt eos ſequūtur, numeri uocentur ſecundorū, & alij eodē modo iſtis erunt ſynonymorū uocati: & erūt diſtantiæ octoni decies milies denū miliū. Octauus enim numerus eſt milies dena milia, q ſecūdi octoni erit primus: quoniā decuplus eſt eius qui eū præcedit, decies milies decē milia erit ſecundorū numerorū. hic aūt eſt unitas tertiarū myriadū. Conſtat igit̃ plures eſſe octoni, ut dictū eſt. Cōfert aūt et hoc cognoſcere, ſi ſint numeri ab unitate proportionales, & quidā ex eadē proportionalitate ſeſe multiplicauerint, q producet̃, erit ex eadē proportionalitate, tantū diſtās à maiore multiplicantiū, quantū minor multiplicantiū ab unitate diſceſſerit ſecundū proportionalitatis rationē, & productus idē ab unitate in ordine proportionis diſtabit uno minus ex numero illo qui ſit collectus ex duobus numeris, dictos multiplicātes in ordine proportionis denominātibus. Eſto itaq; quotcūq; numeri ab unitate proportionales a b c d e f g h i k l: ſit a unitas, & d multiplicet h, & proueniat q. Sumat̃ aūt in ea proportionalitate ex eo ordine unus, qui tātos in ea proportione inter ſe & h habeat, quāti ſunt inter d & unitatem, & hic ſit l. Oſtendendū eſt, quod q eſt ęqualis ipſi l. Cum igit̃ ſint proportionales, & totidē d diſtat ab unitate ſicut l ab ipſo h, eandē proportionē habet d ad unitatē, quā l ad ipſum h. Verū d eſt multiplex unitatis ſecundū ſeipſum d. igitur l erit multiplex ipſius h ſecundū ipſum d. Quare l eſt æqualis ipſi q. Cōſtat igit̃, productū eſſe ex eius proportionalitatis ordine unū, & à maiore multiplicantiū tātis diſtabit, quātis minor ab unitate diſcedit. Conſtat quoq; eum in ordine proportionis tantis ab unitate diſtare uno minus, quātus eſt numerus ex numeris ordinis multiplicātium collectus. nā a b c d e f g h tanti ſunt, quantis h diſtat ab unitate. ſed i k l uno pauciores, quàm quibus d diſtat ab unitate. Cum h ergo tanti erunt.

Iſtis ita diſpoſitis, quibuſdā ſuppoſitis, quibuſdā demōſtratis, id quod propoſitū eſt demonſtrabitur. Quoniā itaq; ſupponitur, diametrū papaueris nō eſſe mi-

norem

norem quadrageſima parte digiti, conſtat ſphæram quæ diametrum digito æqualem habeat, maiorem eſſe regione quā occupat papauer, ſexageſies quater milies. nam ipſa eſt ſecundum dictum numerum multiplex eius ſphæræ, quæ habeat diametrum quadrageſimam partem digiti. Nam oſtēſum eſt, quod ſphæra habet ad ſphæram proportionem diametro ſuæ ad diametrum alterius triplicatam. Quoniam aūt ſuppoſitū eſt, numerū arenæ ad magnitudinem papaueris nō maiorem eſſe decem milibus, conſtat ſi arenæ ſphæra multiplicetur ad magnitudinem ſphæræ quæ diametrum digito æqualem habeat, nō maior erit arenæ numerus quàm decies milies ipſe ſexageſies quater mille. Hic enim numerus eſt unitates ſex ſecundorum numerorum, & primorum myriades quatuor milia. Minor eſt igitur, quàm decem myriades ſecundorū numerorū. Sphæra uero quæ centum digitorū diametrū habuerit, ſphæræ quæ diametrum digitalem habuerit, multiplex eſt ad hæc centum myriadibus, quia habet ad aliam ſphæram proportionem ſuæ diametri ad diametrū illius triplicatam. Si igitur ex arena fiat ſphæra, quæ habeat diametrū centum digitorū, cōſtat quod minor erit arenæ numerus, ꝙ numerus ex decē unitatib. ſecūdorū numerorū, in centū myriades ductis collectus. Quoniā aūt numerus decem unitatū ſecundorū numerorū decimus eſt in ordine proportionis ab unitate, in decuplis quoq; centū eſt proportionalis, centū uero myriadū numerus ſeptimus eſt ab unitate in eodē proportionis ordine, cōſtat quod factus inde ſextus erit ex eodē proportionis ordine ſextusdecimus ab unitate. Nam oſtenſum eſt, productū uno paucioribus ab unitate diſtare, quàm ſint illi qui ex utroq; multiplicantiū numero collecto notātur. Ipſorū uero ſexdecim octo primi ſimul cū unitate primorū uocati ſunt, reliqui uero poſt iſtos octo ſecundorū, & eorū ultimus eſt mille myriades ſecundorū numerū. Cōſtat igitur multitudinem arenæ, quæ habeat magnitudinē æqualē ſphæræ, cuius ſit diametros centū digitorū, minorē eſſe quàm mille myriades ſecundorū numerorū. Rurſus ſphæra quæ diametrum decem miliū digitorū habuerit, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum centum digitorū myriadib. centū. Si igitur fiat ſphæra ex arena tantā habens magnitudinē, quantā habet ſphæra cuius diametros eſt decem miliū digitorū, cōſtat numerū arenæ inde prouenientem eſſe minorem quàm mille myridas ſecundorū numerorū multiplicatæ in centum myriades: quoniam mille myriades ſecundorum numerorum eſt ſextusdecimus ab unitate numerus in ordine proportionis, & centū myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdē proportionis ordine. Conſtat igitur, quod numerus inde factus erit uigeſimusſecundus ab unitate in eodem proportionis eiuſdem ordine. Iſtorum uero duorū et uigintiprimi octo cū unitate primorū uocati ſunt: octo ſecūdi poſt illos ſecundorū, reliqui uero ſex tertiorum uocabuntur, & eorū ultimus eſt decem myriades tertiorū numerorū. Conſtat igitur arenæ multitudinē habentis magnitudinē æqualem ſphæræ, cuius diametros eſt decem milium digitorū, minorē eſſe quàm decem myriades tertiorum numerorum. & quoniā ſphæra, cuius diametros æqualis ſtadio, eſt minor ſphæra, quæ habeat diametrum decem milium digitorū: conſtat arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem ſphæræ cuius diametros eſt æqualis ſtadio, minorem eſſe quàm decem myriades tertiorū numerorū. Rurſus ſphæra quæ diametrum habet centum ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum unius ſtadij centum myriadibus. Si igitur fiat ſphæra ex arena, quæ tantam habeat magnitudinē quantā habeat ſphæra cuius diametros eſt centum ſtadiorum: conſtat eius arenæ numerum minorem eſſe numero qui fit multiplicatis decem myriadibus tertiorum numerorum per centū myriadas. Et quoniam tertiorum numerorum decem myriades uigeſimus ſecundus eſt ab unitate in uno proportionis ordine, centum uero myriades ſeptimus eſt ex eodem eiuſdem proportionis ordine: conſtat collectum inde numerum fore uigeſimumoctauum ab unitate in eodem

eiuſdem

eiuſdem proportionis ordine. Horũ aũt uigintiocto numerorum, primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & reliqui quatuor quartorum uocabuntur, & eorum ultimus eſt mille unitates quartorum numerorum. Manifeſtum eſt igitur, arenæ multitudinem, cuius magnitudo fuerit æqualis, ſphæræ habenti diametrum centum ſtadiorum, minorẽ eſſe quàm mille unitates quartorũ numerorum. Rurſus ſphæra habens diametrum decem milium ſtadiorum, multiplex eſt ſphęræ habentis diametrũ centũ ſtadiorum centum myriadibus. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinem, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt decem milium ſtadiorũ, conſtat huius arenæ multitudinem fore minorem numero producto ex mille unitatibus quartorum numerorum per centum myriadas multiplicatis. Quoniam enim quartorum numerorum mille unitas eſt uigeſimusoctauus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine: conſtat productum inde numerũ fore in eodem eius proportionis ordine triceſimũquartum: horum uero quatuor & triginta numerorum primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & quarti octo quartorum, & reliqui duo erunt quintorum: quorum ultimus erit decem unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem ſphæræ, cuius diametros eſt decem milium ſtadiorum, minorem fore, quàm decem unitates quintorum numerorum. Rurſus ſphæra quæ habeat diametrum centum myriadibus ſtadiorum æqualem, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum decẽ milium ſtadiorum. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinẽ, quãtam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriadum ſtadiorum, conſtat numerũ arenæ iſtius minorem fore eo numero, qui producitur ex decem unitatibus quintorum numerorum, per centum myriadas multiplicatis. nam quia decem unitates quintorum numerorum eſt triceſimusquartus proportionalis ab unitate, & centum myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, conſtat numerũ inde productũ, ex eodem eiuſdem proportionis fore quadrageſimum ab unitate: horum uero quadraginta primi octo cum unitate primorũ uocati ſunt, ſecundi poſt illos octo ſecundorum, tertij octo tertiorum, quarti octo quartorum, & quinti octo quintorum numerorum, & eorum ultimus eſt mille unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur multitudinem arenæ, cuius magnitudo fuerit æqualis ſphęræ habenti diametrum centum myriadas ſtadiorum, minorẽ eſſe quàm mille unitates quintorum numerorum. Sphæra uero quæ diametrum habeat decies mille myriadas ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ, cuius diametros eſt centum myriades ſtadiorum centum myriadibus. Si aũt fiat ſphæra ex arena, tantam habens magnitudinem, quãtam habet ſphæra cuius diametros eſt decies mille myriades ſtadiorum, manifeſtum eſt, quod eius arenæ multitudo minor erit numero qui producetur ex mille unitatib. quintorum numerorum, multiplicatis per centum myriadas. Nam cum mille unitates quintorum numerorum ſit quadrageſimus ab unitate proportionalis, & centum myriades ſit ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, manifeſtũ eſt, numerũ inde productum fore quadrageſimũſextum ab unitate proportionalem: horũ ſex & quadraginta numerorum, octo primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecũdi poſt illos ſecundorũ, octo poſt ſecundos tertiorum, octo poſt tertios quartorum, octo poſt quartos quintorum, reliqui poſt quintos ſextorum ſunt uocati, & eorũ ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ, diametrum habenti decem milium myriadum ſtadiorum, minorẽ eſſe ꝙ decem myriades ſextorũ numerorũ. Sphæra uero, quæ diametrũ habeat ſtadiorũ centũ myriadas myriadũ, multiplex eſt ſphæræ habenti diametrũ decẽ miliũ myriadũ ſtadiorũ centũ myriadibus. Si igi-

igitur fiat ſphæra ex arena, quæ magnitudinem habeat tantam, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriades myriadum ſtadiorum: conſtat huius arenæ numerum minorē fore numero producto ex decē myriadib. ſextorū numerorum, per cētum myriadas multiplicatis. Nam quoniā decē myriades ſextorum numerorum, quadrageſimus ſextus eſt ab unitate proportionalis, & centū myriades ſeptimus in eodem eiuſdem proportionis ordine ab unitate, conſtat numerum inde productum fore quinquageſimum ſecundum, ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine. Horum aūt duorum & quinquaginta octo, primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecundi poſt primos ſecundorum, octo deinde tertij tertiorum, octo quarti quartorum, octo quinti quintorum, octo ſexti ſextorum. reliqui uero quatuor, ſeptimorum uocabuntur: quorum ultimus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. Conſtat igitur arenę dictæ multitudinē, quæ habeat magnitudinem æqualem ſphæræ habenti diametrum centum myriadas myriadum ſtadiorum, minorē eſſe ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Cum itaꝗ oſtenſum ſit, diametrum mundi minorem eſſe centum myriadib. myriadum, conſtat multitudinē arenæ habentis magnitudinem æqualem mundo, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. quod quidem propoſitum fuerat. Quemadmodum autem probatum eſt, arenæ multitudinē, quæ fuerit æqualis mūdi, illi qui à plurimis Aſtrologis poſitus eſt, minorē eſſe mille unitatibus ſeptimorū numerorum: ſimiliter oſtēdetur, multitudinē arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ tātæ, quantā Ariſtarchus ſupponit eſſe ſphærā ſtellarum fixarum, eſſe minorem ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Quoniā enim ſupponit, terrā habere proportionē illā ad mūdū à nobis dictū, quā habet dictus mūdus ad ſphærā ſtellarū fixarū, quā Ariſtarchus ſupponit: & diametri ſphęrarū eādem habent inter ſe proportionē: & oſtenſum eſt diametrū mundi minorē eſſe diametro terræ, ꝙ decies milies: conſtat diametrū ſphęræ ſtellarū fixarum minorē eſſe, ꝙ decies milies diametrū mūdi. Quoniā uero ſphæræ habēt inter ſe proportionem diametrorum ſuarū triplicatā, manifeſtum eſt ſphæram ſtellarum fixarū quā Ariſtarchus ponit, minorē eſſe ꝙ decies milies decē milia mundos. Oſtēſum uero eſt multitudinē arenę, habētis magnitudinē æqualem mūdo, minorē eſſe, ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Manifeſtum eſt igit̄, quod ſi fiat ſphæra ex arena, tantā habens magnitudinē, quantā habere ponit Ariſtarchus ſphęrā ſtellarum fixarū, huius arenæ numerus minor erit eo numero qui producitur ex mille unitatib. ſeptimorum numerorū, multiplicatis per decē milia decies milies myriadas. Nam quoniam mille unitates ſeptimorum numerorū eſt quinquageſimus ſecundus ab unitate proportionalis, & decem milia decies milies myriades eſt tertiusdecimus ab unitate proportionalis in eodē eiuſdem proportionis ordine ſumptus, conſtat productum inde numerum fore ſexageſimūquartū ab unitate, proportionalem ex eodem eiuſdem proportionis ordine: iſte uero eſt octauorū octauus, & quinꝗ myriades octauorū numerorū. Cōſtat itaꝗ quod multitudo arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ ſtellarum fixarū, quam Ariſtarchus ponit, minor eſt ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Hæc aūt rex Gelon, ꝙ plurimis quidē qui in diſciplinis uerſati non ſunt, non admodū creditū iri arbitror: illis uero qui diſciplinis imbuti ſunt, & circa diſtātias & magnitudines terræ, & ſolis, & lunæ, totiuſꝗ mundi ſanam inſtitutionē acceperunt, credibilia prorſus propter demonſtrationem uidebuntur. Quare nonnullos exiſtimarim ad hæc inſpicienda nullo pacto poſſe accommodari.

FINIT ARCHIMEDIS RATIO
de Arenæ dimenſione.

COMMENTARII EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM ARCHIMEDIS DE *Sphæra & cylindro.*

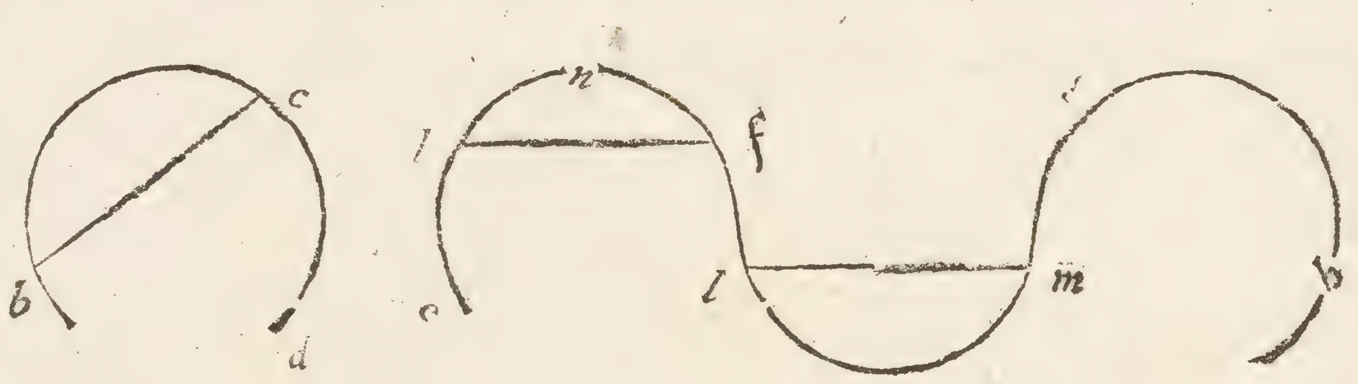
QVVM in Archimedis libro quem de ſphæra & cylindro cõfecit, eorum qui nos præceſſerunt neminem adhuc comperiſſem quippiam dignũ cõpoſuiſſe, idq; ab eis prætermiſſum intelligerem non propter theorematum, quæ illic habentur, facilitatem, quæ uti noſtis doctrina indigent exquiſitiſſima, & inſtructiſſima in primis excogitatione, aggreſſus ſum pro uirib. ea quæ in illis obſcura & perſpectu difficilia continentur declarare. adductus ad hoc magis, quod neminem fortè in hanc comprehenſionem deſcenſurum cernerem, quod rerum iſtarũ difficultate deterritus ſim. Simul etiam Socraticum illud mecum reputans, Deo coadiutore nos commodè admodum & ad perfectionem ſtudij noſtri peruenturos:

DECLARATIO TERMINORVM.

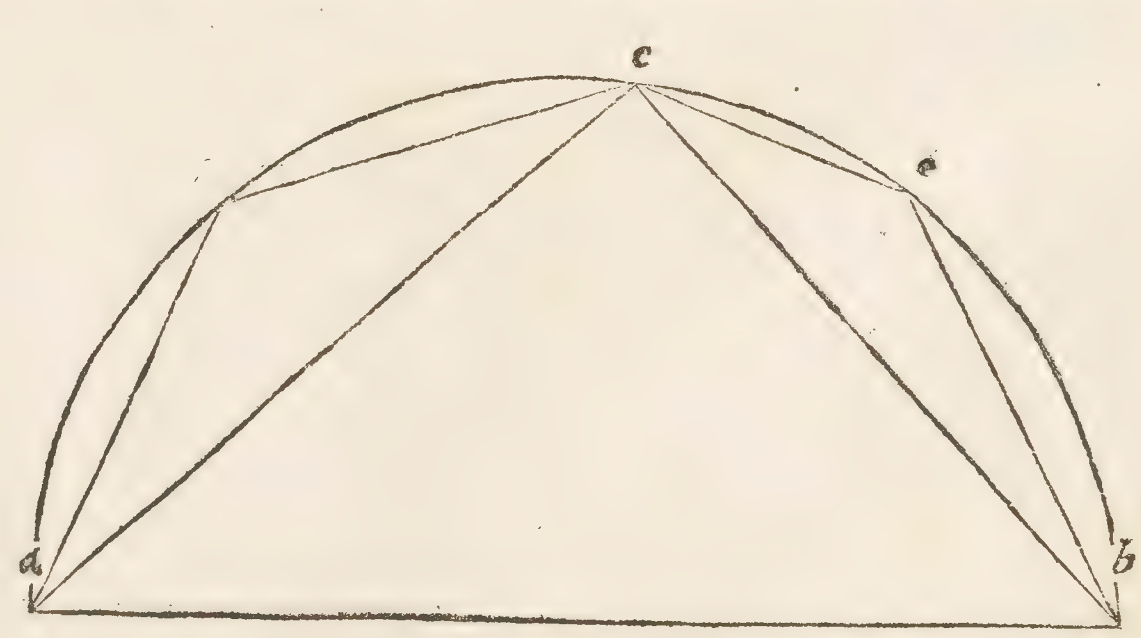
PRAENVMERANS ea quæ ab ipſo exponenda ſunt theoremata, ut conſuetum eſt omnibus Geometris in expoſitione, ſeruans quocꝫ appellationes quibus ipſe per licentiã uſus eſt: primò terminationes ſuppoſitionum, & ipſas quocꝫ ſuppoſitiones in initio ſcribendi uult declarare. & ait primũ, Quaſdam eſſe in plano curuas lineas, quę lineis rectis earum terminos iungentibus, uel omnis in eandem partem uergũt, uel aliquid in alteram habent. Hoc autem quod dictum eſt, planum erit, ſi intellexerimus quas appellat in plano curuas lineas. Quare aduertendum eſt, curuas ab eo lineas appellari non ſimpliciter circulares, aut conicas, aut eas quæ continuitatem habent non fractam: uerum eas omnis ſimpliciter, quæ in plano cum ſint, nõ in directum producantur, curuas uocat. Vnam autem lineam in plano quocunꝫ modo connexam, quãuis ſiue ex rectis pluribus connectatur, ſiue ex curuis, ſiue ex rectis & curuis, unam tamen eam ex ea connexione poſtulat appellari.

Hic deeſt una charta in exemplari græco.

ipſi a b c d. Verum quoniam uti ſuprà dictũ eſt, curuas lineas uocat non quæ circumferentiam habent ſolas, uerum etiam eas quæ ex rectis componuntur: ex his erat collectio earum quæ in eadem cauæ habentur. Continget enim in quadam linea, quæ in eadem caua ſit, duo utcunꝫ puncta notari, ita ut linea recta quæ illa puncta iunxerit, in neutram prioris lineæ partem cadat, ſed ipſi coaptetur. Propterea dixit, lineam in eandẽ cauam eſſe uocari, in qua lineæ rectæ, per duo quæcꝫ eius puncta ductę, aut omnis in eaſdem partes cadant rectæ lineæ, aut earum quędam in eaſdem partes, quædam ſuper eam, & nulla in alterã partem. Eaſdem uero licet interpretari, & in ſuperficiebus.

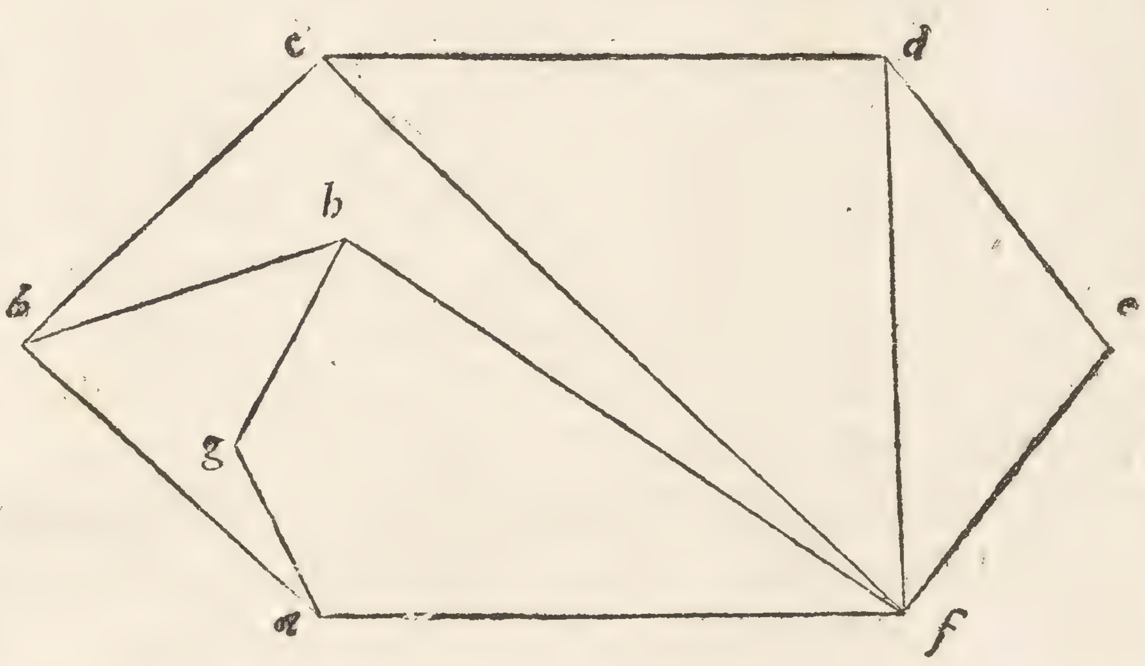


Deinde ex ordine nominat fruſtum ſolidum, & rhombum ſolidũ, aperte declarans ſignificationem nominum. Poſt hęc petitiones quaſdam ſumit, quę ſunt ei opportunæ ad demonſtrationes ſequẽtes, quæ quidem ex ipſo ſenſu confeſſæ habentur: nihilominus tamen demonſtrari ex communibus conceptionibus, & ex his quæ demõſtrata ſunt in Elementis, poſſunt. Eſt autem petitionum prima huiuſmodi: Linearum omnium, quæ eiſdem terminis continentur, rectam eſſe breuiſſimam. Eſto enim in plano linea recta terminata hæc a b: & altera itẽ linea quædam a c b, eiſdẽ contenta terminis a b, poſtulat ſibi concedi ipſam a b minorẽ eſſe ipſa a c b. Dico igitur, quod hoc cũ uerum exiſtat, petitũ eſt. notetur itacꝫ in ipſa a c b, utcunꝫ punctum c: & iũgantur a c, c b, conſtat ergo, ipſas a c, c b eſſe ipſa a b maiores. Item ſumantur in ipſis

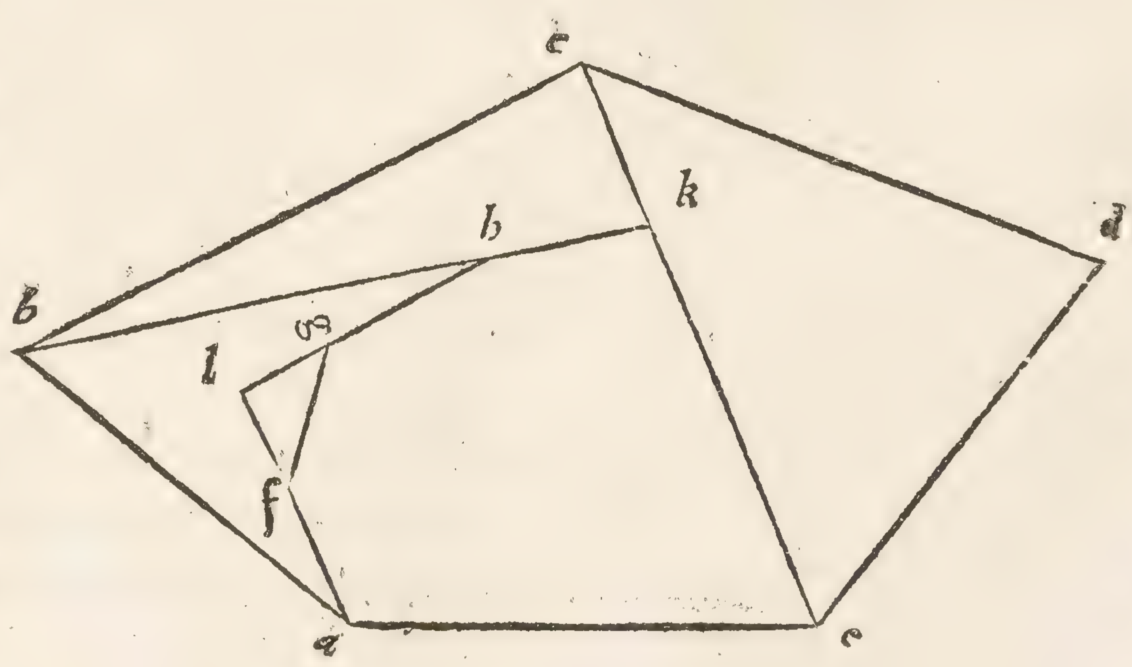


ſis a c,c b lineis alia utcunq; puncta d e,& iungantur a d,d c,c e,e b.ſimiliter iam hic cōſtat duas a d,d c eſſe maiores a c.& duas c e, e b maiores c b. Quare hæ a d, d c,c e,e b multo maiores erunt ipſa a b. Similiter autem & ſi alia puncta intermedia ſumpta notauerimus,& iunxerimus rectas ad puncta nunc ſumpta, inueniemus ipſas item maiores a b.et hoc aſſidue faciendo, quæ magis acceſſerint ad lineam a b c rectę maiores inuenientur. quare conſtat ex his,eam a c b eſſe ipſa a b maiorem, cum poſſimus in tota ipſa punctum notare, & ipſam iungentes lineam ex rectis compoſitam,ut eam talem eſſe lineam oſtendamus,quæ eadem ratione ipſa a b probetur maior.neq; enim inconueniens eſt,in demonſtrationibus eorū quæ confeſſa habentur, huiuſmodi aſſumere conceptiones.

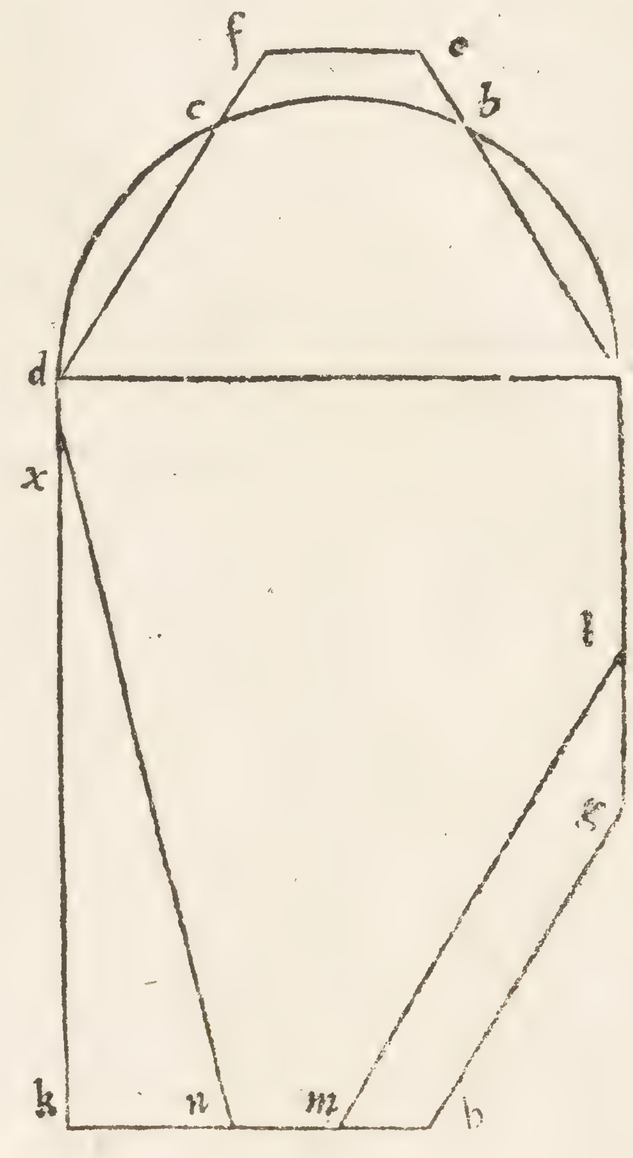
Poſt hæc dicit,ſe ſumere hoc: earum quæ eoſdem terminos habeāt linearum, illas eſſe inæquales,quæ in eaſdem cauas extiterint eo quo ſuprà dictum fuit modo. Non ſolum autem dixit in hoc inæquales eſſe,hoc quod eſt in eaſdem cauas eſſe: uerum etiam quum altera alteram, aut totam complectitur, aut eius partem complectitur: partem autem habet communem & complectentem complexa maiorem eſſe. Intelligantur autem, ut & hoc manifeſtum fiat, in plano duæ lineæ a b c d e f,& a g h f, eoſdem terminos habētes hos a,f, & in eadem cauæ. & quoniam tota a g h f complexa eſt ab ipſa a b c d e f eoſdem terminos habētē hos a,f. dico iſtas inæquales eſſe,& quæ comprehendit compræhenſa maior eſt. Iungantur itaq; b h, e f, d f. Quoniam igitur ſi intelligatur iuncta h a, ad unum laterum ipſius a b h, intus conſtitutæ ſunt hæ a g,g h, his a b, b h,cōmuni poſita h f. Hæ igitur a g,g h,h f, minores ſunt his a b,b h,h f. Verum b h,h f,minores ſunt his b c,e f.nam ſunt intus rurſus ſuper unam b f cōſtitutæ. multo magis ergo a b,b c,c f maiores ſunt his a g,g h, h f. Verum hæ c d, d f,maiores ſunt hac e f.& hæ d e, e f, ſunt ipſa d f maiores.multo magis ergo hæ a b c d e f, ſunt his a g h f maiores.



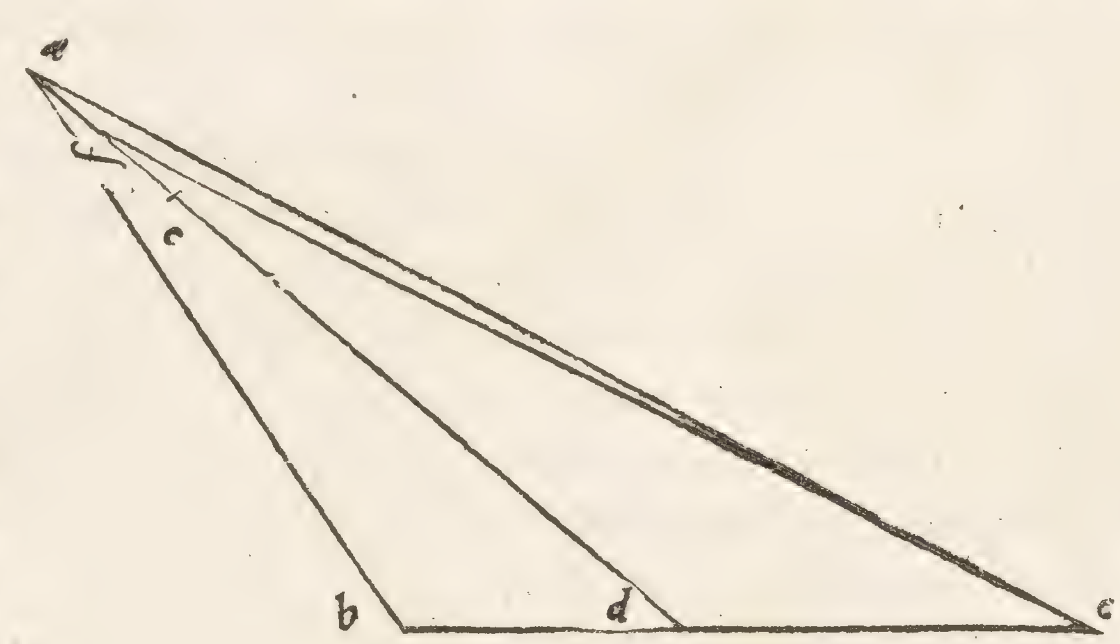
Declarationis enim gratia ſupponantur & aliæ lineæ ſimiliter prædictis,uelu ti hæ a b c d e,a f g h k e. Dico compræhendentem eſſe maiorē. Intelligantur enim a f,g h erectæ in l. Quoniam igitur rurſus f l,l g maiores ſunt f g, adiectis communibus a f,g h, hæ a l,l h maiores ſunt a f,f g,g h. Verum a l,l h maiores ſunt his a b,b h. multo magis ergo a b,b h maiores ſunt his a f, f g,g h. adiecta communi h k,erunt a b, b k maiores his a f g h k. Verū b h,h k minores ſunt b c, c k. Multo magis ergo maiores a b c k, his a f g h k, adiecta communi k e,erunt hæ a b c k e maiores his a f g h k e. Verum hę c k,k e minores ſunt his c d,d e,multo magis ergo hæ a b c d e, maiores ſunt a f g h k e.



Et ſi circumferentiæ ſint uel comprendentes uel comprenſæ, aut utrumque, idem licet inſpicere. nam ſi puncta cōtinuata in eiſdem notentur, & in eadem iungantur, recte: ſumentur lineæ ex rectis compoſitæ, quibus accommodabitur prædicta demonſtratio, his quæ ex rectis componuntur quales illæ fuerint factis adiectis. unde & omnem lineam in continuatione punctorum exiſtentiā habentem notato. Quod aūt conuenienter inæqualitatem linearum non ſolum ex hoc quòd in eadem cauæ ſint, denotauit: uerum addidit etiam hoc, oportere alteram ab altera compræhendi, & ab ea quæ eoſdem habeat terminos recta. nam niſi hoc fuerit, nō erit hoc utiq; uerū, omnino lineas tunc inæquales eſſe: uti conſpicere licet in figuris infraſcriptis. nam linea a b c d. & a e f d, eoſdem terminos habent, & in eandem cauæ ſunt: nec tamen conſtat, utra earū ſit altera maior. nam poteſt eſſe ut æquales ſint, & poſſint utræq; in eadem cauæ intelligi, & eoſdem terminos habere. ambæ autem contraria inter ſe poſitione cōſtitutæ, ut utrauis earum quæ ſunt dictæ ipſi a g h k d: et ita incognitum eſt ſi inæqualitas aut æqualitas earum hoc pacto ſequatur. quare opportunè adiectum eſt, aut totam alteram comprǣhendi ab altera recta oportere, quæ eoſdē terminos habeat: aut partem quidem compræhendi, partem autem cum ea communem habere: ſicuti in his a g h k d, & a l m n x d. in his enim quædam compræhenduntur, quædam communes ſunt, uti a l m n.

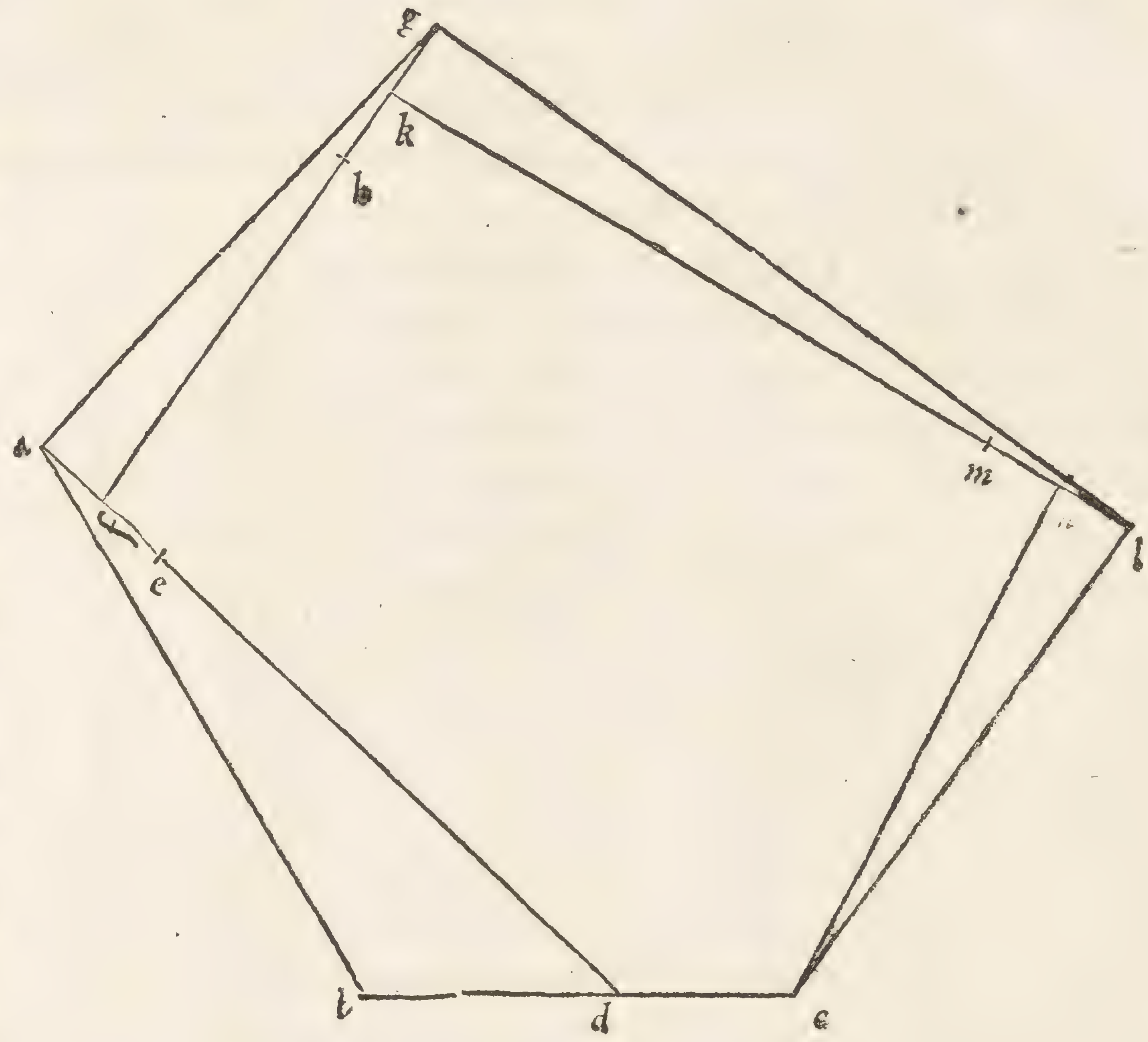


Opportunè autem admodum & illud ad inæqualitatis iudicium aſſumptum eſt, oportere lineas eoſdem terminos habere. Si enim non fuerit illud, neq; altera alteram compræhendere poterit. Quomodo igitur inæquales erunt, niſi caſu. nā quādoq; erunt æquales. & contingit eſſe compræhenſam aliquando cōpræendente maiorem. Vt autē hoc declaretur, intelligantur in plano duæ rectæ, a b, b c, obtuſum angulum ad b continentes: & ſumatur in b c punctū utcunq; d. iungantur a d, a c. Quoniam igitur a d, maior eſt ipſa a b, ponatur a b æqualis ipſi d e, & diuidat̃ ae in duo æqua puncto f, & iungatur f c. Quoniā igitur duæ a f, f c maiores ſunt a c, & æqualis a f eſt ipſi f e, erit e f, f c maior ipſa a c, adiecta eorum a b, erunt hæ d f, f c maiores his b a, a c. quare linea b a c intellecta una eſſe, & in eadem caua, altera uero d f c compræhenſa ab altera quæ eoſdem terminos non habeat, non ſolum comprehendens non eſt maior cōpræhenſa, uerum oſtenditur minor eſſe.



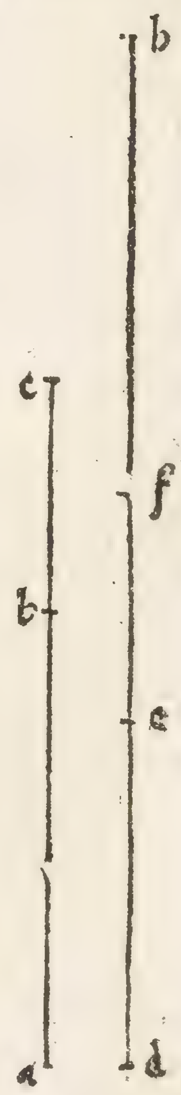
Et in lineis ex pluribus rectis compoſitis hoc idem licet inſpicere. nam intelligantur in plano duæ rectæ hæ a b, b c: & pūctum d quodcunq; contingat, & iungatur a d. Rurſus ponatur d e æqualis ipſi a b, & e a diuidatur in duo æqua puncto

cto f, & ducatur a g ad angulos rectos ad ipſam a d, & iungatur f g. & ponatur f h æqualis ipſi a g. & item diuidatur h g in duo æqua puncto k, & ducatur g l ad angulos rectos ad ipſam f g, & iungatur k l. item k m ponatur æqualis ipſi g l, & diuidatur m l in duo æqua puncto n. & item ducatur l c ad angulos rectos, ad ipſam k l, et iũgatur n c. Ex prędemonſtratis igitur cõſtat, d f maiorem eſſe ipſa a b, & f k ipſa a g, ipſam k n ipſa g l, ipſam n c ipſa l c. quare et totã lineã d f k n c, maiorem ipſa a b g l c. Opportunè ergo ad iectũ fuit, eas oportere eoſdem habere terminos, in his quæ eſſe debeant inæquales. Poteſt autem qui hæc conſiderarit, idem de ſuperficiebus demonſtrare omnibus, quando cum his quæ prædictæ ſunt conditionib. ſuperficies ſumptæ, eoſdem terminos cum planis habuerint.



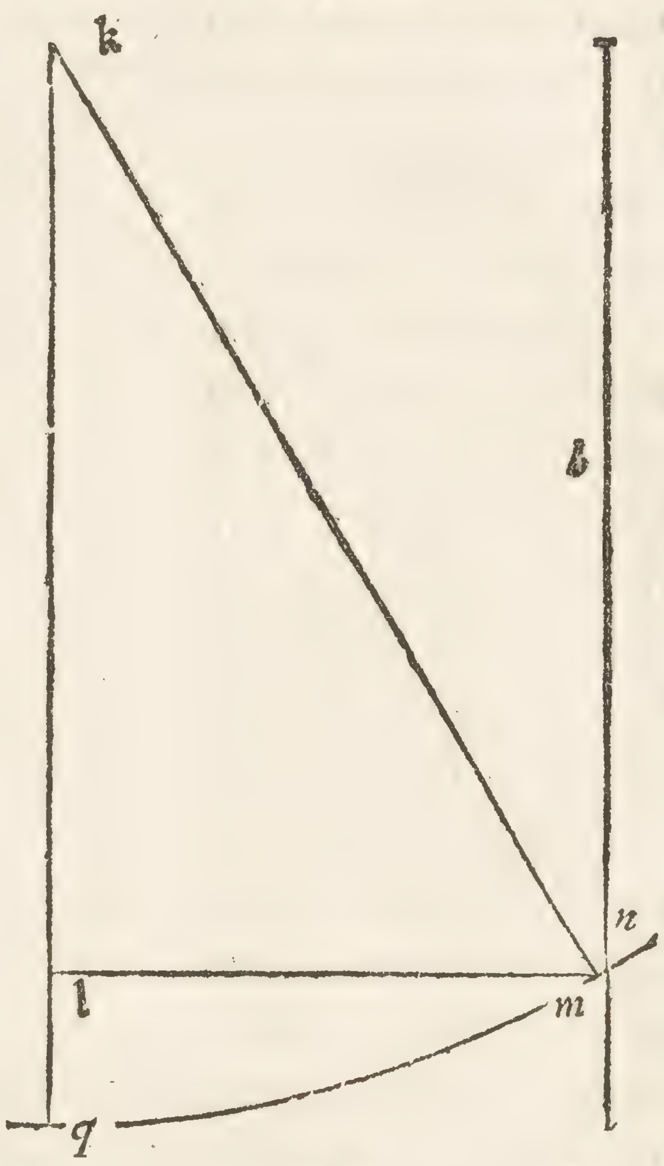
IN SECVNDVM THEOREMA.

AT uero a c ſibi ipſi ſupercompoſitum, excedet ipſum d, uidelicet ſic: cum ipſum a b ſuperparticulare aut ſuperpartiens contigerit eſſe ipſius d. Si autẽ ſit a b multiplex ipſius d, aut multiplex ſuperparticularis, aut multiplex ſuperpartiens, ablato ab ipſo b c æquali d, reliquum c a ſuperabit d, ita ut non amplius neceſſe ſit ſumi multiplex ipſi, uerum ut oporteat inde ponere a b æquale ipſi a c, & eandem accommodare demonſtrationem. Et componenti ipſi f h ad f g minorem proportionem habet, quàm a b ad b c. nã ſi primum ad ſecũdum minorem habeat proportionem, quàm tertiũ ad quartum, componendo eadem proportio ſequitur. Oſtẽdetur autem ſic. Sũto quatuor magnitudines a b, b c, d e, e f. & a b maiorem ad b c habeat proportionem, quàm d e ad e f. Dico igitur componẽdo, a c habere ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad e f. Fiat enim ſicut c b ad b a, ita f e, ad f h. Ecõuerſo igitur, ſicut a b ad b c, ita h f ad e f. maiorem aũt habet a b ad b c proportionẽ, quàm d e ad e f. igiť h f habet ad e f maiorem proportionem, quàm d e ad e f. quare h f maior erit ipſa d e, & totum h e maius toto d f. & propterea h e habet ad e f maiorem proportionem, quàm d f ad f e. Verũ ſicut h e ad e f, ita a c ad c b, per compoſitionem. igitur a c ad c b maiorem habet proportionem, quàm d f ad e f. At uero a c habeat ad c b maiorem proportionẽ, quàm d f ad f e. Dico diuidendo, quod a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Rurſus enim ſimiliter, ſi faciamus ſicut c b ad c a, ita f e ad e h, fiet ut h e ſit maior d f. quare communi e f ablata, erit h f maius d e. quare h f habebit ad f e, quę eſt ſicut a b ad b c,



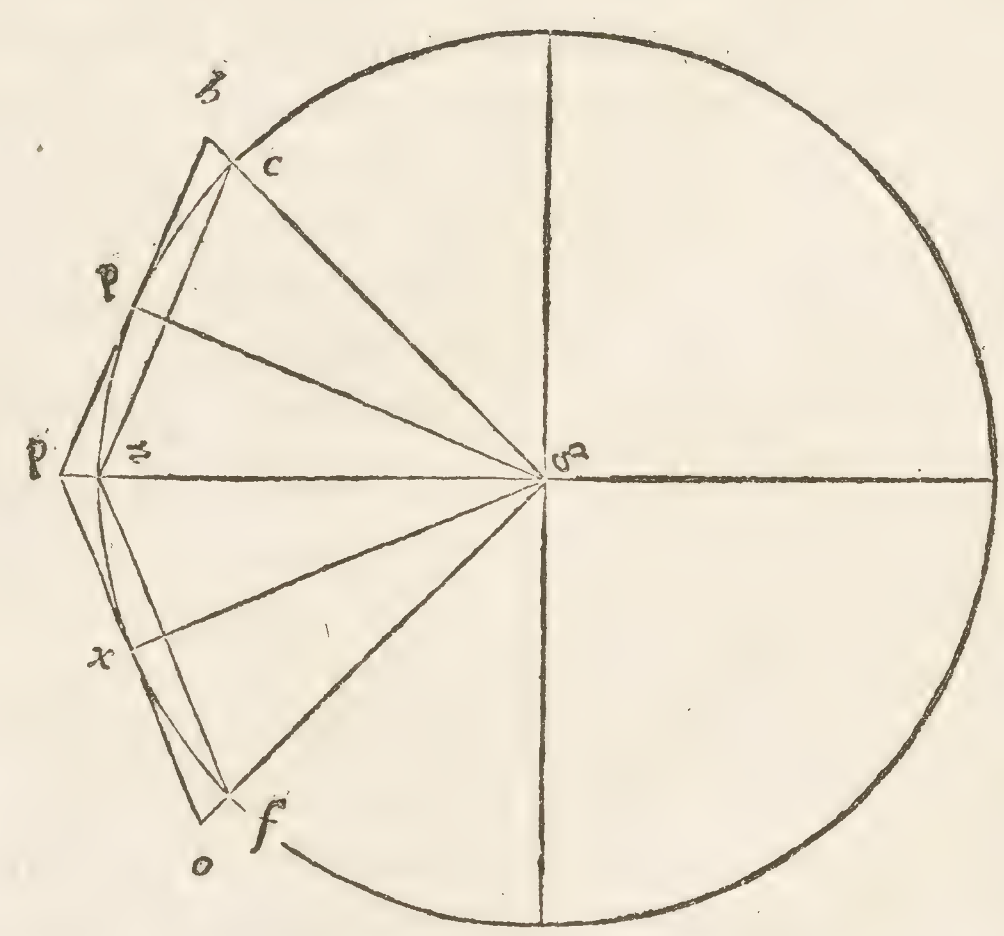
diuidendo maiorē proportionē, quàm d e ad e f. & cōponendo, & item diuidendo eadem proportio ſequet̃. Ex eiſdem aūt euerſa proportio conſtat. habeat enim a c maiorem ad b c proportionem, quàm d f ad f e. Dico quod euertendo c a habebit ad a b proportionem minorem, quàm f d ad d e. Quoniā enim a c habet ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad f e: & diuidenti a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. E conuerſo b c ad b a habebit minorem proportionem, quàm f e ad e d: & cōponenti, c a ad a b minorem habebit, quàm f d ad d e.

IN TERTIVM THEOREMA.



ET ab ipſo k ducatur æqualis ipſi h, quæ ſit k m. hoc fieri poteſt producta k l ad q, & poſita h æquali ipſi k q: & cētro quidem k, interuallo autem k q deſcripto, circulo uidelicet q m n, cōſtat k m æqualem eſſe ipſi k q. hoc eſt ipſi h.

Latus ergo n c figuræ multiangulæ, & æquilateræ. Angulo enim recto in ſeſquiquartam proportionem adducto, & ſectione per parem diuiſionem facta à recto, conſtat quod circumferentia ſeſquiquarta in pariter pares numero diſtribuetur circumferentias. Quare recta quę uni ex illis circumferentijs ſubtenſa fuerit, fiet figuræ multiangulæ & æquilateræ & parilateræ latus unum. Nam ſi angulo ſub x g n, æqualem fecerimus angulum ſub p g d, iungentes ab ipſo p in g, & producamus uſq; ad g h, ęqualem ipſi angulo ſub p g d, conſtat p h eſſe æqualem ipſi p o, & attingere circulum. Quoniam enim ipſa x g æqualis eſt ipſi g d. nam ipſa g communis eſt: æquales enim complectuntur. Ergo baſis x p æqualis eſt ipſi p d. & angulus ſub p x g, rectus cum ſit, æquatur angulo p d g. quare contingit ipſum p d. Quoniam enim qui ad d anguli recti ſunt & qui ſub p g d, d g h æquales: & eſt communis d g, quare g h æqualis eſt ipſi g p, & ipſa p d ipſi h d. Item ipſa x p ipſi p d oſtēſa eſt eſſe ęqualis. quare ipſa h p exiſtit figuræ multiāgulæ æquilateræ & parilateræ latus, deſcriptæ circa circulum. Quod autē ſimilis figurę inſcriptę fiat, inde conſtat. Cum enim ipſa h g ſit æqualis ipſi g p, & ipſa c g ipſi g n, æquediſtans eſt h p ipſi c n. eadem ratione & ipſa p o, ipſi n k. Quare angulus ſub c n k, æqualis eſt angulo ſub o p h. quare circūſcripta figura eſt inſcriptæ ſimilis.



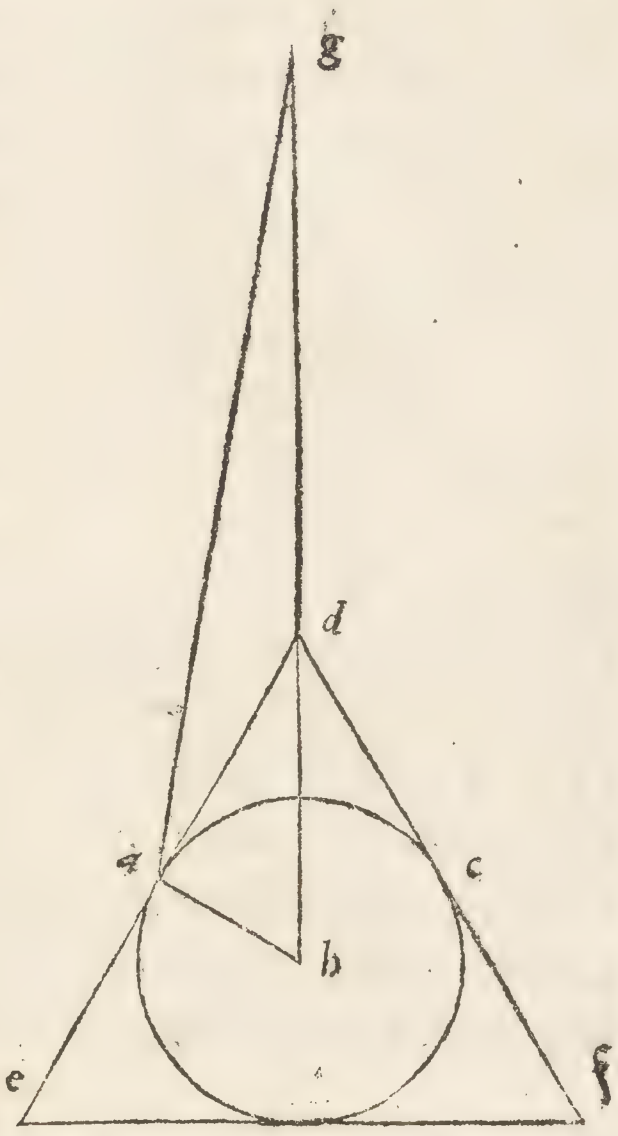
Cum enim angulus a d k c, maior ſit angulo ſub c g t, ſi angulo ſub c g t conſtituamus æqualem angulum ſub l k r, ipſo k intellecto inter ipſa l m, triangulus l k r ſimilis erit triangulo c g t. et erit ſicut r k ad k l, ſic c g ad g t. quare m k ad k l, maiorem proportionem habet, quàm c g ad g t.

IN SEXTVM THEOREMA.

PRopter hoc minus eſt circumſcriptum utroqꝫ ſimul. Quoniam enim circumſcriptum, ad inſcriptum minorem habet proportionem, quàm utrumqꝫ ad circulum, multo magis ergo circumſcriptum habet ad circulum minorē proportionem, quàm utrumqꝫ ſimul ad circulum. quare circumſcriptum minus eſt utroque ſimul circulo, communi ablato, erūt reliqua circum reſidua ſpacio b minora.

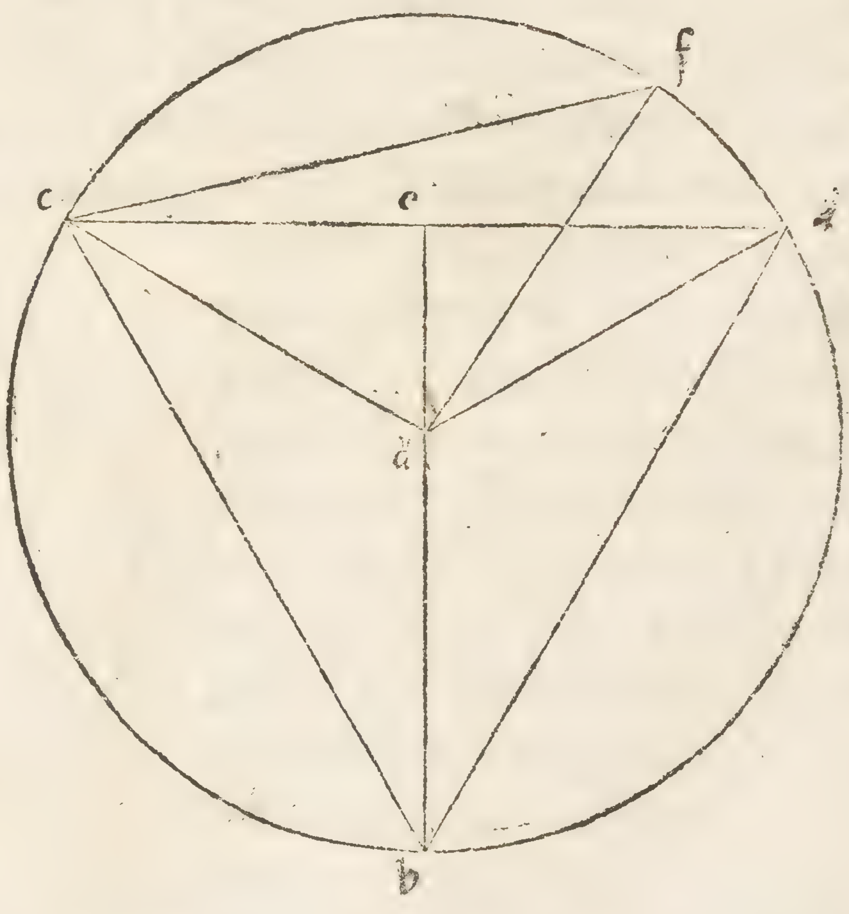
IN OCTAVVM THEOREMA.

PErpēdiculares igitur à uertice ad a b c ductæ ſunt ſuper eas. Intelligatur enim conus ſeorſum, & eſto uertex eius g, centrū baſis eius h, & ab h ad a iungatur h a, & a g, g h. Dico quod g a perpendicularis eſt ad ipſam d e. quoniam enim g h perpendicularis eſt ad circuli planum, & omnia ſecundū eam plana. quare triangulus g h a erectus eſt ad baſim: & ſtat erecta ſuper communem ſectionem planorum h a, in uno planorum ipſa d e. quare ipſa d e, ſuper ipſam g h a planū ſtat, ad angulos rectos: quare & ſuper ipſam, g a. Similiter oſtendentur illæ, quæ ad c, b, iunctæ ſunt à uertice perpendiculares cū ſint ſuper d f, e f. Sciendum aūt, quod in præmiſſa opportunè additum fuit hoc, oportere omnino pyramidem inſcriptam habere baſim æquilateram. non enim aliter à uertice ad baſis latera ductæ poſſent eſſe æquales. In pręſenti non eſt additum, eſſe baſim æquilateram. propterea utcunqꝫ fuerit, idem ſequetur.



IN NONVM THEOREMA.

MAiores igitur ſunt trianguli a b d, b d c, triangulo a d c. Quoniam enim angulus ad d, ſolidus eſt, anguli ſub a d b, b d c maiores ſunt angulo ſub a d c, & ſi à uertice ad ſectionem baſis in duo æqua iunxerimus d e perpendicularem ſuper a c, erit angulus ſub a d b maior angulo ſub a d e. Conſtituatur itaqꝫ angulo ſub a d b angulus, ſub a d f æqualis: & poſtea d f æquali ipſi d c, iungatur a f. Quoniam igitur duæ duabus æquales, & angulus angulo, & triangulus a b d triangulo a d f æqualis, qui eſt maior ipſo a d e: quare triangulus a b d ipſo a d e maior eſt. Similiter quoqꝫ triāgulus a b c, ipſo d e c maior. Igitur duo a d b, d b c, ipſo a d b maiores ſunt.



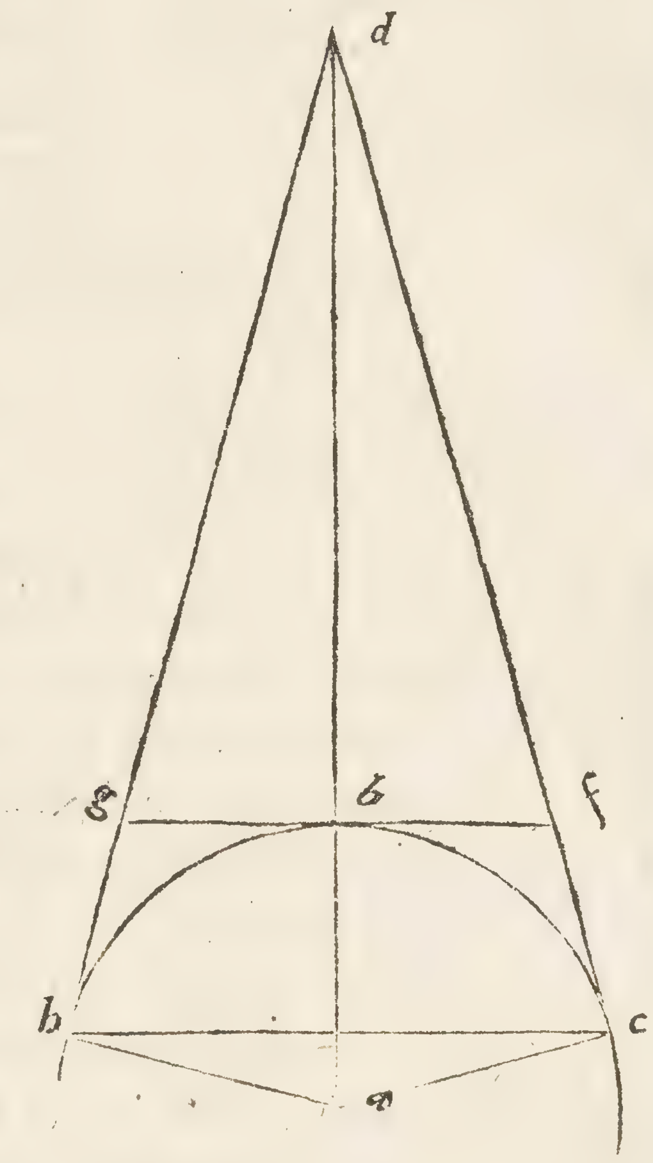
IN DECIMVM THEOREMA.

DVcatur enim g f e contingens circulum, & æquediſtans ipſi a c, circumferentia a b c, in duo æqua diuiſa puncto b. Quod enim ſic ducta æquediſtans fiat ipſi a c, oſtendetur ductis à centro h, his h a, h d, h c. Quoniam enim a d eſt æqualis ipſi d c, & d h communis eſt, duæ duabus æquales, et baſis a h baſi h c, igitur & angulus angulo æqualis. Sunt autem anguli g b d, d b f recti. nam

à centro

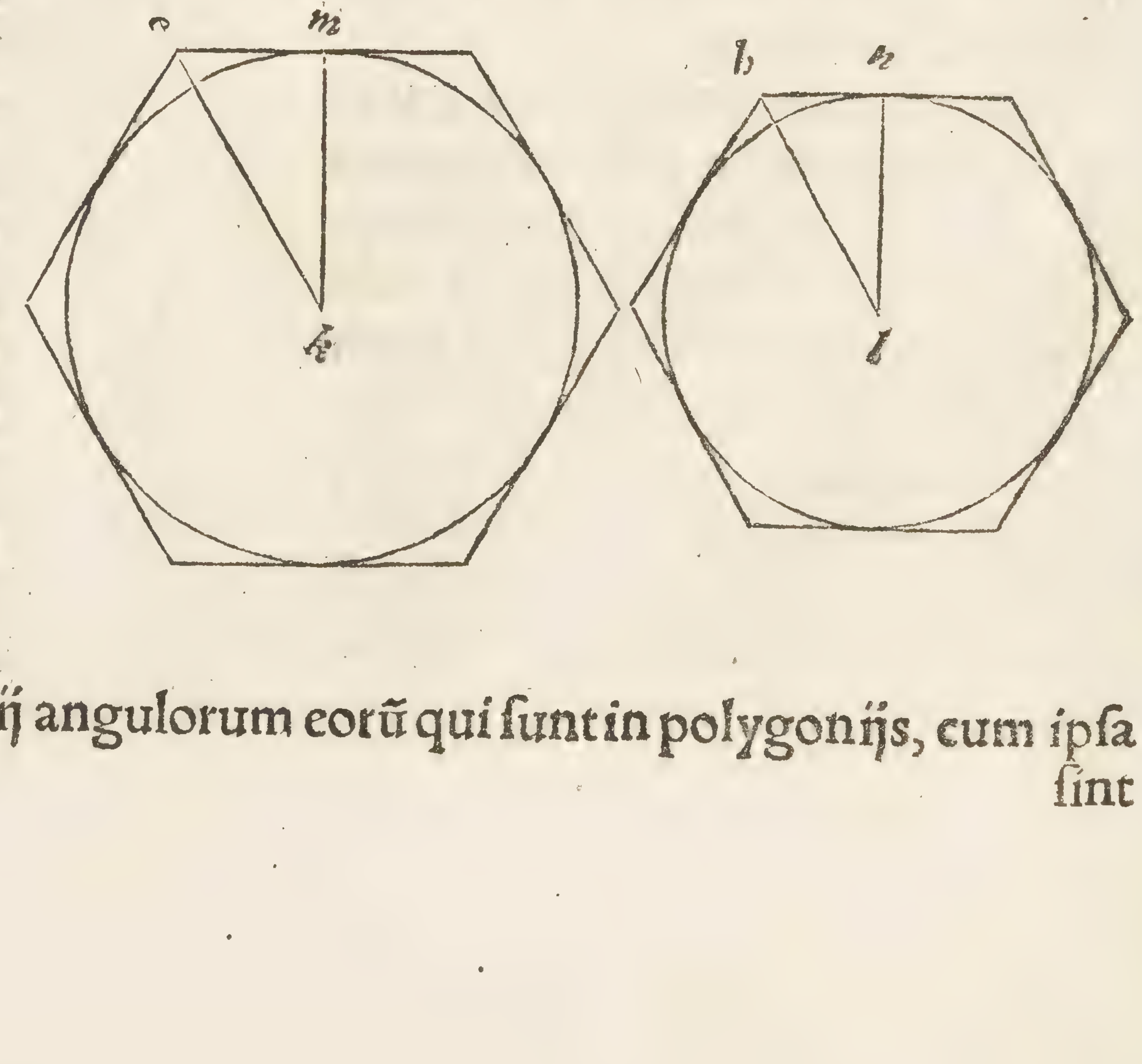
à centro ad contactum ducta eſt h b. quare reliquus angulus d g b, reliquo d f b æqualis eſt. idcirco ipſa g d, ipſi d f eſt æqualis: quare ipſa f g eſt æquediſtans ipſi a c.

Circumſcribentes itaque multiangula circa portionem, ſimiliter circumferētijs circumceptis in duo æqua diuiſis, ductis lineis cōtingentibus, ſumemus quædam reſidua minora ſpacio h. de inſcriptis quidem oſtenſum eſt in Elementis, triangulos portionibus inſcriptos maiores eſſe dimidio portionum illarum. Idcirco poſſibile fuit, diuidendo in duo æqua circumferentias, & rectas ducendo, relinqui quędam reſidua ſpacio dato minora. In circumſcriptis autem nondum hoc eſt oſtenſum, in Elementatione. Quoniā enim in præmiſſa hoc dixit, quod eſt ipſum collegiſſe per ſextum Theorema, colligendum & oſtēdendum quod contingens auferat triangulum maiorem dimidia ea in qua fit portione: ueluti in eadem deſcriptione, quod g d f triangulus maior eſt dimidio ſpacio compræhenſo ſub a d, d c, & circumferentia a b c. ductis enim eiſdem, quoniam angulus d b f eſt rectus, erit ipſa d f maior ipſa b f, & ipſa b f æquatur ipſi f c. nam utraque earum applicatur. Igitur d f maior eſt ipſa f c, quare triangulus d b f triangulo b f c maior exiſtit. nam in eadem ſunt altitudine. multo magis igitur maior eſt ſpacio b f c compræhenſo. Eadem ratione & d b g maior eſt b g a. quare totum d f g, maius eſt dimidio ſpacio a d c compræhenſo.



IN XIII THEOREMA.

Intelligatur itaque circulo b circumſcriptum, & inſcriptum, & circulo a circūſcriptum ſimile circumſcripto ipſi b. quemadmodum autem circulo dato ſit figura inſcribenda polygonia, ſimilis indeſcriptæ alteri circulo, à Pappo dictum fuit in Cōmentarijs elementorum. Circulo autem dato circumſcribere figuram polygoniam, ſimilem circumſcriptæ alteri circulo, nondum habemus ab aliquo traditū: quod nunc dicendum eſt. Nam circulo b inſcriptæ ſimilis circulo a inſcripta fuit, & circa a circumſcriptæ ſimilis inſcripta fuit ipſi a, ueluti in tertio Theoremate. & eſt ſimilis circumſcriptæ ipſi b. Et quoniam figuræ rectilineæ circulis a, b circumſcriptæ ſimiles ſunt, eandem habebunt proportionem, quam illæ quæ ex centris potentia. tale quidem de inſcriptis oſtenſum eſt in Elementatione. de circumſcriptis autem nondum. Oſtendetur autem. ſic intelligantur enim ſeorſum circumſcriptæ & inſcriptę figurę rectilineę, & à centris circulorum iūgantur k e, k m, l h, l n. Conſtat iā k m l n, ex centris eſſe circulorum circa circumſcriptas figuras multiangulas deſcriptorum: & ad ſe inuicem haberi potentia, ſicut figurę circumſcriptæ. Et quoniam contenti ſub k e m, l h n, ſunt dimidij angulorum eorū qui ſunt in polygonijs, cum ipſa

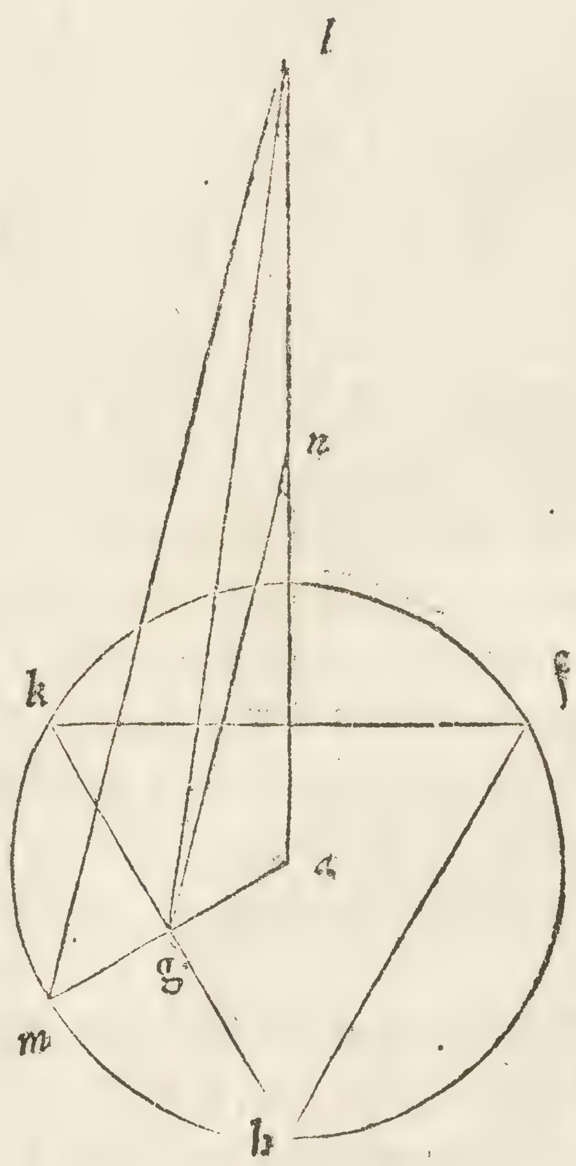


ſint ſimilia, conſtat ipſos quoque æquales eſſe. At uero qui ad m, n, habentur, anguli recti ſunt: quare trianguli k e m, l h n ſunt æquianguli. & eſt ſicut quadratum k e ad quadratum h l, ſic circumſcriptæ inter ſe figuræ. Ergo ſicut quadratum k m, ad quadratum l n, ſic figuræ circumſcriptæ inter ſe habent. Triangulus igitur k d t, eandem proportionem habet ad rectilineam figuram circulo b circumſcriptam, quam triangulus k d t, ad triangulum f r a. Quoniam enim rectilineæ figuræ circulis a, b inſcriptæ ſe habent ad inuicem, ſicuti quæ ex centro potẽtia, hoc eſt ipſa t a ad g potentia, hoc eſt t d ad r f longitudine: hoc eſt ſicut triangulus k d t, ad ipſum f r l. Eſt autem ipſum k t d æquale circumſcripto ad circulũ, ad circulum a. Eſt igitur ſicut k t d, ad circa circulum b deſcriptum, ita triangulus k t d, ad triangulum f r l.

Igitur permutatim priſma habet ad cylindrum minorem proportionẽ, quàm multiangulum circulo b inſcriptum ad circulum b: quod eſt inconueniens. nam ſi faciamus ſicut ſuperficies priſmatis ad ſuperficiem cylindri, ſic inſcriptum circulo b haberi ad quidpiam aliud, erit id minus circulo b, ad quod inſcriptum habet maiorem proportionem, quàm ad circulum. hoc eſt ſuperficies priſmatis ad ſuperficiem cylindri maiorem habet proportionem, quàm inſcriptum ad circulum. & oſtenſum eſt habere minorem, quod admitti non poteſt.

IN XIIII THEOREMA.

IPſa c ad ipſam d maiorem proportionem habet, quàm polygonium inſcriptũ circulo a ad ſuperficiem pyramidis inſcriptæ cono. nam quæ ex centro circuli ad latus coni maiorem habet proportionem, quàm quæ à centro ad unum latus polygonij ducta perpendicularis, ad perpendicularem ductam à uertice coni ad latus ipſius polygonij. Intelligatur enim ſeorſum deſcriptio in rationali, & polygonium f h k inſcriptum circulo a, & à centro a ad unum latus h k polygonij ducatur perpendicularis a g. Conſtat iam quod ſuperficies contenta ſub perimetro polygonij, & ſub a g, eſt dupla polygonio. Intelligatur item pũctum l uerticem eſſe coni, et ab ipſo l ad g ducta l g eſt perpendicularis ſuper h k, uti oſtenſum eſt, in limmate octaui Theorematis. Quoniam igitur inſcriptum polygonium eſt æquilaterum, & conus eſt æquicruris, erunt omnis ductæ ab l ad unumquodque latus polygonij perpendiculares ipſi, æquales l g. nam unaquæque earum poteſt quadratum axis, & quadratum a g. Et propter hoc contentum ſub perimetro polygonij, & ſub l g, eſt duplum ſuperficiei pyramidis. quod enim ſub unoquoque latere, & ſub perpendiculari ducta à uertice ad latus ipſum, quæ & æqualis ipſi l g, duplum eſt triangulo ſecundum ipſam. quare ſicut a g ad g l, ſic polygonium ad ſuperficiem pyramidis, ſumpta cõmuni altitudine perimetri ipſius polygonij ducta g n æquediſtãte ipſi m l, fiet ſicut a m ad m l, ſic a g ad g n. Ipſa uero a g ad g n maiorem proportionem habet, quàm ad g l. nam l g maior eſt ipſa g n. igitur a m ad m l, hoc eſt c ad d maiorem proportionem habet, quàm a g ad g l, hoc eſt quàm polygonium ad pyramidis ſuperficiem.



IN XVI THEOREMA.

ET quoniam contentum ſub b a,a g,æquatur cõtento ſub b d,d f,& contento ſub a d,& ſub utraq; ſimul d f,a g,cũ d f ſit æquediſtans ipſi a g. quoniã enim d f,eſt æquediſtãs ipſi a g, eſt ſicut b a ad a g, ſic b d ad d f,atq; idcirco cõtentũ ſub extremis b a,d f,æquatur contento ſub medijs b d,a g. Verum cõtentum ſub b a, d f,æquatur contento ſub b d,d f, & cõtento ſub a d, d f, per primum Theorema libri ſecundi Stoichioſeos. Igitur contentum ſub b d, a g,æquatur contento ſub b d,d f.& contento ſub a d,d f,adiecto communi contento ſub d a, a g, erit contentum ſub b d,& a g,cum contento ſub a d,a g:quod eſt contentum ſub b a,a g, æquale erit contento ſub b d,d f,& contento ſub a d,d f, & itẽ cõtento ſub a d,a g.

IN XXIII THEOREMA.

MVltitudo autem laterũ polygonij menſuretur quaternario. Vult latera polygonij numerari quaternario, quia circulo moto circa diametrũ a c,latera omnia ferentur ſecũdum conicas ſuperficies,cum hoc ſit ſibi uſui in ſequentibus. Nam ſi latera polygonij quaternario non menſuretur, quamuis parilaterum fuerit,non poſſunt omnia ferri ſecundum conicas ſuperficies,uti percipi poteſt in lateribus hexagoni. duo enim ex oppoſito latera eius,inuicem æquediſtãtia,contingit ferri ſecundum cylindricas ſuperficies: quod quidem ſibi non eſt uſui ad ſequentia,ut dictum eſt.

IN XXIX THEOREMA.

IPſa uero k h æqualis eſt diametro circuli a b c d. Si enim a puncto q iunxerimus ad punctum m,quo k f contingit circulum a b c d,quod ſit m, ſimiliter autem & ipſam q k: quoniam q k eſt æqualis ipſi q f,& anguli ad m ſunt recti. namq; k m, eſt æqualis ipſi m f. item ipſa f k ipſi q h eſt æqualis: igitur q m æquediſtans eſt ipſi k h. & idcirco eſt ſicut h f ad f q, ita k h ad k m. uerum h f dupla eſt ipſius q f, igitur k h dupla eſt ipſius q m,quæ eſt ex centro circuli a b c d.

IN XXX THEOREMA.

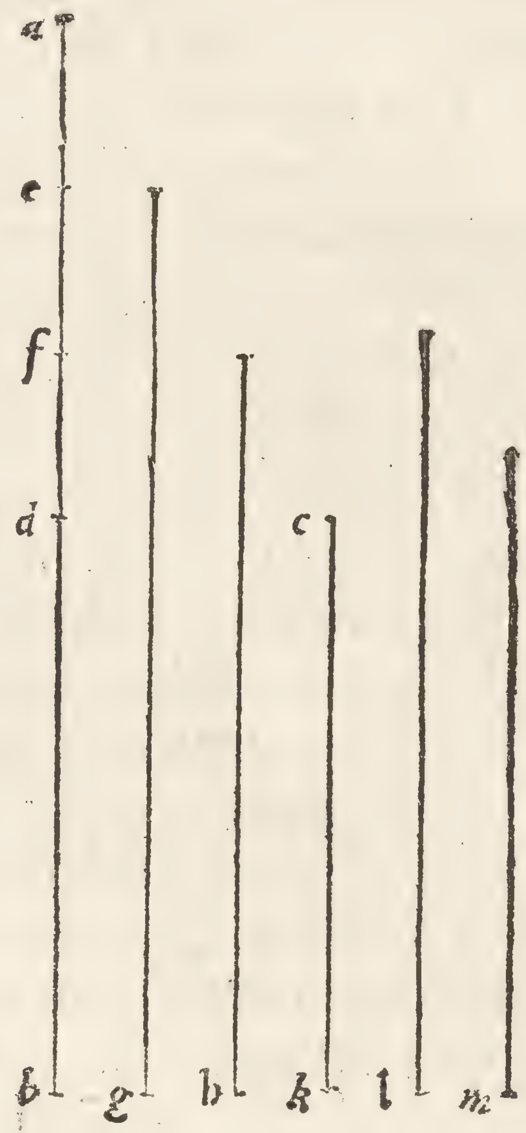
HAbet autem diameter circuli m,ad diametrum circuli ipſius n proportionẽ, quam habet e l ad a k. nam ſi iungãtur hæ g l,c k,angulis ad k l factis rectis, & ipſa a k æquediſtans ipſi l e: triangulus enim g l e eſt æquiangulus. idcirco eſt ſicut g l ad l e,ita c k ad k a. uerum ſicut g l ad l e, ſic omnis iungentes angulos circumſcriptæ ad diametrum circuli circumſcripti. Sicut autem c k ad k a,ſic omnis iungentes angulos inſcripti ad diametrũ circuli a b c d. Sicut autem diametros ad latus,ſic diametros ad latus: quoniam & ſicut m e ad e l,ſic m a ad a k. & per æquã, ſicut omnes iungentes angulos circumſcripti ad e l, ita omnes iungentes angulos inſcripti ad a k. uerum ſicut omnes ad latus e l, ſic contentum ſub omnibus, & ſub e l: hoc eſt quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratum e l,ipſa e l æqualem altitudinẽ ſumente. ſicut aũt omnes ad a k, ſic contentũ ſub omnibus,& ſub a k,hoc eſt quadratum eius quæ ex centro n ad quadratum a k, communem altitudinem rurſus ſumente a k. Eſt igitur ſicut quadratum eius quæ ex centro m ad quadratum e l: ita quadratum eius quæ ex centro n,ad quadratum a k. Igitur ſicut ipſa quæ ex centro m ad ipſam e l,ita quæ ex centro n,ad ipſam a k. Et permutatim,ſicut quæ ex centro m, ad eam quæ ex centro n,ita e l ad a k. Et duplæ antecedentium: ſicut diametros ipſius m ad diametrum ipſius n,ſic e l ad a k.

IN XXXII THEOREMA.

HAe autem i h ſumptæ,ſic ut æqualiter ſe ſuperent ipſa k ipſam i,& ipſa i ipſam h, & ipſa h ipſam g, propoſitum eſt duabus rectis datis duas medias proportionales inuenire in Arithmetica analogia: quod idem eſt, ut ſeſe æqualiter ſuperent. Hoc autem fiet hoc modo. Sint duæ rectæ datæ a b,c k inæquales,et ablata ab ipſa a b æquali ipſi c k,quæ ſit b d,reſidua d a diuidatur in tria ęqua punctis e,f. & ponatur g æqualis ipſi e b,& h æqualis ipſi b f. Erunt itaq; g h perficientes

tes

tes, id quod propoſitum eſt. Dico quod a b, habet ad c k maiorem proportionem quàm triplam eius quam habet a b ad g. Fiat enim ſicut a b ad g, ſic g ad aliam quandam l. Et quoniam qua ſui parte a b ſuperat ipſam g: ipſa g ſuperat eadem ſui parte ipſam l. pars uero ipſius a b maior eſt parte illa ipſius g. Igitur a b maiori excedit ipſam g, quàm ipſa g ipſam l. Tanto autem ipſa a b ſuperat ipſam g, quanto g ipſam h. Igitur ipſa g maiori excedit ipſam h, quàm ipſam l. quare l maior eſt ipſa h. Si rurſus fecerimus ſicut g ad l, ſic l ad m, multo maior erit ipſa c k. Et quoniam ſunt quatuor rectæ a b, g, l, m continuę proportionales, habebit a b ad m proportionem, a b ad g triplicatam. quare a b habet ad c k maiorem proportionem, quàm a b ad g triplicatam.



IN XXXV THEOREMA.

VErum contentum ſub e h, & ſub e f, c d, k a oſtenſum eſt æquale eſſe contento ſub e l, k h. In uigeſimo enim ſecũdo Theoremate oſtenſum eſt, quod e f, c d, k a ad h k eãdem proportionem habent, quam l e ad e h. quare contentum ſub extremis eſt æquale contento ſub medijs. cõtentum autem ſub e l, k h minus eſt quadrato h a. Cum enim contentum ſub l h, h k, ſit æquale quadrato h a, uti conſtat, coniuncta a l: propterea quod triangulus h a k factus eſt ſimilis triangulo h a l. Eſt enim ſicut l h ad h a, ſic a h ad h k, & ideo contentum ſub extremis æquale quadrato mediæ.

IN XXXVII THEOREMA.

HAbebit iam idem centrum cum circulo a b. Si enim a d e iũgantur rectæ ad h e l, æquales erunt, propterea quod ductæ a d ad contactus rectæ ſunt perpendiculares ad aptatas, & diuiduntur adaptatæ in duo æqua ad contactum. aut quando fiat maior enim eſt ſuperficies ſuperficie: quoniam enim m f ſecundum ſuperficiem conicam fertur, ſecundum coluri coni ſuperficiem feretur, quæ eſt æqualis circulo, cuius quæ ex centro ſit media proportionalis inter f m, & dimidiã utriuſque ſimul f g, & m n. Similiter & ſuperficiei coluri coni factæ ab m a, æqualis eſt circulus, cuius quæ ex centro ſit media proportionalis inter rectam m a, & dimidiam utriuſq; ſimul a b & m n. Et ipſa quidem f m maior ipſa m a, & ipſa f g ipſa a b maior, igitur media, quare & ſuperficies ſuperficie. Superficies igitur contenta ſub f m, m g, maior eſt ſuperficie contenta ſub m a, n b.

IN XXXVIII THEOREMA.

SVperficies igitur figuræ k f l maior eſt circulo, & cætera quæ ſequũtur, obſcure uidetur collegiſſe quod dictum eſt. Dicatur autem apertè hoc modo. Quoniam circulus n eſt æqualis ſuperficiei figuræ. quæ autem ex centro ipſius n, poteſt contentum ſub m h, f g: contentum autem ſub m h, f g maius eſt cõtento ſub c d, d x. nam m h oſtenſa eſt æqualis ipſi c d, & ipſa f g maior d x. Igitur circulus n maior eſt circulo cuius quæ ex centro poteſt contentum ſub c d, d x. contentum autem ſub c d, d x, æquatur quadrato d a. Igitur circulus n, hoc eſt ſuperficies circumſcripti, maior eſt circulo cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi d a.

IN XXXIX THEOREMA.

VErum ſpacia prædicta ſunt ad inuicem, ſicut quadratum lateris e k, ad quadratum lateris a l. Si enim iungatur d l k, cum e k ſit ęquediſtans ipſi a l, erit ſicut e d ad d a, ita e k ad a l. Sicut autem e d ad d a, ſic e f ad a c. igitur ſicut e k ad

a l, ita e f ad a c, & dimidia ipſius e f ad dimidiam ipſius a c. Similiter & in omnib. iungentibus angulos polygonorum oſtendetur, quod eandem inter ſe habeant proportionem, quam e k ad a l. Igitur ſicut unum ad unum, ſic omnia ad omnia. quare ſicut e k ad a l, ſic omnis iungentes angulos polygoni circumſcripti, cum dimidia baſe portionis maioris, ad omnes iungentes, cum dimidia baſe minoris portionis. quare ſicut quadratum e k, ad quadratum a l, ſic contentum ſub e k, & omnibus, ad contentum ſub a l, & omnibus. Figuræ enim rectilineæ ſimiles ſunt dupla laterum ſimilium proportione, & proportionis e k ad a l dupla eſt quadrati e k ad quadratum a l proportio. Cōiungentium autem angulos maioris, ad cōiungentes angulos minoris dupla eſt ea quæ contenti ſub e k, & omnibus, ad cōtentum ſub a l, & omnibus. Similia enim & ipſa, cum habeant latera proportionalia. Et eſt ſicut e k, ad eam quæ ex centro minoris ſphæræ, ſic a l ad ductam à centro ad a l perpendicularem. Si enim à centro ad contactum iungatur, recta erit ducta perpendicularis ad utraſque e k, a l. & eſt ſicut e d ad d a, hoc eſt e k ad a l: ſic quæ ex centro ad contactum ducta, hoc eſt quæ ex centro minoris ſphæræ, ad eam quæ ex centro ad a l ducta eſt perpendicularis.

Oſtenſum eſt autem, ſicut e k ad a l, ſic quæ ex centro circuli m, ad eam quę ex centro circuli n. Quoniam oſtenſum eſt, ſicut polygonium ad polygonium, ſic circulus m ad circulum n: hoc eſt quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratū eius quæ ex centro n.

IN XL THEOREMA.

VTraq; enim proportio dupla eſt eius quam habet latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Oſtenſum eſt enim in hoc, quod eſt ſicut quæ ex centro circuli æqualis ſuperficiei circumſcripti, ad eam quæ ex centro circuli æqualis ſuperficiei inſcripti: ſic latus circumſcripti polygoni, ad latus inſcripti. Circuli autem inter ſe ſunt in dupla proportione ſuarum ſemidiametrorum. Superficies igitur ad ſuperficiem, duplam habet proportionem eam, quā habet latus ad latus.

IN XLII THEOREMA.

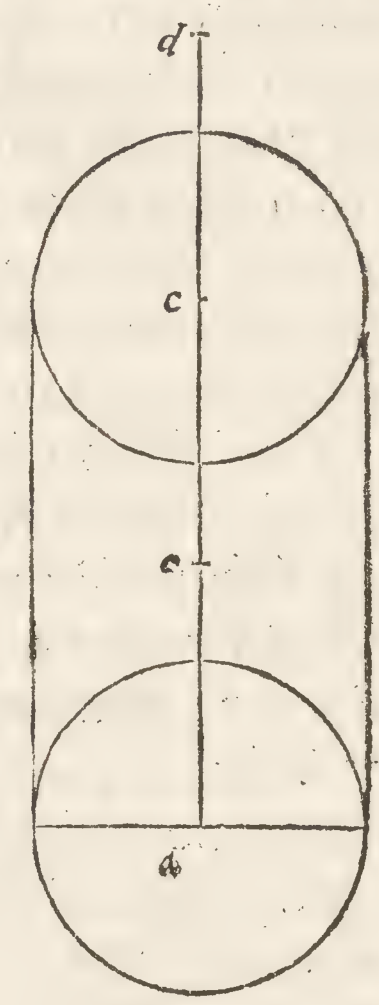
SOlidum igitur circumſcriptum, ad inſcriptū, minorem habet proportionē, quàm ſolidum fruſtum ad conum h. Si enim circumſcriptum ſolidum ad inſcriptum minorem habet, quàm triplicatam proportionē, eam quam habet b ad f, & ipſa d habet ad e minorem, quam eam triplicatam. circumſcriptum igitur habet ad inſcriptum minorem proportionem, quàm d ad e, & d habet ad e minorem proportionem, quàm fruſtum ad conum. Circumſcriptum ergo ad inſcriptum, minorem habet quàm fruſtum ad conum.

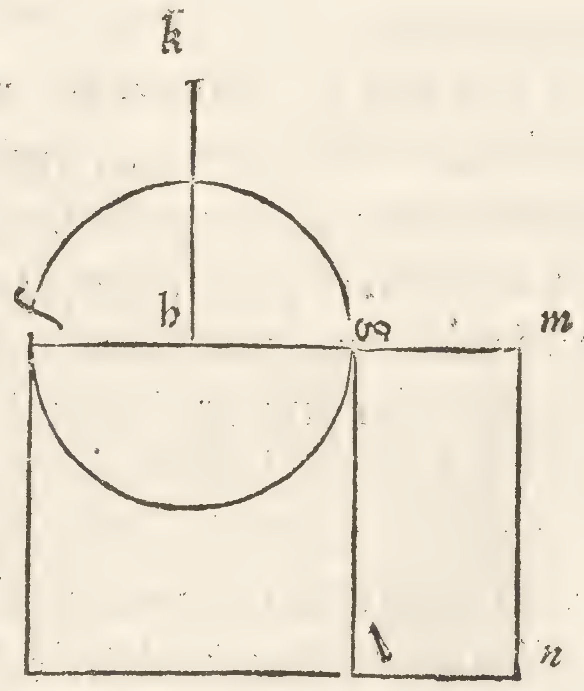
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM, in primum traditionis Archimedis de Sphæra & cylindro, aſſcriptum Mileſio mechanico Iſidoro præceptori noſtro, finit.

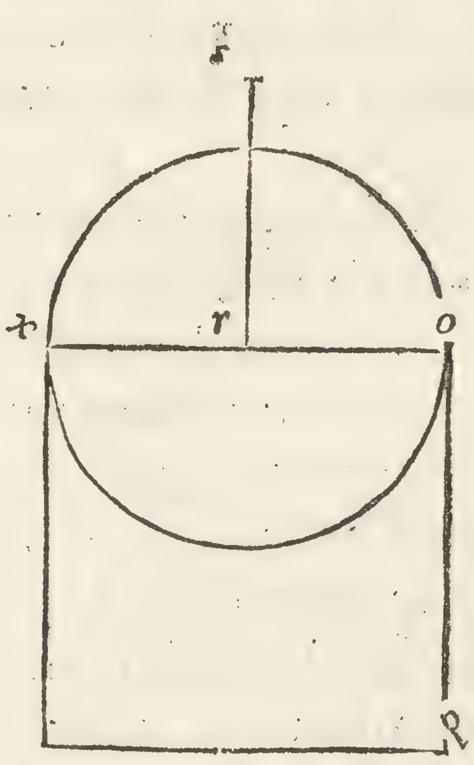
EVTO-

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM IN SECVNDVM *de Sphæra & cylindro.*

QVVM ea quæ in primo libro continentur Theoremata, ſatis ſint à nobis explicata: conſequens inde accedit, ut eodem modo his quę in ſecundo libro theoremata habentur explicandis, ſtudium adhibeamus. Dicit in primo Theoremate: Sumatur dato cono, uel cylindro, ſeſquialter cylindrus. Hoc autem dupliciter fieri poteſt, aut ſeruata in ambobus baſe eadem, aut altitudine. Et ut apertius fiat quod dictũ eſt, intelligatur conus, aut cylindrus, cuius baſis ſit circulus a, altitudo autẽ a c, & ſit inuenire eius ſeſquialterum cylindrum. Supponatur autem prius cylindrus a c, & educatur à c altitudo cylindri, & ponatur c d dimidia ipſius a c. igitur a d erit ſeſquialtera ipſius a c. Si iam intelligamus cylindrum habentẽ baſem circulum a, altitudinem uero rectam a d, ipſe erit ſeſquialter cylindri a c propoſiti. nam coni & cylindri in eadem baſe conſtituti, habent ſe ad inuicem, ſicut eorum altitudines. Si autem conus ſit a c, diuiſa a c in duo æqua puncto e: ſi rurſus intelligatur cylindrus, qui baſem habeat circulum a, altitudinem autem a e, erit ſeſquialter coni a c. Cylindrus enim qui baſim habeat circulum a, & altitudinem a c rectam, triplus eſt coni a c, & duplus cylindri a e. quare conſtat cylindrum a e ſeſquialterum eſſe coni a c: cuius eadẽ baſe ſaluata, & in propoſito & in ſumpto efficietur problema. Licet autẽ idem fieri, & ſi baſim contigerit diuerſam eſſe, axe manente eodem. Eſto enim rurſus conus, aut cylindrus, cuius baſis circulus f g, altitudo h k recta, cuius opus eſt inuenire cylindrũ ſeſquialterũ, qui habeat altitudinẽ æqualem ipſi h k. Deſcribatur quadratũ f l ab f g diametro circuli, & producta f g ponatur g m dimidia ipſius, & cõpleatur parallelogrãmũ f n. Erit igitur f n ſeſquialterum ipſi f l, & ipſa f m ipſi f g. Cõſtituatur enim parallelogrãmo f n, æquale quadratum x p: & circa diametrum, unum laterum eius x o deſcribatur circulus. Eſt itaq; x o ſeſquialter ipſi f g. nam circuli ſic ſe habẽt, ſicut quadrata ſuarum diametrorũ.

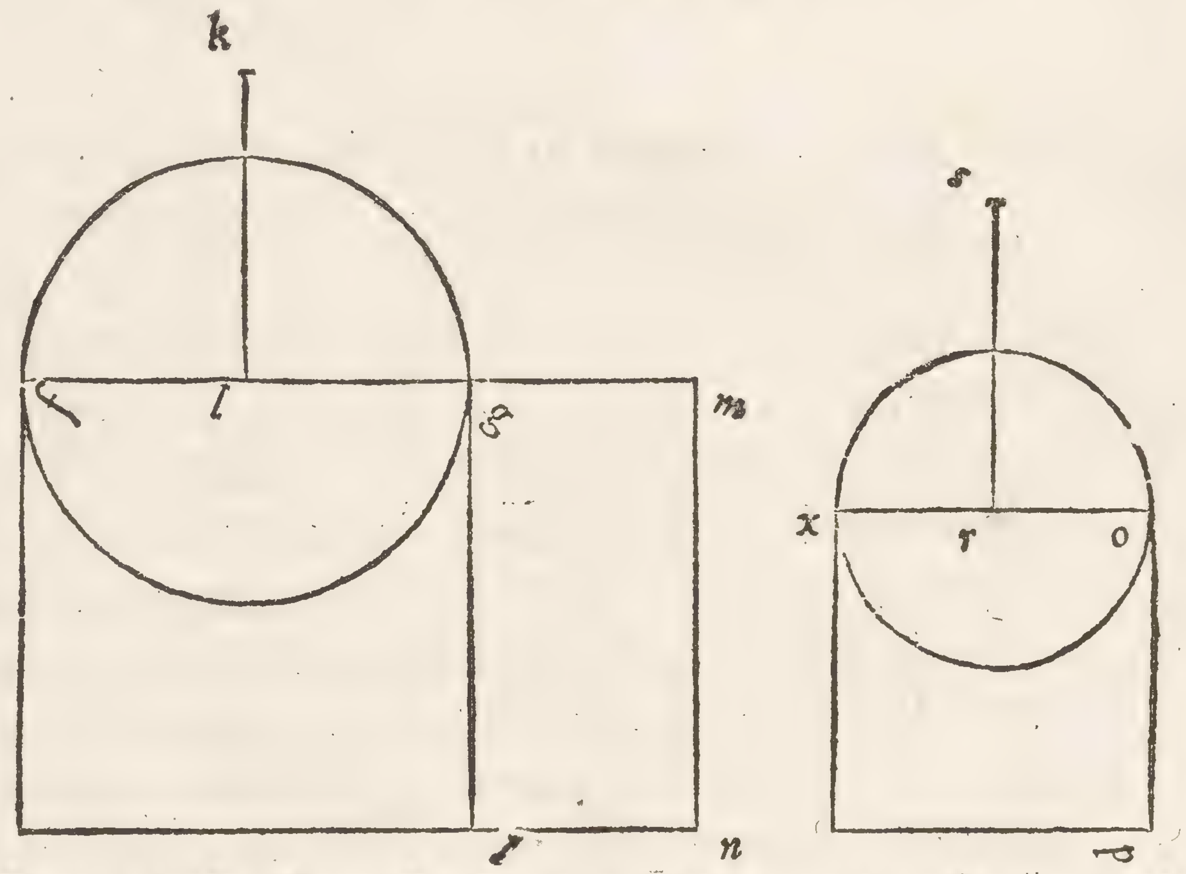


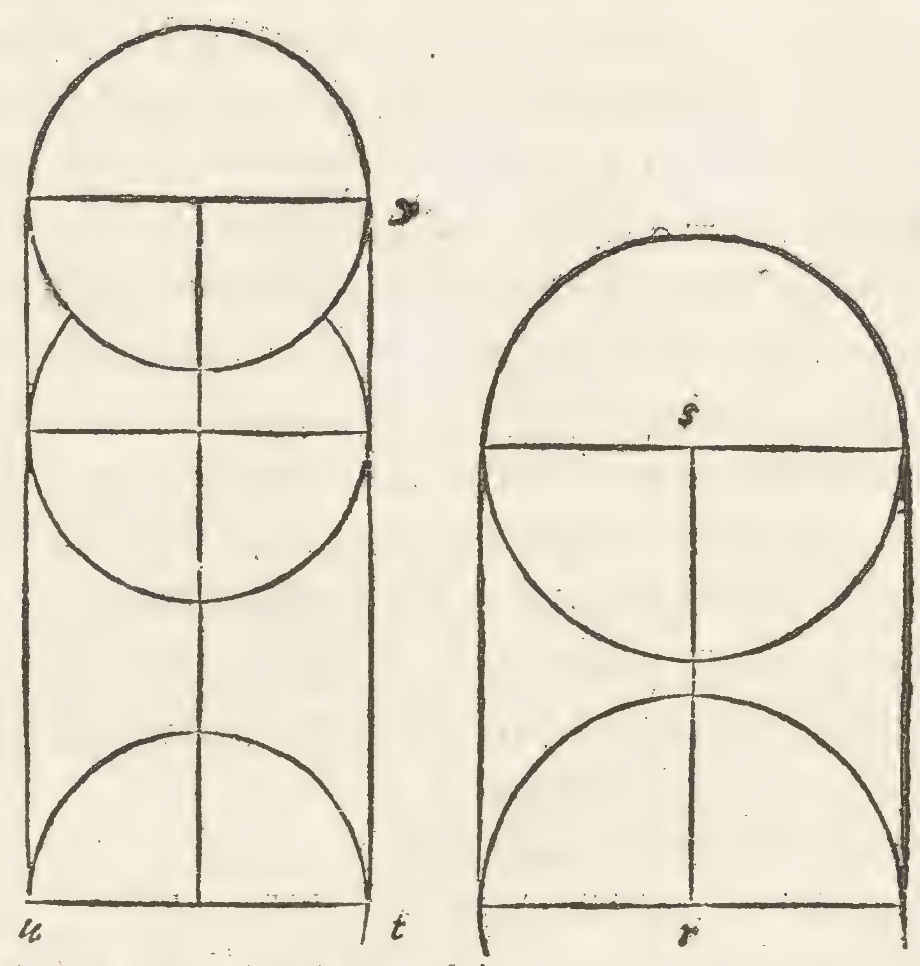




Item ſi intelligatur cylindrus, qui baſim habeat circulum x o, & altitudinem æqualem ipſi h k, erit ſeſquialter cylindri habentis baſim circulum f g, altitudinem uero h k. Si autem ſit conus, idem facientes, & conſtituentes quadratum x p, æquale tertiæ parti perallelogrãmi, & deſcribẽtes circa unũ latus eius x o circulum,

intellexerimus ex ipſo cylindrum habentem altitudinem h k: habebimus eum ſeſquialterum coni propoſiti. Quoniam enim parallelogrãmum f n eſt triplum quadrati x p, & ſeſquialterum ipſi f l, erit f l duplum ipſi x p. quare & circulus circulo duplus, & cylindrus cylindro. Verũ cylindrus habens baſem circulum f g, altitudinem uero h k, triplus eſt cono circa eãdem baſim & altitudinẽ cõſtituto. Quare cylindrus baſim habens circulum x o, altitudinem uero æqualem h k, ſeſquialter eſt propoſito cono. Si autem oporteat neq; baſem, neque altitudinem eſſe eandem, rurſus hoc dupliciter fiet. aut enim baſim habebit æqualem datæ, aut axem cylindrus propoſitus. Eſto prius baſis data circulus x o. Et opus eſto cylindrum inuenire ſeſquialterum dato cono, aut cylindro à baſe x o, id eſt qui baſim habeat x o. Sumatur ut prædictum eſt, cylindrus u y ſeſquialter cono, aut cylindro dato, eandem baſim habens cum propoſito: & fiat ſicut quadratũ x o ad quadratum t u, ſic altitudo u y ad ipſam r s. Erit igitur cylindrus ab x o baſe habẽs altitudinem r s, ęqualis u y. nã baſes ſe habent mutuò ut altitudines, & factũ erit imperatũ. Si autem baſis non ſit data, ſed axis, eadẽ ratio ne prolato u y, fiet id quod proponit.





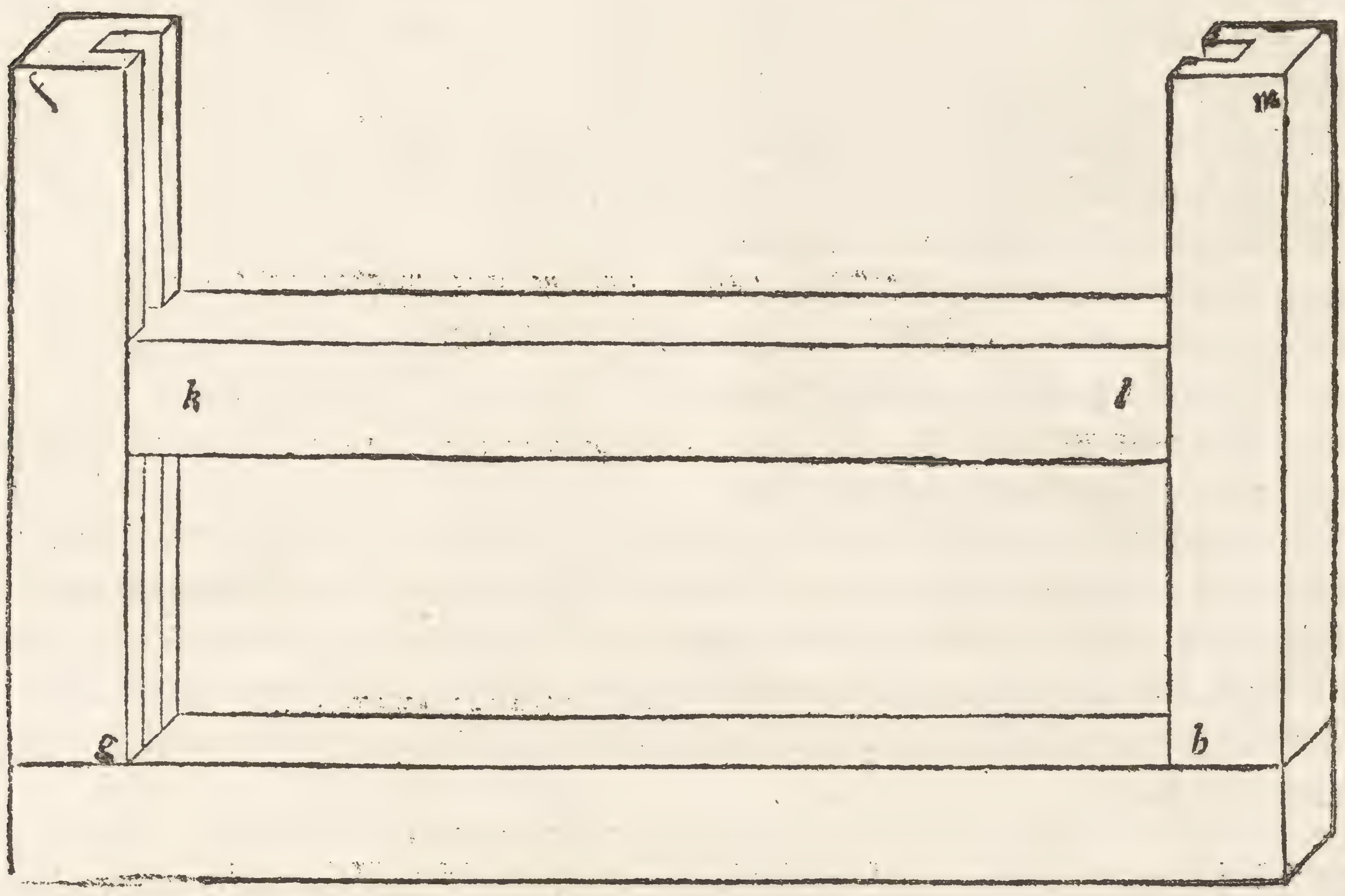
IN COMPOSITIONEM PRIMI.

HOc ſumpto, quoniam ad eius reſolutionem proueniũt ea quæ in problemate ſunt, reſolutiõe ad hoc terminata, ut oporteat duab. rectis datis duas eis medias proportionales inuenire. dixit in cõpoſitione, inueniãtur. Harum aũt inuentionem ab eo traditam nuſquã adhuc penitus inuenimus. multorum autem clarorum uirorum ſcripta in manus inciderunt, in quibus hoc problema tractatum inuenimus, ex quib. ſolam Eudoxi Cnidij deſcriptionẽ repudiauimus. Nam in procemijs quidem dixit ſe per lineas curuas eam inueniſſe. uerum in demonſtratione, præter id quod non curuis lineis utatur, uerum & diſiunctam proportionalitatem conſtituens, ea uti continua utitur, quod ſanè abſurdum eſt. Sed quid dico de Eudoxo, uerumetiam de quibuſdã qui mediocriter in Geometria uerſati ſunt. Vt autem eorum quæ ad nos peruenerunt hominum ſententiæ planè haberi poſſint, eorum uniuſcuiuſq; inueniendi modum iſtic deinceps deſcribemus.

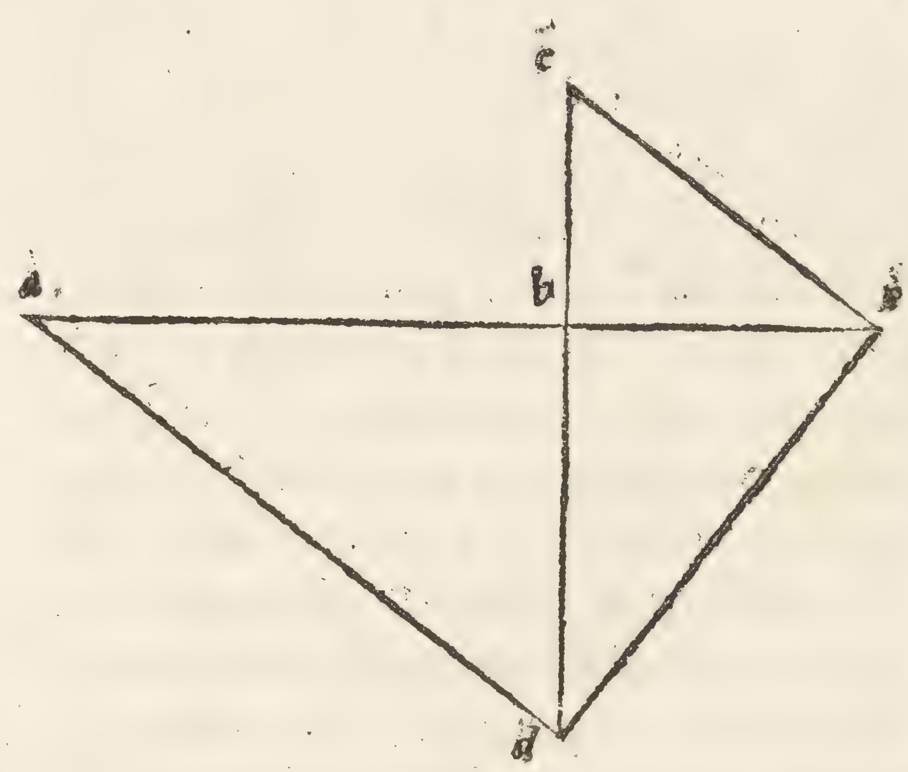
MODVS PLATONIS.

DVabus rectis datis, duas rectas medias illis proportionales in continua proportionalitate inuenire. Sint duæ rectæ datæ a b, b c inuicem perpendiculares

res, quibus opus ſit duas medias proportionales inuenire. Producantur in directũ ad d, e: & paretur angulus rectus ſub f g h: & in uno eius crure, puta f g, moueatur regula k l, in quodam conſtituto in f g, ita ut permaneat æquediſtans



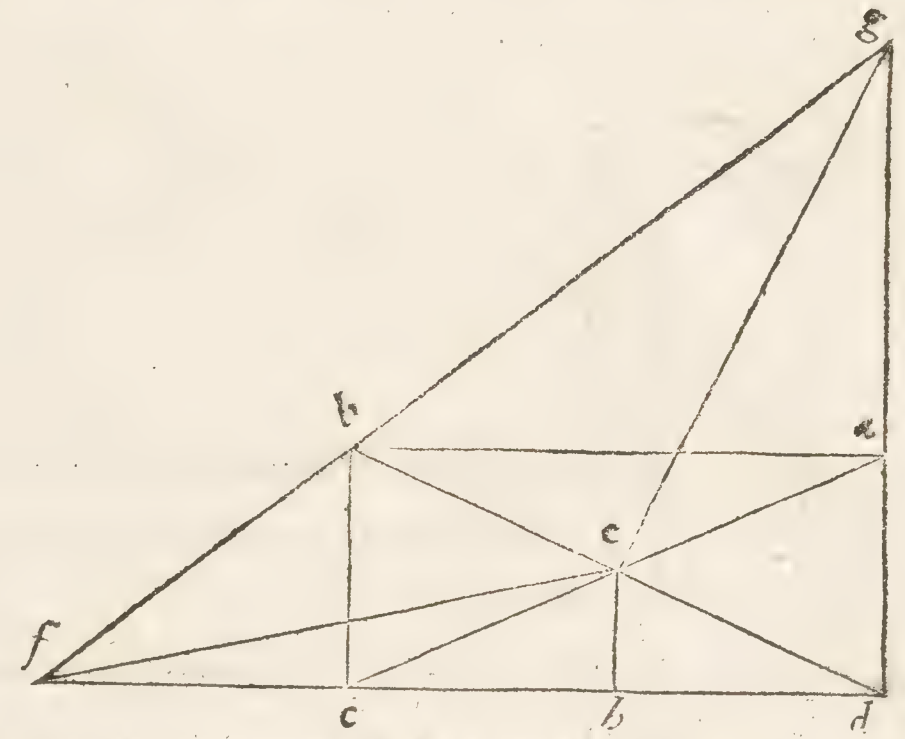
ipſi g h. Fiet autem hoc, ſi intelligamus alteram regulam confixam ipſi h g, æquediſtantem ipſi f g, puta in Superioribus enim ipſarum f g, h m, ſuperficiebus firmatis aſſialibus, & coaptatis ipſi k l, ad dictos erit tunc motus ipſius k, ſemper æquediſtãs ipſi g h. His ita paratis, applicetur unum crus anguli quodcunq;, puta g h, cõtingẽs c: & regula attingat a, ita uti in deſcriptione habetur. fiat angulus rectus, portionem habens, puta c d e, & regula k l poſitionem habeat, puta e a. nam his ita confectis, propoſitum effectum eſt. Cum enim anguli ad d e, ſint recti, erit ſicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a.



MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRO-
ductionibus, & in telis fabricandis.

SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus ſit duas medias proportionales cõſtituere. diſponantur ita, ut ambiant angulum rectum ad b, & compleatur b d parallelogrammũ, & iungantur a c, b d. conſtat eas æquales eſſe, & ſe mutuò per æqualia ſecare puncto e. nam circulus circa alteram earum deſcriptus, per terminos alterius tranſibit, cum perallelogrammũ ſit orthogoniũ. producantur hæ d c, d a uſque ad f g, & intelligatur regula, puta f b g, mota circa quendam clauum fixum in b: & moueatur, donec abſcidantur æquales ab e ductæ: hoc eſt e g, e f. & intel-

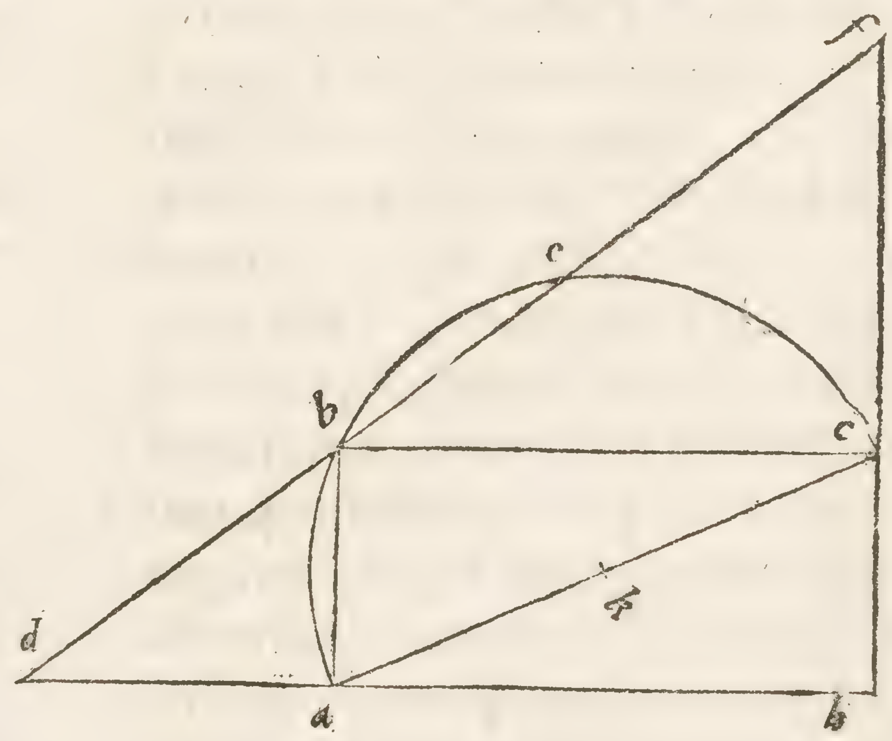
intelligatur ſectio poſitionem habere, puta f b g, factis e f, e g æqualibus, ut dictũ eſt. Ducatur ab e perpendicularis ad c d, puta e h, conſtat eam ſecare ipſam c d in duo æqua. quoniam itaq; c d, in duo æqua ſecatur puncto h, & additur ei c f, fit ut contentum ſub d f, c f, cum quadrato c h, æquetur quadrato h f, quadrato e h communi adiecto erit cõtentum ſub d f, f c: cum quadratis harũ c h, h e, æquale quadratis f h, h e. quadratis autem f h, h e æquatur quadratum f e. Igitur contentũ ſub d f, f c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e f. Similiter autem oſtendetur, quod cõtentum ſub d g, g a, cũ quadrato a e, æquat̃ quadrato e g, & a e eſt æqualis ipſi e c, & ipſa g e ipſi e f. Igitur contentum ſub



d f, f c, æquatur contento ſub d g, g a. Si aũt contentum ſub extremis fuerit æquale contento ſub medijs, erũt quatuor lineæ illæ proportionales. Eſt igitur ſicut f d ad d g, ita a g ad c f. Verum ſicut f d ad d g, ſic f c ad c b, & b a ad a g. nam in triangulo f d g ducta eſt c b, æquediſtans ipſi d g, item a b æquediſtans ipſi d f. Sicut ergo b a ad a g, ita a g ad c f, & c f ad c b. Igitur inter a b, b c ſunt factæ mediæ proportionales a g, c f.

MODVS PHILONIS BYSANTII.

Sint duæ rectæ datæ a b, b c, quibus opus ſit duas medias proportionales inuenire. Diſponantur ita ut ambiant angulum rectum ad b, & iuncta a c deſcribatur ſuper eam ſemicirculus a b e c: & ducatur a d ſecundum angulos rectos ad ipſam b a, & item c f ad ipſam b c. & applicetur regula mobilis ad b, ſecans a d, c f, & moueatur circa b, donec quæ ab ipſo b ad ipſum d ſit æqualis ei quæ ab e in f: hoc eſt, ei quæ eſt inter circumferentiam circuli, & ipſam c f. Intelligat̃ itaq; regula habere poſitionem, puta quam habet d b, e f, d b æquali ipſi e f, ut dictum eſt. Dico itaq;, a d, c f eſſe medias proportionales inter a b, b c. Intelligantur enim d a, f c protractæ & concurrentes in h. Conſtat itaq;, cum b a, f h ſint ęquediſtãtes, quod angulus ad h eſt rectus, & circulus a e c perfectus tranſibit per h. Quoniam igitur d b eſt æqualis ipſi e f, igitur contentum ſub

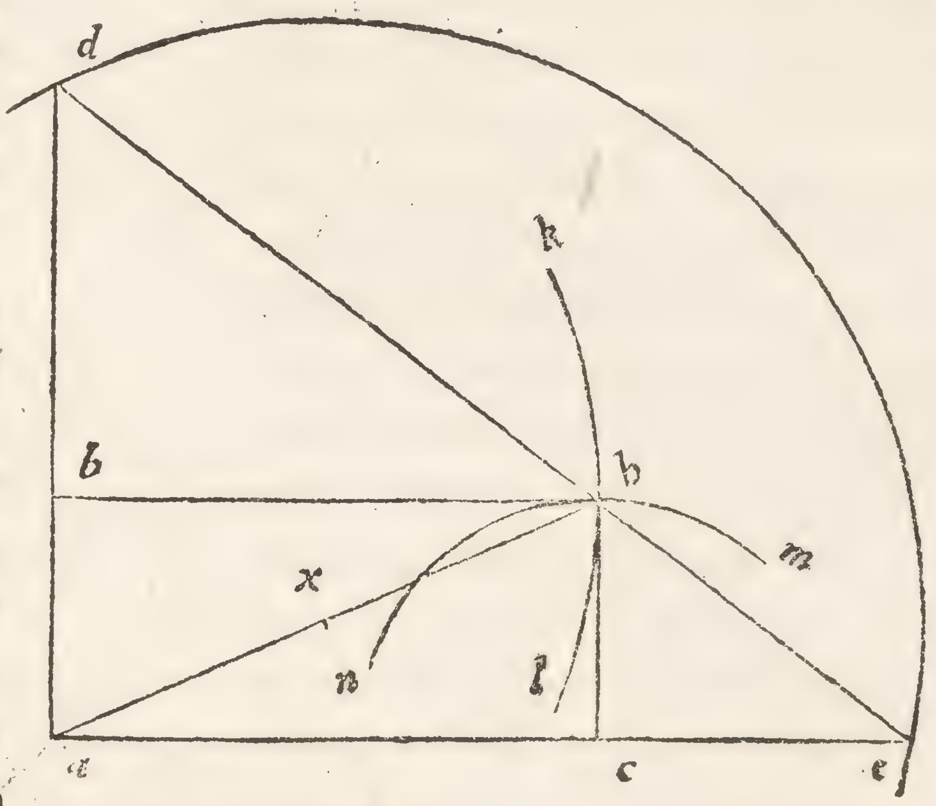


e d, d b eſt æquale contento ſub b f, f e. Verum contentum ſub e d, d b æquatur contento ſub h d, d a. nam utrũq; eſt æquale quadrato cõtingentis à puncto d ductæ. Contentum autem ſub b f, f e, æquatur contento ſub h f, f c. nam utrumque ſimiliter æquatur quadrato contingentis ductæ à puncto f. quare contentum ſub h d, d a, æquatur contento ſub h f, f c. Idcirco ſicut d h ad h f, ſic c f ad d a. Verum ſicut h d ad h f, ſic b c ad c f, & d a ad a b. nam in triangulo d h f, ducta eſt b c ęquediſtans ipſi d h, item b a æquediſtans ipſi f h. Eſt igitur ſicut b c ad c f, ita c f ad d a, & d a ad a b: quod erat propoſitum. Sciendũ eſt autem, quod huiuſmodi apparatus eſt idem ferè cum illo ſuperiori Heronis. nam parallelogramum b h, idem cũ eo quod ſumptum fuit in apparatu Heronis, & latera producta h a, h c eadem, & regu-

regula mota ad b. Hoc ſolum differunt, quod in illo quidem mouebatur regula donec ductæ à ſectione ipſius a c, per æqualia, puta ab ipſo k ſepararentur æquales coincidentes ad h d, h f, puta k d, k f. In hac uero mouetur, donec d b ſit æqualis e f. in utraq; autem figuratione idem ſequitur. Quod autem nunc dictum eſt, facilius in uſu ponitur. nam ipſę d b, e f ſeruabũtur æquales, diuiſa d f regula per æqualia & continua. hoc autem multo facilius eſt, quàm circino tentare eas quæ ab ipſo k ad d & f ductæ fuerint, æquales facere.

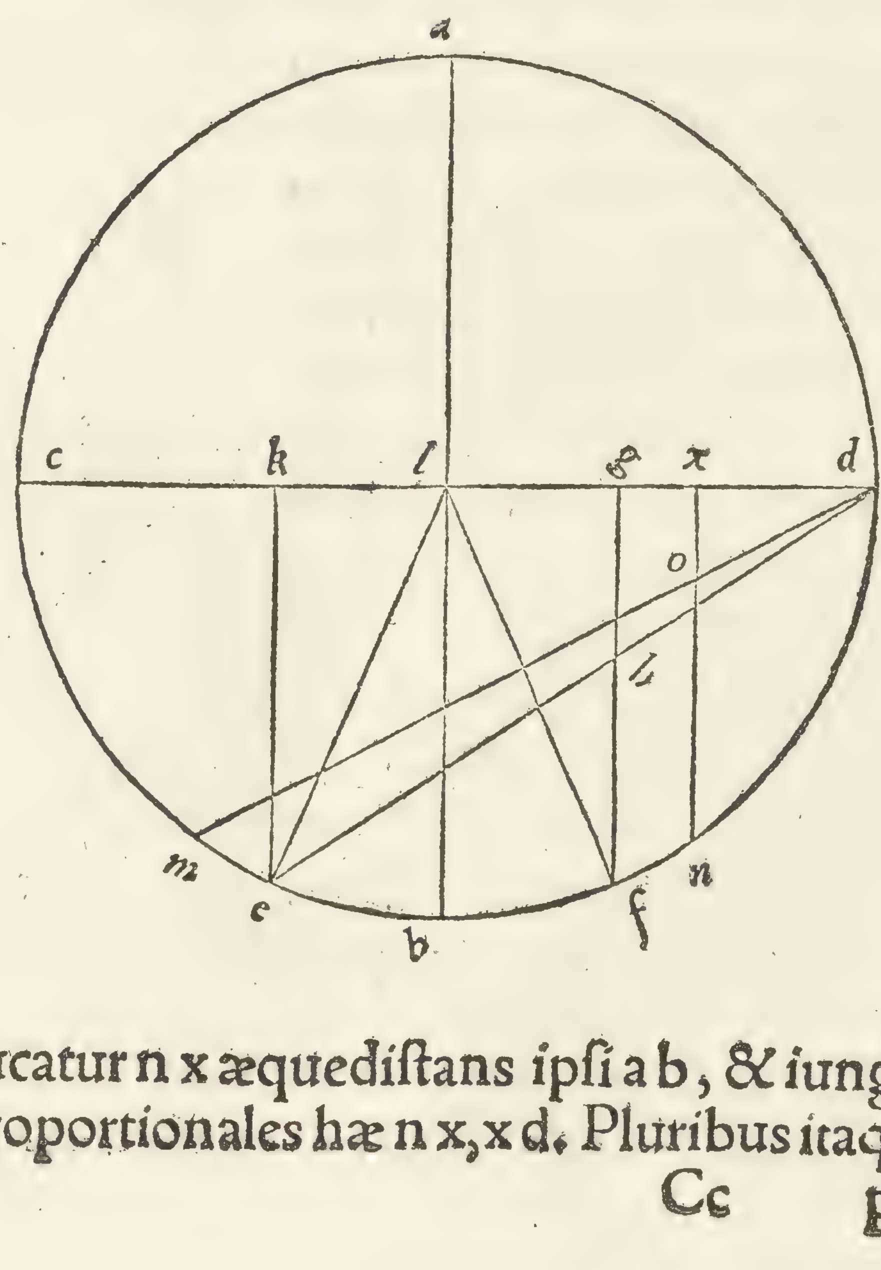
MODVS APOLLONII.

SInt duæ rectæ, quæ a b, a c: quib. opus ſit duas medias proportionales inuenire, quæ ita aptentur, ut ambiāt angulum rectũ ad a. & centro b, interuallo a c deſcribatur circumferētia circuli k h l. item centro c, interuallo a b, deſcribatur circumferentia circuli m h n, quæ ſecet ipſam k h l in puncto h. & iungātur h a, h b, h c. Igiť b a c h eſt parallelogrãmũ, cuius eſt h a diametros. diuidatur h a, in duo æqua puncto x, & centro x deſcribatur circulus ſecans ipſas a b, a c, productas in punctis d e: ita ut puncta d e ſint in eadem linea recta cum ipſo h. quod utiq; fiet, cum regula mota circa h, & ſecāte ipſas a d, a e, & diducta, donec ductæ à puncto x ad puncta d e ſint æquales. Hoc enim facto habebimus quæſitum. Ita utique figuratio eadem eſt cum illa Heronis & Philonis, & conſtat eandem demonſtrationem adhiberi.

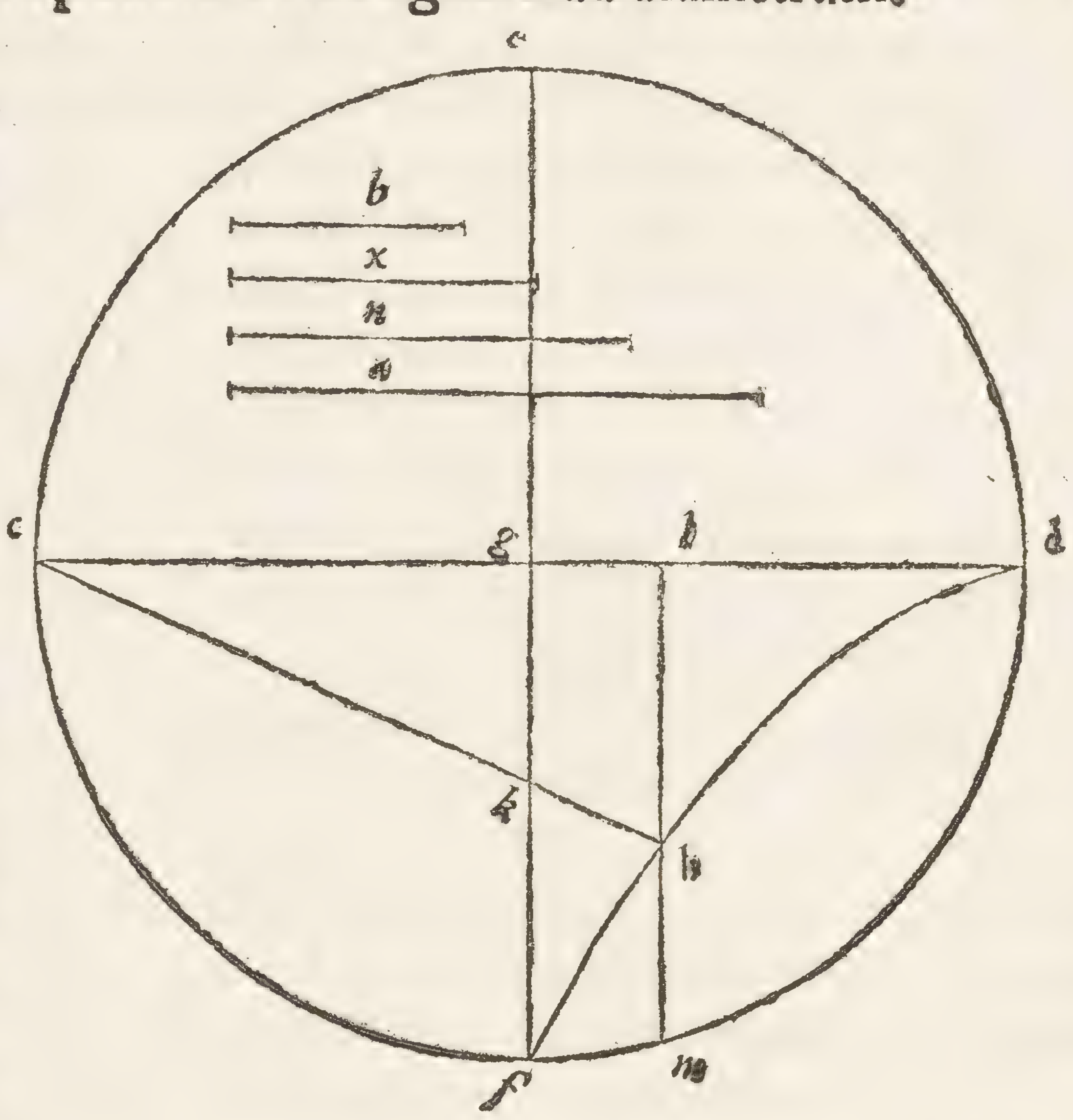


MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIrijs *pulcherrimus.*

IN circulo ducantur duæ diametri ad angulos rectos a b, c d, & ſeparentur duæ circumferentiæ æquales utrinq; ad b, hæ e b, b f. & per f ducatur æquediſtās ipſi a b, quæ ſit f g, & iungatur d e. Dico quod inter c g, g h ſint duæ mediæ proportionales hæ f g, g d. Ducatur enim per e linea e k, æquediſtans ipſi a b. igitur e k æqualis eſt ipſi f g, & k c ipſi g d. Hoc autem conſtat, ductis à puncto l rectis ad e f. nã anguli c l e, f l d ſunt ęquales. & recti ad k, g. igitur omnia omnibus, propterea quod l e æquatur ipſi l f. igitur reliqua c k eſt ęqualis ipſi g d. Quoniam igitur eſt ſicut d k ad k e, ſic d g ad g h. item ſicut d k ad k e, ita e k ad k c. nã e k eſt media proportionalis harum d k, k c. Sicut ergo d k ad k e, ita e k ad k c: & ſic d g ad g h. & d k eſt æqualis ipſi c g, & ipſa e k ipſi f g, ipſa k c ipſi g d. Igitur ſicut c g ad g f, ita g f ad g d, & d g ad g h. Si item utrinq; ex b ſumantur æquales circumferentiæ hæ m b, b n, & per n ducatur n x æquediſtans ipſi a b, & iungatur d m, erũt rurſus inter c x, x o mediæ proportionales hæ n x, x d. Pluribus itaq; hoc

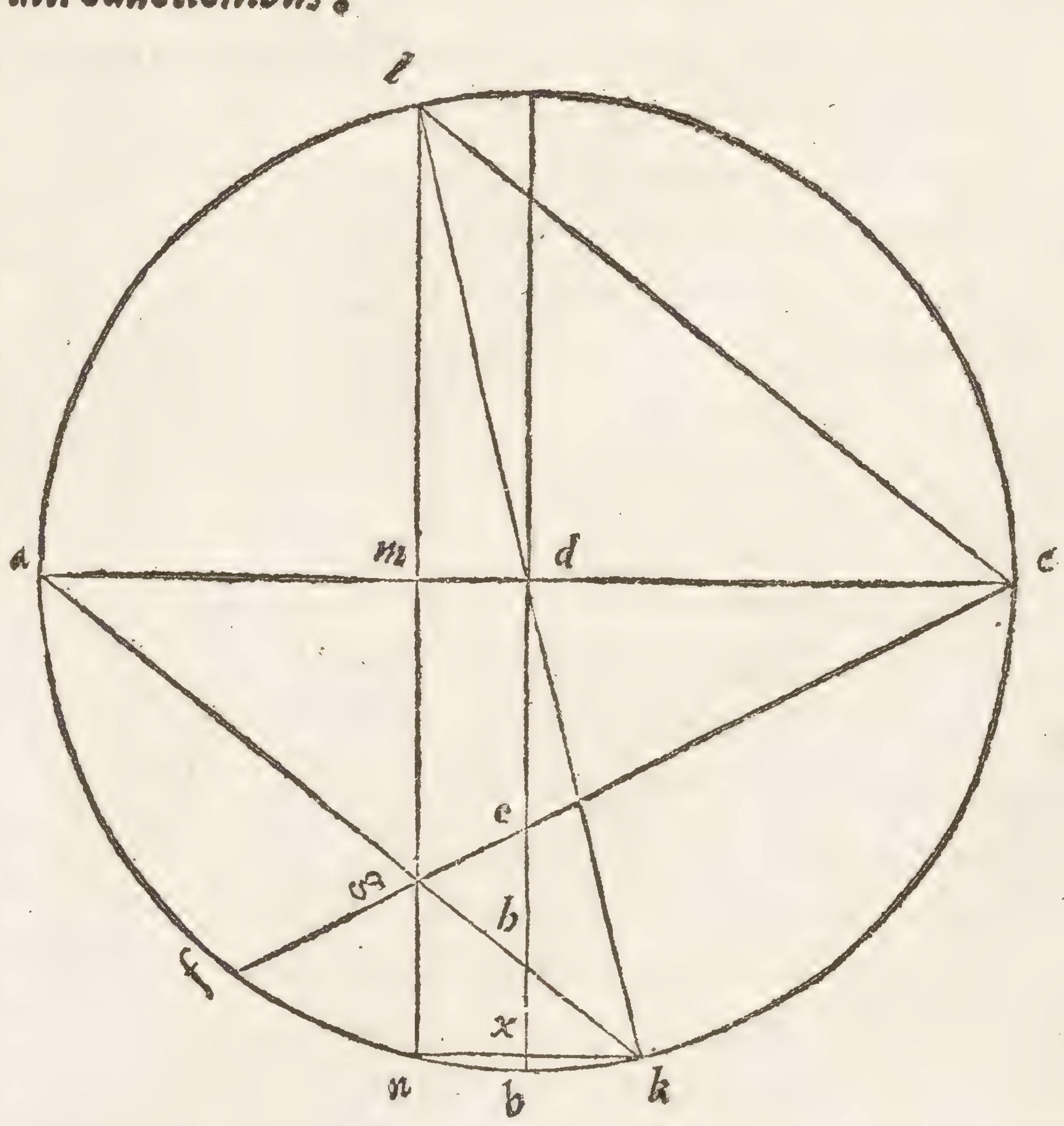


pacto æquediſtantibus continuis, productis inter b d, & circumferentijs depræhenſis ab illis uerſus b, ponendo alias æquales uerſus c, & ad puncta facta iungendo rectas lineas à puncto d, ita ut ſimiliter fiant ipſis d e, d m: diuidentur parallelæ quæ ſunt inter b d ſecundum quædam puncta, in propoſita deſcriptione, puncta o h: quibus regula applicata iungentes rectas, habebimus quandam lineam in circulo deſcriptam. in qua ſi ſumatur quodcunq; punctum, & per ipſum ducatur ęquediſtans ipſi l b, erunt ipſa ducta, & illa quæ abſcinditur ab illa, ex diametro uerſus d, mediæ proportionales, inter lineam ab eadem ex diametro uerſus c abſciſam, & partem eius contentam à puncto in illa ſignato ad diametrum.



Iſtis ita conſtitutis, ſint duæ rectæ a, b, quibus opus ſit duas medias proportionales inuenire: & ſit circulus, in quo duę diametri ſe ſecent ad angulos rectos c d, e f. & deſcribatur in ipſo d h f linea, per puncta continua, uti prædictum eſt, & fiat ſicut a ad b, ita c g ad g k: & iũcta c k, & producta diuidat lineam puncto h, & per h ducatur l m, æquediſtans ipſi e f. per præſcripta igitur inter c l, l h medię ſunt proportiõales hæ m l, l d. Et quoniam eſt ſicut c l ad l h, ita c g ad g k. Sicut autem c g ad g k, ita a ad b. Si autem in eadem proportione ipſarum c l, l m, l d, l h cõſtituamus inter a b, puta iſtas n, x, illæ ſumptæ erunt inter a b mediæ proportionales: quod erat inueniendum.

MODVS PAPPI IN MECHANICIS *introductionibus*.



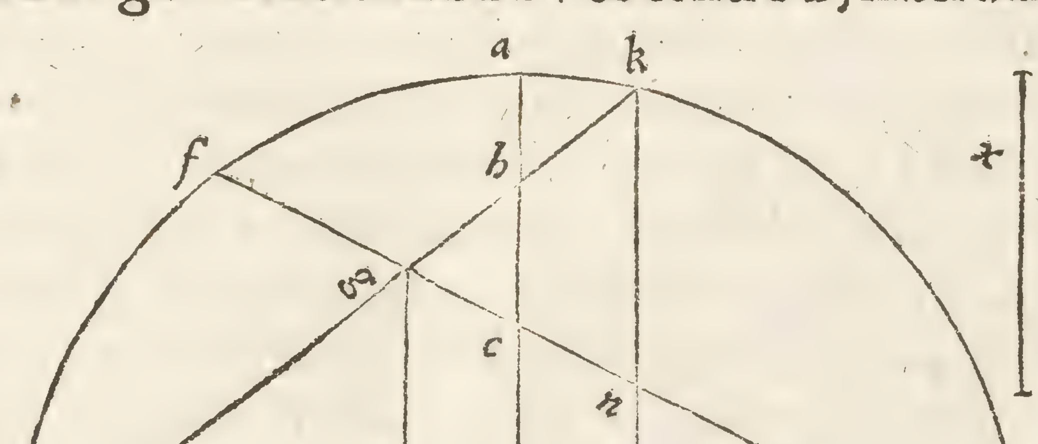
PRopoſuit Pappus inuenire cubũ, qui haberet ad cubum datum proportionem datã: & ſi quæ ad huiuſmodi proportionem demonſtrandam requiruntur, inuenerimus, cõſtat nos inueniſſe propoſitũ. Duabus enim rectis datis, ſi ex illis duabus, quæ debent eſſe mediæ proportionales, ſecundam inuenerimus, tertiam quoq; deinde facile deprehendemus. Deſcribatur itaque, uti dicit ipſe, ſemicirculus a b c, & à centro d ducatur d b ad angulos rectos, & moueatur regula circa a punctum, ita ut unus terminus eius quodam clauulo circumponatur pũcto a. Eſto reliqua pars eius uti circa centrũ, circa clauulum moueatur inter b c. His conſtitutis, proponatur duos

cubos

cubos inuenire, habentes inter ſe datam proportionem, & fiat proportio b d ad d e, qualis eſt proportio data & iuncta c e. producatur ad f. adducat̃ iam regula inter b c, donec pars eius intercepta inter rectas f e, e b, æqualis ſit rectę quæ eſt inter rectam b e, & circumferentiam b k c. Hoc enim tentantes, & regulam dimouentes, facile aſſequemur. Fiat iam, et poſitionẽ habeat, puta a k, ita ut g h, & h k ęquales ſint. Dico quod cubus ab ipſa b d, ad cubum ab ipſa d h, proportionem habet propoſitam: hoc eſt eam quæ b d ad d e. Intelligatur circulus perfectus, & iuncta k d protendatur ad l, & iungatur l g, cui eſt æquediſtans ipſa b d, quia k h eſt æqualis ipſi g h, & ipſa k d ipſi d l. iungatur ipſa a l, & l c. Quoniam enim angulus a l c eſt rectus, quia eſt in ſemirculo, & l m eſt perpendicularis, erit igitur ſicut quadratum l m ad quadratum m a, hoc eſt c m ad m a, ſic quadratum a m ad quadratum m g. Proportione igitur ipſius a m ad m g poſita cõmuni, erit proportio cõpoſita ex proportione c m ad m a, & ex proportione a m ad m g: hoc eſt proportio c m ad m g, eadem eſt compoſitæ ex proportione quadrati a m ad quadratum m g, & ex proportione a m ad m g, quæ eſt eadem ei quam habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Igitur proportio c m ad m g eadem eſt ei, quã habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Verum ſicut c m ad m g, ſic c d ad d e. ſicut autem a m ad m g, ita a d ad d h. igitur ſicut b d ad d e, hoc eſt ſicut data proportio, ita cubus ex b d ad cubum ex d h. Earum igitur quas opus erat medias proportionales inuenire, ſecunda fuit d h. & ſi fecerimus ſicut b d ad d h, ita d h ad aliam quandam, erit tertia inuenta. Eſt autem aduertẽdum, quod hæc deſcriptio eadem eſt ei quam Diocles ſuprà tradidit: hoc ſolum differens ab ea, quod ille ſolum lineam quãdam per continua puncta deſcribit intermedia ipſi a b, in qua ſumebat g producta c e, & diuidente dictam lineam. In hoc autem datur g, per regulam a k, motam circa a. quod enim g ſit idem, ſiue ſumatur ut hic per regulam motam, ſiue ſicut Diocles, ita diſcemus: producta m g ad n, iũgatur k n. Quoniam igitur k h eſt æqualis ipſi h g, & g n eſt æquediſtans ipſi h b, & k x æqualis eſt ipſi x n, & ipſa x b communis eſt & ad angulos rectos. nam k n in duo æqua diuiditur, & ad angulos rectos ab ea quæ per centrum. Igitur baſis æqualis baſi: idcirco & circumferentia k b, ipſi b n. Igitur g eſt id quod eſt in linea Dioclis, & demonſtratio eadem. Dixit enim Diocles, quod ſicut c m ad m n, ita m n ad m a, & m a ad m g. Eſt autem m n æqualis ipſi m l. nam diametros ſecat eam ad angulos rectos. Eſt igitur ſicut c m ad m l, ſic l m ad m a, & m a ad m g. Igitur harũ c m, m g, mediæ proportionales ſunt l m, m a. Verum ſicut c m ad m g, ita c d ad d e: ſicut autẽ c m ad m l, ita a m ad m g: hoc eſt c d ad d h. & duarum mediarum, harum c d, d e ſecunda eſt d h, quàm Pappus efficiebat.

MODVS SPORI.

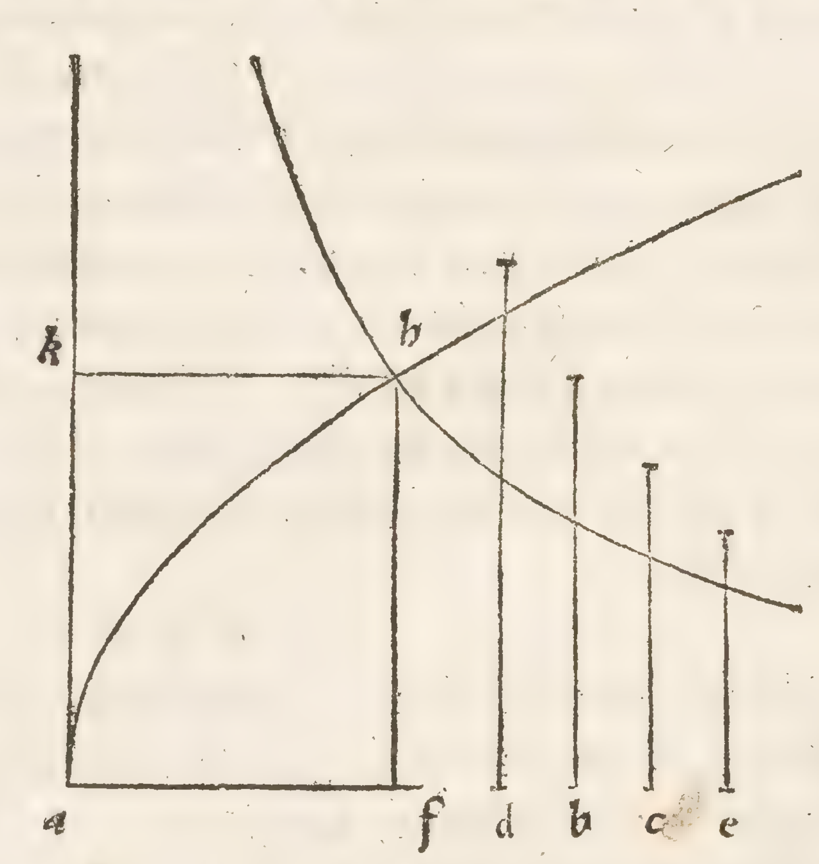
SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus eſt duas medias proportionales inuenire. Ducatur ex b ipſa d b e, ad angulos rectos ad a b: & centro b, interuallo autem b a deſcribatur ſemicirculus d a e: & ab e ad c iũgatur recta, & ducatur ad f: & ducatur ab ipſo d recta quædam ita, ut g h ſit æqualis ipſi h k. Hoc enim fieri poteſt, & ducantur à punctis g, k, perpendiculares ad d e, iſtæ g l, k m. quoniã igit̃ eſt ſicut k h ad h g, ita m b ad b l, & ipſa k h eſt æqualis ipſi h g, igit̃ ipſa m b eſt æqualis ipſi b l: quare & reliqua m e ipſi l d. Tota ergo d m, eſt



æqualis ipſi l e. et propter hoc ſicut m d ad d l, ita l e ad m e. Verum ſicut m d ad d l, ita k m ad g l. Sicut autem l e ad m e, ita g l ad m n. Rurſus quoniam ſicut d m ad m k, ita k m ad m e. Igitur ſicut d m ad m e, ita quadratum d b, hoc eſt quadratum a b ad quadratum h b. nam d b eſt æqualis ipſi a b. Rurſus quoniam ſicut m d ad d b, ita l e ad e b. item ſicut m d ad d b, ita k m ad h b. Sicut autem l e ad e b, ita g l ad c b. Igit̃ ſicut k m ad h b, ita g l ad c b. & permutatim, ſicut k m ad g l, ita h b ad c b. Verum ſicut k m ad g l, ita m d ad d l, hoc eſt d m ad m e: hoc eſt, quadratum a b ad quadratum h b. Igitur ſicut quadratum a b ad quadratum h b, ita b h ad b c. Sumatur harum h b, b c media proportionalis hæc, x. Quoniam igitur ſicut quadratum a b ad quadratum b h, ita h b ad b c. Verum quadratum a b ad quadratum h b, habet proportionem a b ad b h duplicatam, & h b ad b c. habet proportionẽ h b ad x duplicatam. Igitur ſicut a b ad b h, ita b h ad x. Verum ſicut a b ad x, ita x ad b c. Igitur a b ad b h, ſicut b h ad ad x, & x ad b c. Cõſtat autem, quod hæc quoque eadem eſt illi quæ à Diocle dicta fuit, & Pappo.

MODVS MENECHMI.

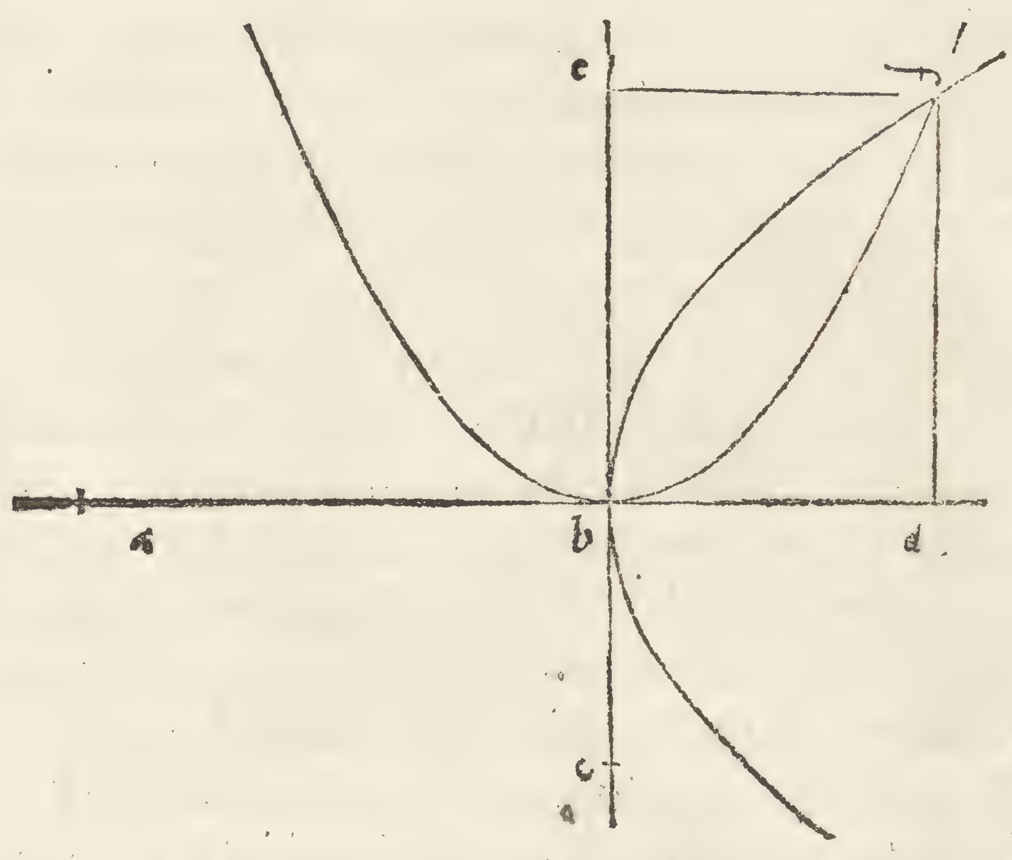
SInt duæ lineæ rectæ datæ a e, quibus iubemur duas medias proportionales inuenire. Eſto hoc factum, & ſint illæ b c. & ponatur recta poſitione hæc d g terminata ad d. & uerſus d ſumatur d f, æqualis ipſi c: & ducatur ad angulos rectos h f, quæ ponatur æqualis ipſi b. Quoniã igitur tres lineæ a b c rectæ ſunt proportionales, contentũ ſub a c æquatur quadrato b. Contentũ igitur d data, & c, hoc eſt a f, æquat̃ quadrato b, hoc eſt quadrato f h. quoniã rectãguli coni, in parabole. igitur punctum h, per punctum a d, ſecundum primam deſcripta ducãtur æquediſtantes h k, a k. & quoniam contentum ſub b c eſt datum, cum ſit æquale contento ſub d e: contentum igitur ſub k h, h f datum, quoniam hyperbole, igitur ipſum h in non coincidentibus cum his k a, a f. igitur h datum: quare & f datum. Componetur autem ſic. Sint duæ rectæ datæ hæ d e, & poſitione ipſa a g terminata ad a, & deſcribatur per a ſectio rectanguli coni, cuius axis eſt a g, & rectũ ſpecie latus d. quæ autem ductæ ſint ad ipſam a g ad angulos rectos poſſint ſpacia ipſi d, appoſita latitudinẽ habẽtia abſciſas ab eis uerſus punctum a, deſcribatur & eſto a h, et erecta a k. & in non coincidẽtibus cum his k a, a f, deſcribatur ſectio obtuſianguli coni: à qua ductę ęquediſtãtes ipſis k a, a f, facient ſpaciũ ęquale ſpacio cõtẽto ſub d e. Scindet aũt ſectionem rectanguli coni. diuidat eam in puncto h, & ducãtur h k, h f perpendiculares. Quoniam igitur quadratum f h æquatur contento ſub d a, a f, erit ſicut d ad f h, ita f a ad e. Verum ſicut d ad f h, ita f h ad f a, & f a ad e. Ponatur itaq; g b æqualis ipſi f h, & c æqualis ipſi a f. erit igitur ſicut d ad b, ita b ad c, & c ad e. igitur d b c e ſunt continuę proportionales, quod erat inueniendũ. Aliter idem.



Sint duæ rectæ datæ ambientes angulum rectum a b, b c: & fiant earũ mediæ proportionales d b, b e, ita ut quæ c b ad b d, ea ſit b d ad b e, & b e ad b a: & ducantur ad angulos rectos d f, e f. Quoniam igitur eſt ſicut c b ad d b, ita b d ad b e. Contentum igitur ſub c b b e, hoc eſt cõtentum ſub data, & b e, æquatur quadrato b d: hoc eſt ipſius e f. Quoniam igitur contentum ſub data, & b e, æquatur quadrato e f, igitur f applicatur ſectioni rectanguli coni circa axem b e conſtitutæ. Rurſus, quoniam ſicut a b ad b e, ita b e ad b d, contentum igitur ſub a b, b d, hoc eſt

ſub da-

ſub data, & b d æquat̃ quadrato e b, hoc eſt ipſius e f. Igit̃ f applicat̃ ſectioni rectã-guli coni circa axem b d conſtitutę. Erat etiam applicatum alteri datæ, circa b f conſtitutæ. igit̃ pũctum f datũ, et perpendiculares f d, f e. igitur pũcta d e data. Cõponetur aũt ſic, ſint duæ rectæ datæ angulũ rectũ ambientes a b, b c: & educantur ab ipſo b in infinitũ, et deſcribatur circa axem b c ſectio coni rectanguli. Rurſus circa axem d b deſcribatur ſectio rectãguli coni, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam a b, ſectiones ductæ ſe mutuò ſecabunt. ſecent ſe in puncto f,

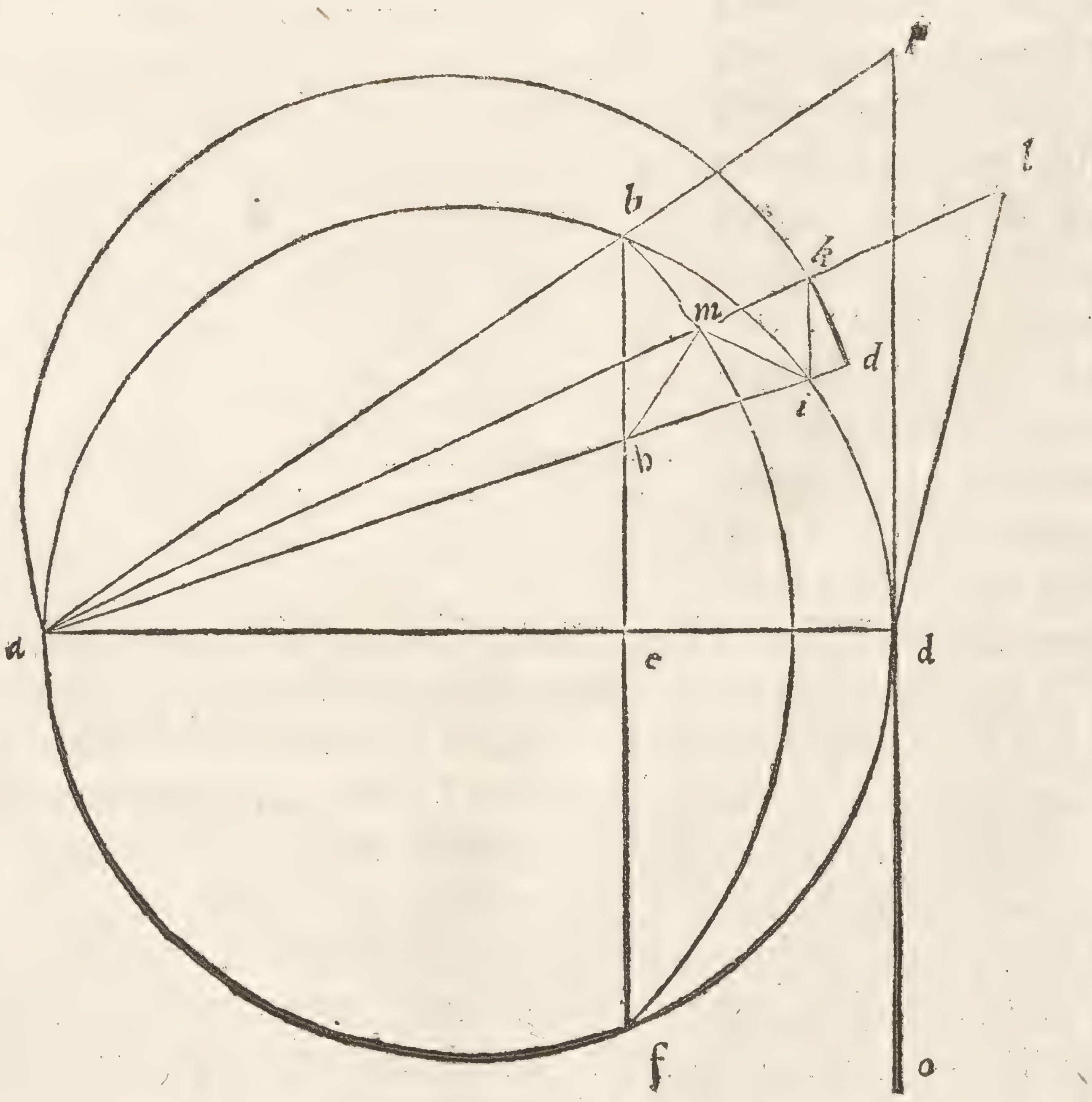


& ab ipſo f ducantur perpendiculares f d, f e. Quoniam igitur in ſectione rectanguli coni ducta eſt f e, hoc eſt d b, cõtentum ſub c b, b e erit æquale quadrato b d. Eſt igitur ſicut c b ad b d, ita b d ad b e. Rurſus quoniam f d ducta eſt in ſectione rectanguli coni, hoc eſt ipſa b e: contentum igitur ſub d b, b a, eſt æquale quadrato e b. Eſt igitur ſicut b d ad b e, ita b e ad b a. Verum ſicut d b ad b e, ita c b ad b d, eſt ſicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a, quod erat inueniendum.

Deſcripta eſt autem ſectio rectanguli coni cum diabeto, inuento à Mileſio mechanico Iſidoro magiſtro noſtro, cum ſit ab eo ſcriptum in Commentum camaricarum Heronis ſibi factum. Diabetum inſtrumentum eſt ſimile elemento græco λ.

INVENTIO ARCHITAE, QVEMADMODVM *Eudemus tradit.*

SVnto duæ rectæ datæ a d, c: quibus oporteat duas medias proportionales inuenire. Deſcribat̃ circa maiorem, puta a d, circulus a b d f, & applicetur a b ipſi c ęqualis, quę educta concurrat in puncto p, cum ea quæ contingit circulum in pũcto d. Ducatur autem b e f æquediſtans ipſi p d o, & intelligatur ſemicylindrus erectus ſuper a b d ſemicirculo, et ſuper a d ſemicirculus erectus in parallelogrãmo cylindri deſcriptus. Hic itaq; ſemicirculus circumductus,

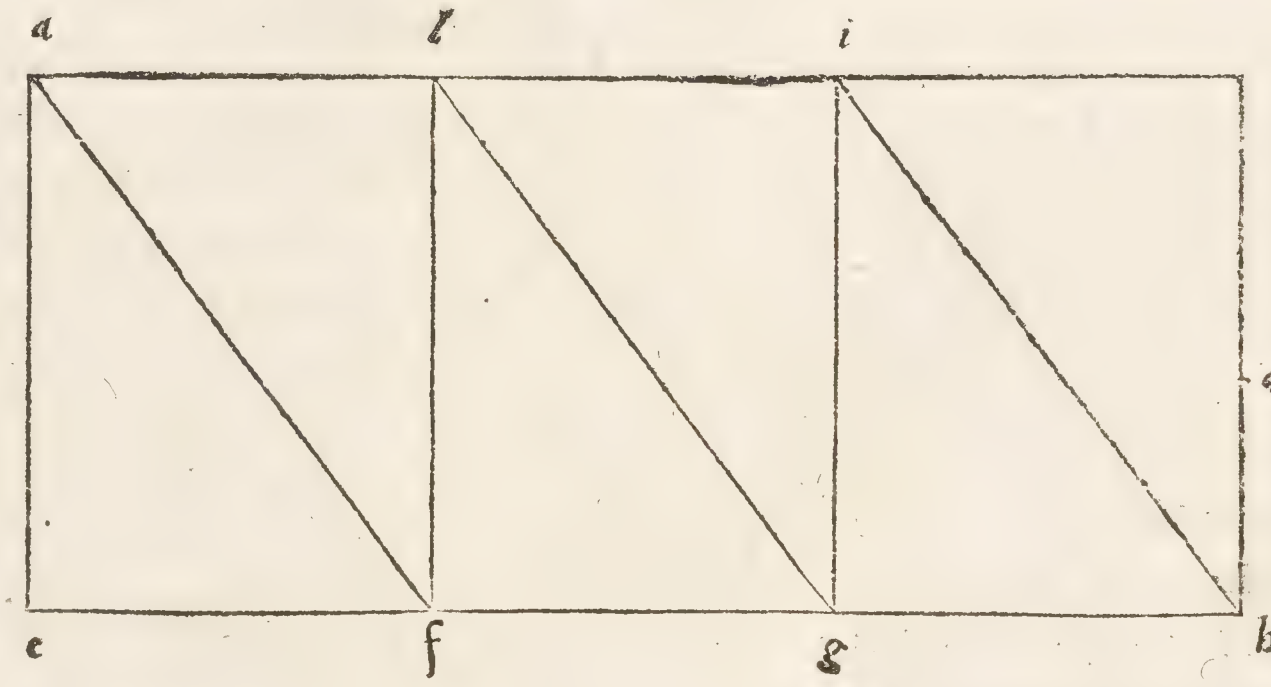


ab ipſo d in ipſum b, termino diametri a quieſcente, diuidet ſuperficiem cylindri-

cam in circumuolutione, et in ea deſcribet lineam quandam. Rurſus ſi quieſcente a d triangulus a p d circumferatur contrario ſemicirculi motu, faciet ſuperficiē conicam. recta itaque a d circumuoluta concurrat cum linea cylindrica in quodam puncto, ſimul autem & ipſum b deſcribet ſemicirculum in ſuperficie coni. habeat iam poſitionem in loco cōcurſus linearum ſemicirculus motus, hanc puta d k a, & triangulus in contrariū motus habeat hanc d l a. punctum dicti concurſus eſto k. Eſt item ſemicirculus deſcriptus per b, iſte b m f: & eſto b f communis ſectio eius, & circuli b d f a, & ducatur ab ipſo k ad planum ſemicirculi b d a perpendicularis: cadet itaq; ipſa in circumferentia circuli, cum cylindrus ſit erectus. incidat, & ſit k i: & ducta ab i ad a, incidat in b f in puncto h, & ipſa a l incidat ſemicirculo b m f in puncto m. iungantur autem k d, m i, m h. quoniam igitur uterque ſemicirculorum d k a, b m f, eſt erectus ſuper ſubiectum planum, erit eorum communis ſectio m h, ad rectos angulos ſuper plano circuli. quare & ad ipſam b f erecta eſt ipſa m h. Igitur contentum ſub b h, h f, hoc eſt ſub h a, h i, eſt æquale quadrato m h. Igitur triangulus a m i, ſimilis eſt utriq; horum m i h, m a h: & angulus i m a rectus, item angulus d k a rectus: igitur k d, m i, ſunt æquediſtantes. & erit ſicut d a ad a k, hoc eſt k a ad a i, ita i a ad a m, propter triangulorum ſimilitudinem. Igitur quatuor hæ d a, a k, a i, a m, ſunt conſequenter proportionales: & a m eſt æqualis ipſi c, quia & ipſi a b. Duabus igitur rectis ad c datis, duæ a k, a i mediæ proportionales inuentæ ſunt.

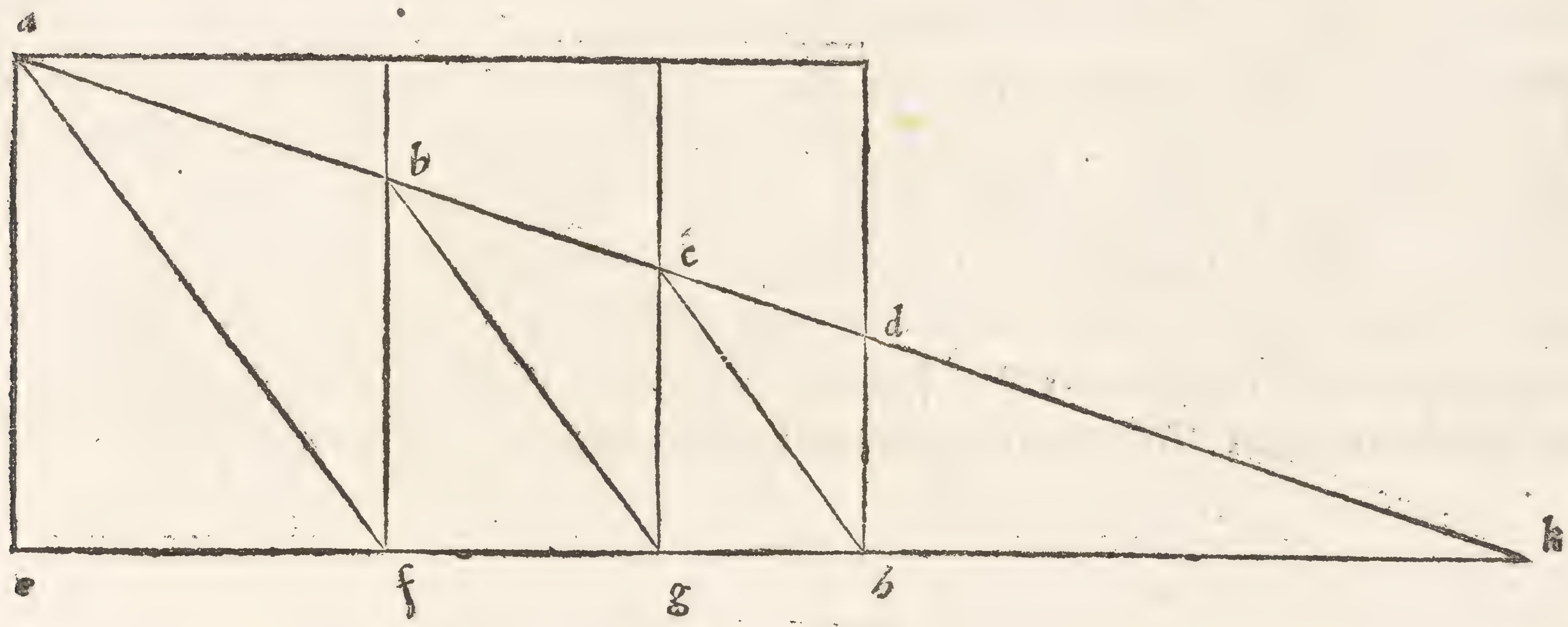
MODVS ERATOSTHENIS.

Regi Ptolemæo Eratoſthenes lætari. Vetuſtiſſimorū aiunt tragœdum quendam introduxiſſe Minoa, ſepulchrum Glauco extruentem. Cum autem audiſſet illud centum undiq; pedum ambitu claudi, dixiſſe, Paruum utiq;. inde ſubieciſſe, Regij ciron ſepulchri duplū eſto. Videbitur erraſſe. lateribus enim duplatis, planum fit quadruplum, et ſolidum octuduplum. Quærebatur autem iam à Geometris, quonā pacto ſolidum datū ſub priſtina figura ad duplum augeri poſſet, et appellabāt hoc problema, cubi duplatio. Supponētes enim cubum, tentabant ipſum duplum reddere. Cunctis itaq; multo tempore dubitantibus,



Hippocrates Chius primus inſpexit, quod ſi duabus lineis rectis, quarum maior eſſet minoris dupla, duę mediæ proportionales inueniuntur, tunc duplare poſſe cubum. quare dubium eius in nō minus dubium uerſum eſt. Tempore aūt quodā pōſt ferunt Delios iuſſos per oraculum, duplare quandam aram, in hanc difficultatem incidiſſe. implorantes autem eos qui tunc apud Platonem erant in Academia Geometras, poſtulare, ut quæſitum ab eis inueniretur. Cum aūt illi diligenter ſibi ipſis inſiſterent, & ſcrutarentur, quo pacto duabus rectis datis duas medias proportionales inſtituerent, Archita Tarentinus fertur eas per ſemicylindros inueniſſe, Eudoxus autem per lineas quæ curuæ appellantur. Accidit autem omnibus his deſcripſiſſe demonſtratiuè, uerum non poſſe, quæ inuenerant, manu efficere, & in uſum deducere, præterquā in breuitate Meneth-

mi: & hæc difficulter. Excogitata autem eſt à nobis quædam inſtrumenti ſtructura facilis, per quam inuenire poterimus non ſolum duabus datis rectis duas medias, uerum quodcunq; quis iuſſerit. quo inuento, poterimus uniuerſaliter ſolidum quodcunq; datum æquediſtantibus lateribus contentum, in cubum reducere, aut ex altera in alteram figuram transformare, & ſimilem ei facere, & ipſum augere retinendo ſimilitudinem. quare & aras & templa poterimus, & humidorum & ſiccorum menſuras, puta medimnarũ metrum in cubum reuocare, & per huius latus dimetiri uaſa horum receptiua, quantum capere poſſint. Vtile autem eſt excogitatum iſtud, his qui ſtudent impulſiua & expulſiua lapidum inſtrumẽta augere. nam oportet omnia illa proportionaliter augeri: & craſſitudines, & magnitudines, & perforationes, & chienicidas, & neruos iniectos, ſi debeat & ſtatuatur proportionaliter augeri. Hæc autem abſq; mediarum inuentione fieri non poſſunt. Demonſtrationem autem & ſtructuram dicti inſtrumenti tibi deſcri-



pſi. Dentur itaq; duæ rectæ a e, d h inæquales: quibus duas medias proportionales inuenire oporteat. & ſtatuamus a e ad angulos rectos ſuper aliquam rectam, puta e h: & ſuper e h cõſtituantur tria parallelogramma deinceps a f, f i, i h. & ducantur diametri in eis a f, l g, i h, quæ erunt æquediſtantes. manente autem parallelogrammo medio f i, compellatur a f ſupra medium, & i h infra, ueluti in ſecunda figura, donec puncta a b c d fiant in una linea recta. & ducatur per puncta a b c d linea recta, quæ coincidat cũ e h, educta ad k. Erit itaq; ſicut a k ad k b, in parallelis a e, f b, ita e k ad k f. in parallelis autem a f b g, ſicut f k ad k g. Sicut igitur a k ad k b, ita e k ad k f, & k f ad f g. Rurſus quoniam b k ad k c in parallelis b f, c g, ſicut f g ad k g: in parallelis autẽ b g, c h, ſicut g k ad k h. Sicut ergo b k ad k c, ita f k ad k g, & g k ad k h. Verum ſicut f k ad k g, ita e k ad k f. Igitur ſicut e k ad k f, ita f k ad k g, & k g ad k h. Verum ſicut e k ad k f, ita a e ad b f. Sicut autem f k ad k g, ita b f ad c g, & c g ad d h. Inuentæ igitur ſunt duabus a e, d h, duæ mediæ b f, c g proportionales.

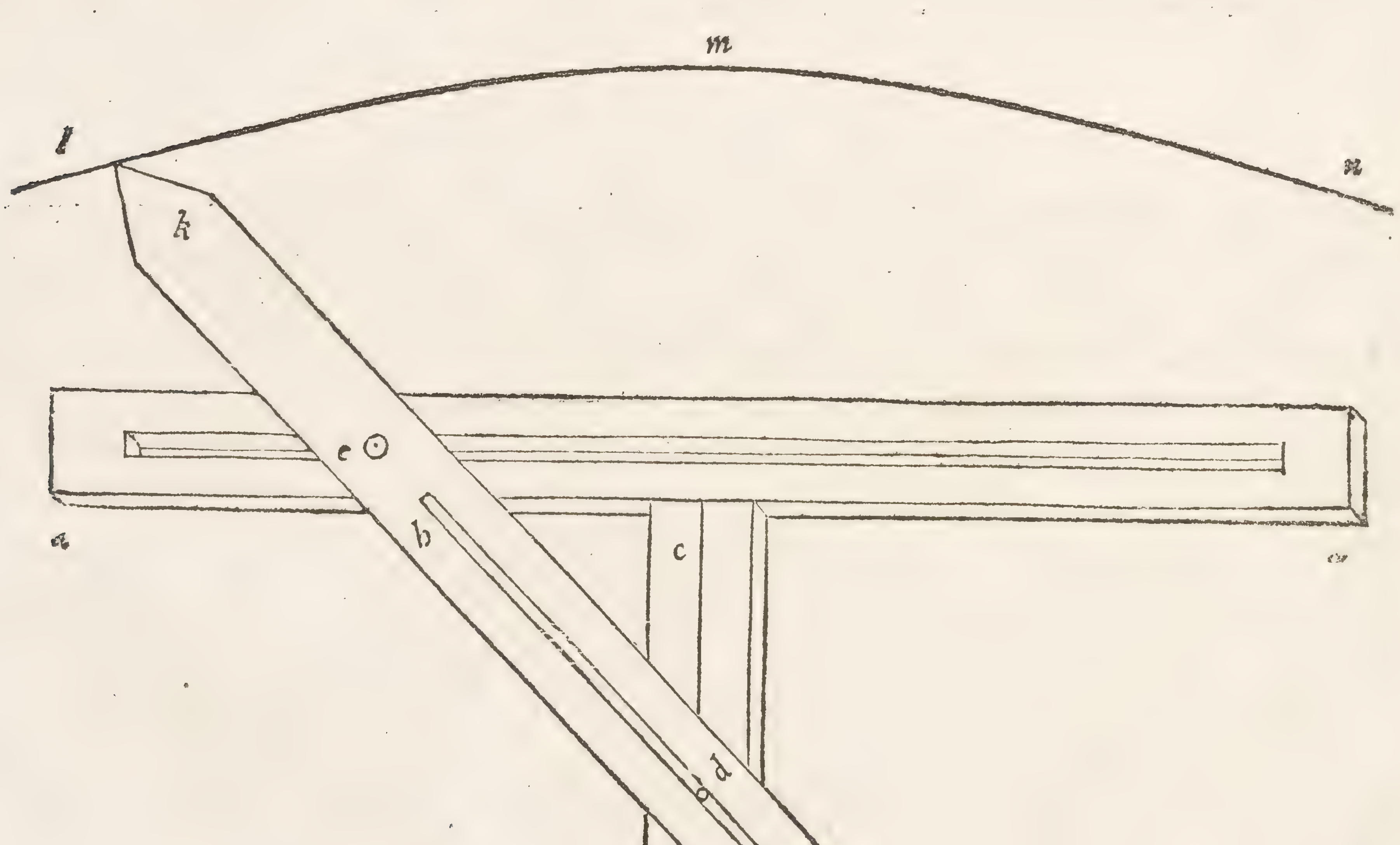
Hæc igitur in ſuperficiebus Geometricis demonſtrata ſunt. Vt autem & inſtrumento poſſimus duas medias ſumere, fabricetur plinthus ligneus, uel eburneus, uel æreus, habens tres tabellas æquales, & quàm leuiſſimas, quarum media confixa ſit, reliquæ duæ pelli poſſint magnitudinibus & commenſurationibus omnes ſibiipſis conſentiẽtes. Demõſtratio autem ſimiliter perficietur. Ad lineas uero certius ſumendas, arte incumbendum eſt, ut inducta tabellarum omnia retineantur parallela, & non hiantia, et regulariter inuicem coaptata. In anathemate autem eſt inſtrumentum æreum, & aptatum eſt ſub coronam ipſius colũ

næ,

næ adnexum plumbo, ſub ipſo eſt demonſtratio compendioſius expreſſa, & figura, poſt ipſum uero ſuperſcriptio epigramma. Hęc autem tibi ſcribuntur, ut habeas ea ſicut in anathemate habentur. Duarũ aũt figurarum ſecũda eſt in columna deſcripta: duabus rectis datis, duas medias proportionales in proportione continua inuenire. Dentur duæ a e, d h. conduco itaq; tabellas in organo, donec pũcta a b c d ſint in recta una. intelligantur ſicut ſe habent in ſecunda figura. Eſt igitur ſicut a k ad k b, in parallelis a e, b f, ita e k ad k f. in ipſis uero a f b g, ita f k ad k g. igitur ſicut e k ad k f, ita k f ad k g. Sicut autem illę inter ſe, ita a e ad b f, & b f ad c g. Similiter autem oſtendemus, quod ſicut f b ad c g, ita c g ad d h. Igitur iſtæ a e, b f, c g, d h ſunt proportionales. Igitur duabus datis, duę mediæ inuentæ ſunt. Quod ſi datæ nõ ſint æquales ipſis a e d h, facientes illis proportionales has a e, d h, harũ medias ſumemus, & inducemus ad illas, & fecerimus illud quod imperatũ fuit. Si autem plures medias iubeamur inuenire, ubi tabellas cõſtituerimus in inſtrumento una plures, quàm ſint mediæ inueniendæ, idem conſequemur, & demonſtratio prorſus eſt eadem.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO *de lineis conchoidibus.*

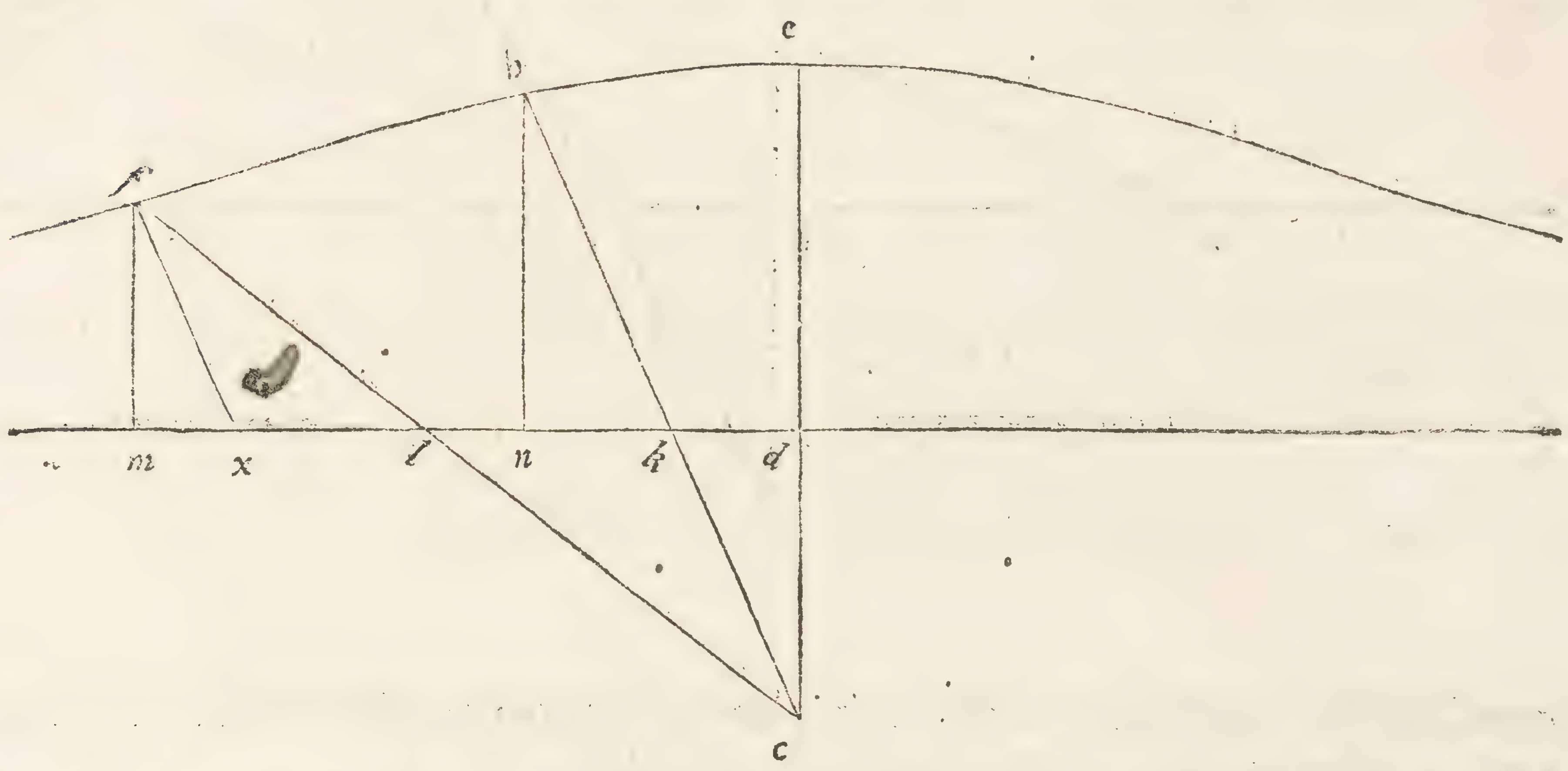
DEſcribit Nicomedes in lib. ſibi ſuperſcripto de Conchoidibus, talem inſtrumenti ſtructuram, quo eadem neceſſitas ſuppletur: in quo uir iſte uidetur ſupra modum gloriari, multumq; inuentis Eratoſthenis irridere, ueluti quæ fieri non poſſint, neq; imaginari, ac ſimul Geometrica doctrina priuata ſint. Hãc uero partim quòd explete quæ circa hoc problema elaborata ſunt, tradidit: partim, ut eius ad Eratoſthenem cõparatio haberi poſſit, inter iſta cõſcripſimus, quæ ſic ferè deſcribitur. Imaginari oportet regulas duas ad angulos rectos inuicem cõ-



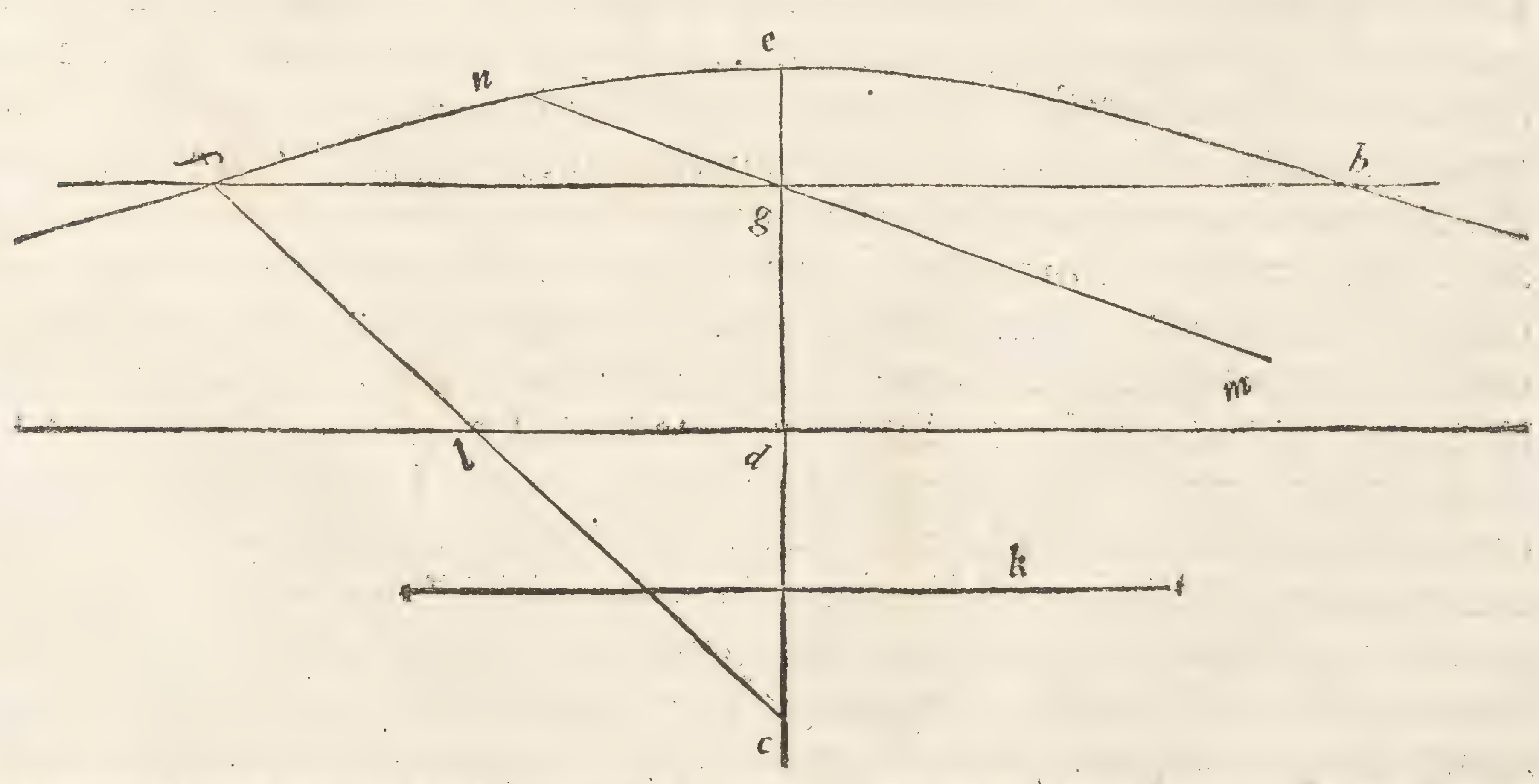
pactas, ita ut una ſit earum ſuperficies: ueluti ſunt a b, c d, & in a b aſſialem, in quem percurrere poſſit. in ipſa uero c d, ad partem d, ad rectam quæ diuidit latitudinem eius, cylindrulus configatur regulæ, & parum excedat ſuperficiẽ ſuperiorem regulæ. alterã item regulam, puta e f poſt breue quoddam interuallũ ad terminum f, inſecturam habentem, puta g h, quæ poſſit cylindrulo d inſerto circum

circumuerti.ad ipſum e uero quæ incumbat in axem confixum per-currenti in ſolmo aſſiali exiſtente in regula a b.inſita itaq; regula e f per inſecturã g h; in cylindrulo ad f ſtatuto, & per e in axe confixo ipſi chelonario, ſi quis comprendens k extremum regulæ ipſam mouerit in partes a, deinde in partes d, punctum e ſemper in regula a b continebitur. ac uero g h in ſectura mouebiť, uerſus cylindrulum d, ſemper recta regulæ e f media in motu intellecta ſecũdum axem qui eſt ad cylindrum d, & ipſa c k ſupereminentia regulæ ſemper manente eadem. Si itaq; intelligamus ad k graphium quoddam attingens pauimentum, deſcribeť quædã linea qualis eſt l m n, quã Nicomedes appellat conchilem primã lineam. & interuallum quidẽ eius lineæ eſt e k, magnitudo regulæ, polus uero d.

Hac itaq; linea contingit oſtendere eam perpetuò minus accedere ad a b regulam, & quod omnis recta inter regulam a b, & ipſam lineam ſecat ipſam lineam. Primũ quidem accidens facile comprehenditur in altera deſcriptione, intelligendo regulam a b polo c, interuallo d e, linea cõchili f e h. procedãt ab ipſo c duæ c h, c f, æqualibus uidelicet factis his k h, l f. Dico quod f m perpendicularis minor eſt perpendiculari h g. Cum enim angulus m l c, ſit maior angulo m k c, reliquus relictus in duos rectos, puta angulus m l f, reliquo m k h minor eſt. Propterea cũ an-



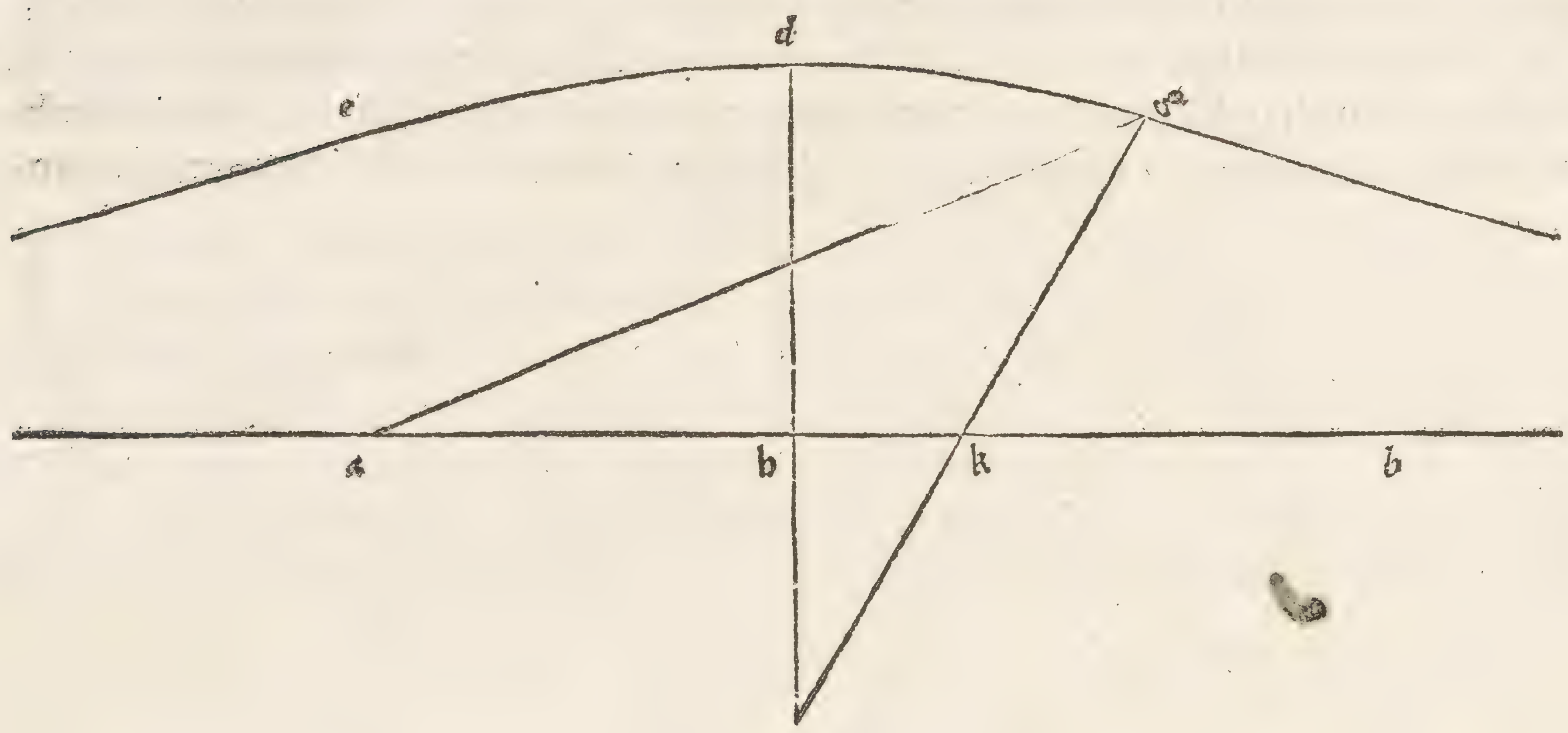
guli ad m, g ſint recti, angulus ad f maior eſt angulo ad h conſtituto. & ſi angulus m f x, fiat æqualis angulo ad h, ipſa k h, hoc eſt ipſa l f ad h g, eãdem habebit proportionem, quam x f ad f m. quare f l ad h g, habet minorẽ proportionem, quàm ad f m. quare h g maior eſt ipſa f m.



Secundum autem fuit, lineam rectam ductam inter a b & lineam ſecare ipſam

lineã. & hoc quoq; ſic patebit. Ipſa enim ducta aut eſt æquediſtãs ipſi a b, aut non. Eſto prius æquediſtãs, puta f g h: & fiat ſicut d g ad g c, ita d e ad aliam quandã, puta k. & cẽtro c, interuallo k, circumferentia deſcripta ſecet f g, in puncto f, & iungatur c f. Eſt igitur ſicut d g ad g c, ita l f ad f c. uerum ſicut d g ad g c, ita erat d e ad k: hoc eſt ad ipſam c f. Igiť d e eſt æqualis ipſi l f, quod eſſe nõ poteſt. oporteret enim f eſſe ad lineam. At uero non ſit ipſa ducta æquediſtans, puta m g n, & ducatur per g æquediſtans ipſi a b, puta f g. ipſa igitur f g concurret cum linea: quare multò magis ipſa m n. Cũ igitur hæc inſtrumento accidentia colligantur, eius ad propoſitum utilitas ita demonſtrabitur.

Rurſus angulo a dato, & puncto extra c ducere c g, & facere eam ęqualem datæ. ducatur perpendicularis a puncto c ad ipſam a b, quæ ſit c h. & educatur, & eſto d h æqualis datæ, & polo c, interuallo d h dato. regula uero a b deſcribatur

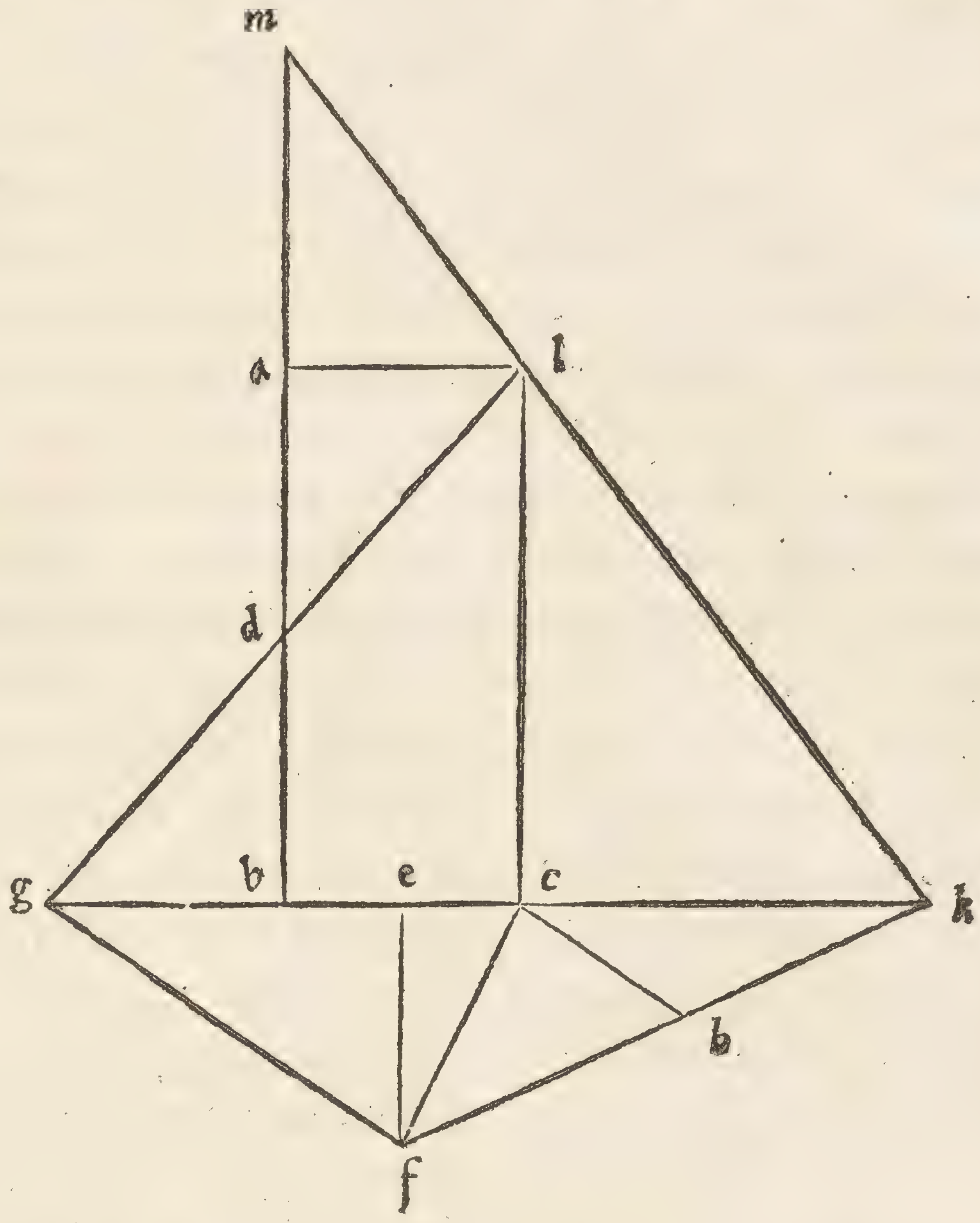


conchilis linea prima e d f. concurrit igitur ipſi a g, per prædemonſtratum. cõcurrat in g, & iungatur c g. Igitur k g eſt æqualis datæ.

His demonſtratis, dentur duæ rectæ c l, l a, ambientes angulum rectum, quibus oporteat duas medias continuè proportionales inuenire, & compleatur parallelogrammum a b c l, & diuidatur utraq; harum a b, b c in duo æqua punctis d, e. & iuncta d l educatur, & cõcurrat cum ipſa b c, educta in puncto g, & ſit ipſi c b ad angulos rectos ipſa e f. & producatur ipſa c f, quæ ſit æqualis ipſi a d, & iungatur ipſa f g, & ei ęquediſtans ipſa c h, & angulo exiſtente eo qui ſub k c h a puncto f dato, deducatur ipſa f h k, faciens ipſam h k ad g k æqualem ipſi c f. Hoc autem quo modo fieri poſſit, oſtenſum eſt per lineam cõchilem, & ipſa k l iungatur, & educatur ut concurrat ipſi a b eductæ in pũcto m. Dico itaq;, quod eſt ſicut c l ad k c, ita k c ad m a, & m a ad a l. Quoniam enim b c diuiditur in duo æqua puncto e, & additur ei k c: cõtentum ergo ſub b k, k c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e k, quadrato e f communi adiecto, contentum ſub b k, k c, cum quadratis e c, e f, hoc eſt quadrato c f, æquatur quadratis k e, e f: hoc eſt quadrato k f. Et quoniam ſicut m a ad a b, ita m l ad k l. Sicut autem m l ad k l, ita b c ad c k. igitur ſicut m a ad a b, ita b c ad c k. & eſt a d dimidia ipſius a b, & c g eſt dupla ipſius b c. quoniam & l c, ipſius a d. Erit igitur ſicut m a ad d a, ita g c ad k c. Verũ ſicut g c ad c k, ita f h ad h k. cum g f, & c h ſint æquediſtantes. Igitur componenti ſicut m d ad d a, ita f k ad k h. Suppoſita eſt autem ipſa d a æqualis ipſi h k, cum c f ſit æqualis ipſi d a. Igitur ipſa m d æqualis eſt ipſi f k. quare quadratũ m d eſt æqua

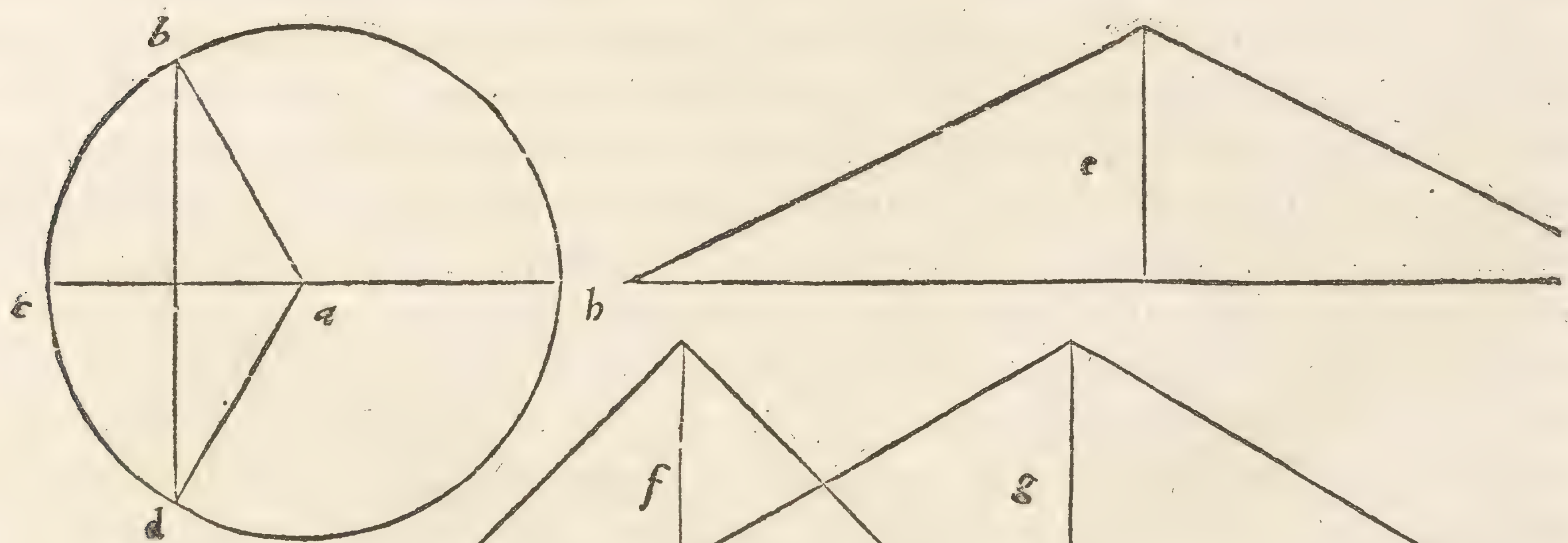
le

ſe quadrato f k. Eſt autem contentum ſub b m, & m a, cum quadrato d a, æquale quadrato m d: quadrato autem f k oſtenſum eſt æquale eſſe contentum ſub b k, k c, cum quadrato c f: quoniam quadratum a d, æquatur quadrato c f. nã ipſa a d ſuppoſita eſt æqualis eſſe ipſi c f. Igitur quod ſub b m, m a æquatur contento ſub b k, k c. Sicut ergo m b ad b k, ita k c ad a m. Verũ ſicut b m ad b k, ita c l ad c k. Igitur ſicut l c ad c k, ita c k ad a m. Eſt autem ſicut l c ad c k, ita m a ad a l. Igitur ſicut l c ad c k, ita c k ad a m, & a m ad a l, quod erat demonſtrandũ. Duab. igitur rectis datis, duæ mediæ continuæ proportionales inuentæ ſunt.



IN SECVNDVM THEOREMA.

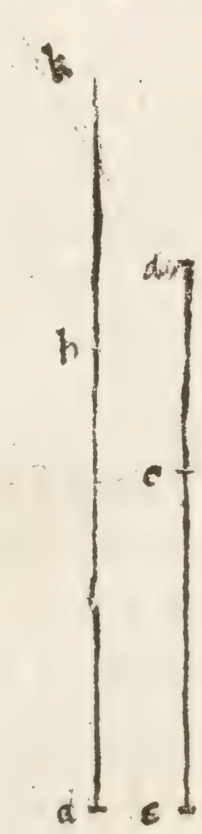
ET componenti ſicut ipſa d h ad h c, ita c a ad a e. hoc eſt quadratũ c b, ad quadratũ b e. Sicut enim in rationalis deſcriptione, quoniam in triangulo rectangulo c b a, ab angulo recto ad baſem ducta eſt b e perpẽdicularis, diſtincti trianguli ad perpendicularẽ ſunt inuicẽ ſimiles, & toti, iccirco ſicut c a ad a b, ita b a ad a e, & c b ad b e. quare ſicut quadratũ c a ad quadratũ a b, ita quadratũ c b ad quadra-



tum b e. Verum ſicut quadratũ c a, ad quadratũ b a, ita ipſa c a ad ipſam a e. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ. Sicut ergo c a ad a e, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eadem autem ratione oſtenditur, quod ſicut c a ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Propter ſimilitudinem enim triangulorum eſt rurſus, ſicut a c ad c b, ita b c ad c e: hoc eſt, ſicut quadratum a c, ad quadratum c b, ita ipſa a c ad ipſam c e. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ſic quadratum a b, ad quadratum b e. Igitur ſicut a c ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Poſtea deinceps tentãs oſtendere conũ b k f,

 æqualem

æqualem eſſe portioni ſphęræ b a f, exponens conũ n, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei portionis, & altitudinẽ æqualem ei quæ ex centro ſphæræ, dixit conũ n eſſe æqualem fruſto f a b h ſolido, ſicut oſtenſum fuit in primo libro. Verum ſciendum eſt, in primo libro non eſſe oſtenſum tale fruſtum eſſe æquale cono taliter ſumpto, ſed illi qui eſſet compræhenſus à coni ſuperficie, & ſuperficie ſphęrica' minore hæmiſphærio, quod proprie in Diffinitionib. uidebatur fruſtũ ſolidum appellare. Dixit enim: Fruſtum autẽ ſolidum uoco, cum ſphærã conus ſecet, qui habeat uerticem ad ſphæræ centrum, figuram compræhenſam à ſuperficie coni intra conum. Figura enim nunc propoſita continetur à conica ſuperficie, habente uerticem ad centrum ſphæræ, & ſphærica ſuperficie, ſed non à compræhenſa intus à cono. Quod autem & talis figura ſit æqualis cono habenti baſim æqualem ſuperficiei ſphæricæ complectenti portionem, altitudinem uero æqualem ei quæ ex centro ſphæræ, ſic demonſtrabitur per ea quæ in primo libro oſtenſa ſunt. Intelligatur enim ſeorſum ſphæra, & ſecetur plano quodam non per centrum circulo circa diametrum b d, centrum ſphæræ a: & intelligatur conus baſim habens circulum circa diametrum b d uerticem punctum a. Exponatur item conus e: cuius baſis, ſit æqualis ſuperficiei ſphæræ, altitudo ea quæ ex ſphæræ centro. Igitur conus ille eſt æqualis ipſi ſphæræ. nam quadruplus eſt coni baſem habentis maximum in ſphæra circulum, altitudinem uero eandem, cuius quidem ſphæra eſt oſtenſa eſſe quadrupla. Exponantur item alij duo coni hi f g, quorum f baſem habeat æqualem ſuperficiei portionis b c d, altitudinem uero eam quæ ex centro ſphæræ. g uero baſem habeat æqualem ſupęrficiei portionis b h d, & altitudinem eandẽ. Conus igitur f eſt æqualis fruſto cuius uertex eſt a, & ſuperficies ſphærica quę eſt ſecundum b c d. Quoniam igitur baſis e eſt æqualis baſibus conorum f g, & ſunt in eadem altitudine: igitur e conus, hoc eſt ipſa ſphæra, eſt æqualis conis f g. Verũ conus f oſtenſus eſt æqualis eſſe fruſto, quod eſt ſecundum b c d ſolido, uerticem habenti a. Igitur reliquus g conus æqualis eſt reliquæ portioni, baſem habenti ſuperficiem quæ ſecundum b h d portionem, altitudinem uero eam quæ ex centro. Deinde rurſus dixit, Aequalis eſt igitur conus n, hoc eſt fruſtum b h f d, figuræ b h f d. quoniam enim adductus eſt conus n æqualis cono cuius baſis eſt circulus circa b f, diametrum & altitudo h k: conus autem cuius baſis eſt eadem, altitudo uero e k, æqualis eſt cono dicto, & cono habenti baſim eandem, altitudinem uero e h. Habent enim ſe ad inuicem, ſicuti eorum altitudines: ablato communi cono, eo qui baſim habet eandem, altitudinem uero e h, reliqua b h f k figura erit æqualis cono baſem habenti circulum circa diametrum b f, altitudinem autem h k: hoc eſt cono n, hoc eſt b a h f fruſto. Inducẽs itaq; ex collectis corolariũ, perficit Theorema. Deinceps per alterã demõſtrationem cõducit extremã partem theorematis, hoc eſt quod b a f portio ſphæræ eſt æqualis cono b k f. & procedens dicit, Sicut ergo k h ad h c, ita h d ad d c, & tota k d ad d h, ſicut d h ad d c. Quoniã enim ſicut k h ad h c, ita h d ad d c: & permutatim, ſicut k h ad h d, ita h c ad c d, & componenti, ſicut k d ad h d, ita h d ad d c, hoc eſt k h ad h a. Erat enim ſicut k h ad h c, ita h d ad d c. Eſt autem h c æqualis ipſi h a. Et parum põſt: Sicut ergo k h ad h d, ita a e ad e c. Sicut ergo quadratum k d ad contentum ſub k h, h d: ita quadratũ a c, ad cõtentum ſub a e, e c. Intelligantur enim ſeorſum poſitæ hæ k d, a c: & ſit ſicut k h ad h d ita a e ad e c. Dico quod eſt ſicut quadratum k d, ad cõtentum ſub k h, h d, ita quadratum a c ad contentum ſub a e, e c. Quoniã enim eſt ſicut k h ad h d, ita a e ad e c. & componenti, ſicut k d ad d h, ita a c ad c e, quare eſt quadratum k d



ad

ad quadratum h d, ſicut quadratum a c, ad quadratum c e. Rurſus quoniam eſt ſicut k h ad h d, ita a e ad e c. Verum ſicut k h ad h d, ita contentum ſub k h, h d ad quadratum h d, ſumpta h d altitudine communi. Sicut autem d e ad e c, ita contentum ſub a e, e c, ad quadratum e c, ſumpta rurſus altitudine cõmuni e c. Sicut ergo contentum ſub k h, h d, ad quadratum h d, ſic contentum ſub a e, e c, ad quadratũ e c. Oſtenſum eſt autem, ſicut quadratum h d, ad quadratum d k, ſic quadratum e c ad quadratum a c. Igitur per æquam, ſicut contentum ſub k h, h d, ad quadratum k d, ſic contentum ſub a e, e c ad quadratum a c: & econuerſo, quod erat demonſtrandum.

IN TERTIVM THEOREMA.

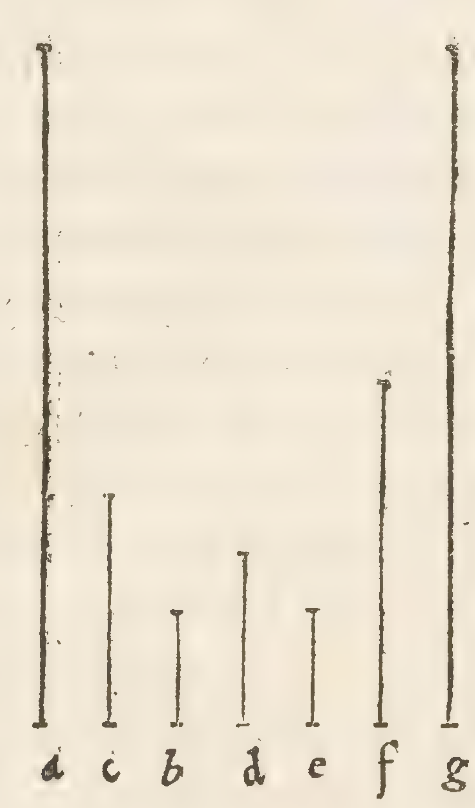
SIcut autem dicti circuli ad inuicem, ita quadratum a d, ad quadratum d b, hoc eſt ipſa a c ad ipſam c b. Sicut enim in ipſa rationalis deſcriptione, quoniã in triangulo rectangulo a d b ducta eſt perpendicularis, ab angulo recto d c media proportionalis, inter baſis partes & trianguli ad perpedicularem inuicẽ ſunt & toti ſimiles. quare ſicut b c ad c d, ita b d ad d a. igitur & earum quadrata. Verũ ſicut quadratum b c, ad quadratum c d, ita prima b c ad tertiam c a. Sicut ergo b c ad c a, ita quadratum b d ad quadratũ d a. Proportio autem a c ad c b eſt data, quare punctum c eſt datum. quoniam ſupponitur ſphæra, igitur diametros eius a b data, & proportio a c ad c b eſt data. Si magnitudo data in proportionẽ datam diuidatur, utraq; partium eſt data. quare ipſa a c data, & a datum. nam in communi ſectione lineis poſitione datis, datum eſt c punctum.

IN QVARTVM THEOREMA.

EAdẽ ratione qua ſuprà ex apparatu, ſicut l d ad d k, ita k b ad b r, & d q ad q b. in præcedenti enim collectũ fuerat hoc modo: Quoniã eſt ſicut utraq; ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b. & diuidenti, ſicut k d ad q d, ita r b ad b q: & permutatim, ſicut k d, hoc eſt k b ad b r, ita d q ad q b. Rurſus quoniam eſt ſicut l q ad q d, ita utraq; ſimul k b, b q ad q b. Diuidenti, & permutatim, ſicut l d ad d k, ita d q ad q b. Erat autem & ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Sicut ergo l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Tota igitur r l ad k l, ſicut k l ad l d. Sicut enim unum ad unum, ita antecedentia omnia ſimul, ad ſequentia ſimul omnia. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Quoniam enim eſt ſicut r l ad l k, ita k l ad l d. Sicut igitur prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad ſecundæ quadratum. Eſt igitur ſicut r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Verum ſicut quadratum r l ad quadratum l k, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sunt enim proportionales. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. ponatur b f æqualis ipſi k b. Quod enim extra r cadet, manifeſtũ eſt. Quoniam ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Eſt aũt d q maior ipſa q b. igiť ipſa k b maior eſt ipſa b r. igitur f extra r cadet.

Quoniam autem proportio d l ad l q, & ipſius r l ad l q, & ipſius r l ad l d proportio data. Quoniam enim ſicut utraq; ſimul k b, b q ad b q, hoc eſt f q ad q b, ita l q ad q d: euertenti, ſicut q f ad f b, ita q l ad l d. Et econuerſo, ſicut b f ad f, ita l d ad l q. Proportio autem b f ad f eſt data, quoniam ipſa f b æqualis eſt ei quæ ex centro ſphæræ datæ. ipſa uero b q terminis eius b q datis, per ſuppoſitionẽ ſphæra diuiſa à plano per a c ducto, & ipſa d b ad angulos rectos ipſi a c exiſtẽte. Data eſt & idcirco tota q f, & proportio q f ad f b data, quare & proportio d l ad l q data. Rurſus quoniam proportio portionum eſt data, erit coni l a c, ad conum a r c proportio data. quare & proportio l q ad q r data. nam ſe habent inuicem, ſicut eorum altitudines. Totius ergo r l ad l q proportio eſt data. Quoniam igitur utriuſq; harũ r l, l d ad l q eſt proportio data, erit r l ad l d proportio data. nam quæ habent ad idem proportionem datam, habẽt quoque inter ſe proportionem datam. Quoniã igitur proportio r l ad l q coniungitur, ex proportione r l ad l d, & l d ad l q. quod quidem cõpoſitio proportionũ ſumatur, ſumpta media l d, ueluti & in Stoichioſi

ſumebatur, conſtat. Quoniam autem indearticulatè quodammodo, & non ita ut mentem expleat dictum eſt, uti compræhendi poteſt his qui in Pappum & Theonem & Archadium inciderunt, in multis compoſitionibus non demonſtratiuè, ſed inductione hoc dictum conſtituunt. Nullum igitur inconueniens, ſi perpaululum in ratione uerſati hoc ipſum manifeſtius fecerimus. Dico igitur, quod ſi ſumantur duo numeri, uel duæ magnitudines, quibus aliquis medius terminus cõſtituatur, proportio prius ſumptorum numerorum, uel magnitudinum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium proportione. Cõmemorandum tamẽ prius, quomodo proportio dicatur ex proportionibus componi. Sicut enim in libro Elementorum, quando quantitates proportionum in ſeipſas multiplicatę faciant quandam quantitatem, quãtitate uidelicet dicta, ſecũdum eũ numerũ quo & denominatur proportio data, uti dicunt alij, & Nicomachus in primo de Muſica, & Heronas in Commentario in Arithmeticam introductionem. Idem autem eſt, ac ſi dicatur eodem numero multiplicato in terminum ſequentem proportionis produci antecedentem, & propriè magis in multiplicibus ſumetur quantitas. In ſuperparticularibus autem & ſuperpartientibus non iam quãtitatem ſumi datur, cum ſit unitas indiuiſibilis. Quare in illis unitas eſt diuidenda. quanquã hoc minimè cõueniat Arithmeticæ, ſed ratiocinatiuæ, & computatiuæ attribuatur. Diuiditur autem unitas in partem, aut partes, à quibus proportio denominabitur: quemadmodum fit, ut apertius dicatur, ſeſquialteræ quantitas ad unitatem addit unitatis dimidium, & ſeſquitertiæ ad unitatem tertiam. Quare ſicuti ſuprà dictum eſt, conſtat proportionis quantitatem in terminũ ſequentem multiplicatã producere antecedentẽ. Nouem enim ad ſex cum ſit proportio ſeſquialtera, cuius quãtitas eſt unitas & dimidium, hæc multiplicata in ſenarium, producit nouenariũ. & in alijs quoq; licet hoc inſpicere. His autem ita declaratis, redeundum eſt ad propoſitum. Sunto igitur duo dati numeri a b. ſumatur medius inter eos c, oſtendẽdum quod proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & proportione c ad b. Sumatur enim quantitas a ad c, quæ ſit d, & eius quæ eſt c ad b ſit e. igitur c multiplicans d, producit a: et ipſe b multiplicans e producit c. ipſe uero d multiplicans e producat f. Dico quod f eſt quantitas proportionis a ad b: id eſt f multiplicans b producit a. nam b multiplicans f, faciat g. Quoniam igitur b multiplicans f facit g, & multiplicans e producit c: erit ſicut f ad e, ita g ad c. Rurſus quoniã d mulplicans e facit f, & multiplicans c facit a: erit ſicut e ad c, ita f ad a. Igitur permutatim, ſicut e ad f, ita c ad a: & econuerſo ſicut f ad e, ita a ad c. Verum ſicut f ad e oſtenſum eſt eſſe, ita g ad c. Igitur ſicut g ad c, ita a ad c. quare a eſt æquale ipſi g. Verum b multiplicans f producit g, igitur b multiplicans f producit a.



quare erit f quãtitas proportionis a ad b. Et eſt f productus ex d in e multiplicato, hoc eſt ex quantitate proportionis a ad c, in quantitatem proportionis c ad b. Igitur proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & ex proportione c ad b. Quod erat demonſtrandum. Vt autem exemplo quoq; hoc quod dictum eſt fiat manifeſtum, incidat inter duodenum & binũ medius quaternus. Dico itaq;, quod duodecim ad duo proportio eſt compoſita ex proportione duodecim ad quatuor, & quatuor ad duo. Id eſt proportio ſextupla componitur ex tripla, duodecim ad quatuor, & dupla quatuor ad duo. Si enim quantitates proportionum inuicem multiplicemus, hoc eſt tria in duo, fient ſex, qui eſt quantitas duodecim

ad

ad duo proportionis quæ eſt ſextupla, quod propoſitum fuerat declarare. Si autē qui incidit non fuerit maior minore, & minor maiore, ſed aut econuerſo, aut maior aut minor utroꝗ, & hoc modo prædicta compoſitio conſequetur. Nam inter nouem & ſex cadat medius duodecim, utroꝗ illorum maior. Dico igitur quod ex ſubſeſquitertia, quæ eſt nouem ad duodecim proportione, & ex dupla quæ eſt duodecim ad ſex, componitur ſeſquialtera, quę eſt nouem ad ſex. Quantitas enim quæ eſt nouem, ad duodecim eſt tres quartæ, hoc eſt dimidium & quarta. Quātitas autem quæ eſt duodecim ad ſex, eſt binarius. Si igitur multiplicauerimus binarium in dimidium & quartam, fit unitas & dimidium, quæ quantitas eſt ſeſquialterę proportionis, quam habent nouem ad ſex. Similiter autem ſi inter nouē & ſex quatuor medius incidat, ex dupla ſeſquiquarta & ſubſeſquialtera componitur ſeſquialtera. Rurſus enim quantitatem duplæ ſeſquiquartæ, quæ eſt nouem, ad quatuor multiplicemus, in quantitatem ſubſeſquialteræ, quæ eſt duæ tertiæ, & habebimus unum & dimidium, quod eſt quantitas ſeſquialteræ, ut dictum eſt. & ſimiliter in omnibus eadem ratio accommodatur. Conſtat autem ex dictis, quod ſi duorum numerorum datorū aut magnitudinum non fuerit unus medius, ſed plures medij termini ſumantur, extremorum proportio componitur ex omnium intermediorum proportionibus, incipiendo à primo, & procedendo ad ultimum, ſecundum ordinem ſe ſequentium. Duobus enim terminis a b incidant plures uno c d. Dico quod proportio a ad b cōponitur ex proportione a ad c, & c ad d, & d ad b. Quoniam enim a ad b componitur ex a ad d, & d ad b, uti dictum eſt ſuprà: & a ad d componitur ex a ad c, & c ad d. Igitur a ad b, proportio componitur ex ea quæ eſt a ad c, c ad d, d ad b. Similiter autem & in reliquis oſtendetur.



Item in rationali dixit: Verū ſicut r l ad l d oſtēſum eſt, ita eſſe quadratum b d ad quadratū d q. Quoniam enim oſtenſum eſt, ſicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sicut autem quadratum l k ad quadratum d l, ſic quadratum b d ad quadratum b q. Oſtenſum eſt enim, ſicut k l ad l d, ita b d ad d q, propter compoſitionem. Igitur ſicut r l ad l d, ita quadratum b d ad quadratum d q. Fiat autem ſicut r l ad l q, ita b f ad f h, utcunꝗ punctum h ceciderit, quomodocunꝗ quidem ſi poſitum ſit, quantum ad conſequentiam demonſtrationis nullum affert rationi impedimentum. Quod autem ſi quemadmodum in deſcriptione fit ponatur, ſemper cadet inter b r, ſic declaratur. Quoniam enim ſicut l k ad d k, hoc eſt ad k b, ita k r ad r b. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia: ſicut r l ad r k, ita k b ad r b. Maiorem autem proportionem habet r l ad r q, quàm r l ad r h. igitur l r ad r q maiorem habet proportionem, quàm k b ad b r, hoc eſt f b ad b r. Euertēti r l ad l q, minorem habet proportionem, quàm b f ad f r. Si enim fecerimus ſicut r l ad l q, ita b f ad quandam aliam maiorem f r, manifeſtū inde eſt quod f h maior eſt ipſa h b. Quoniā enim oſtenſum eſt, ſicut l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Eſt autem d q maior ipſa q b. igitur l d maior eſt ipſa d k, & k b ipſa b r. quare & l d ipſa b r. Tota igitur l q maior eſt ipſa q r. quare & h f maior ipſa h b.

Reliquum igitur eſt, ſicut quadratum b d, quod eſt datum, ad quadratum d q, ita f q ad f h. Quoniam enim portioni b f ad f h oſtenſum eſt eandem proportionem componi ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ipſius b f ad f q. Eadem uero ei quæ eſt b f ad f h eſt, & compoſita ex proportione b f ad f q, & ex q f ad f h. Compoſita igitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ex b f ad f q, eſt eadem proportioni compoſitæ ex b f ad f q, & ex q f ad f h. Si igitur

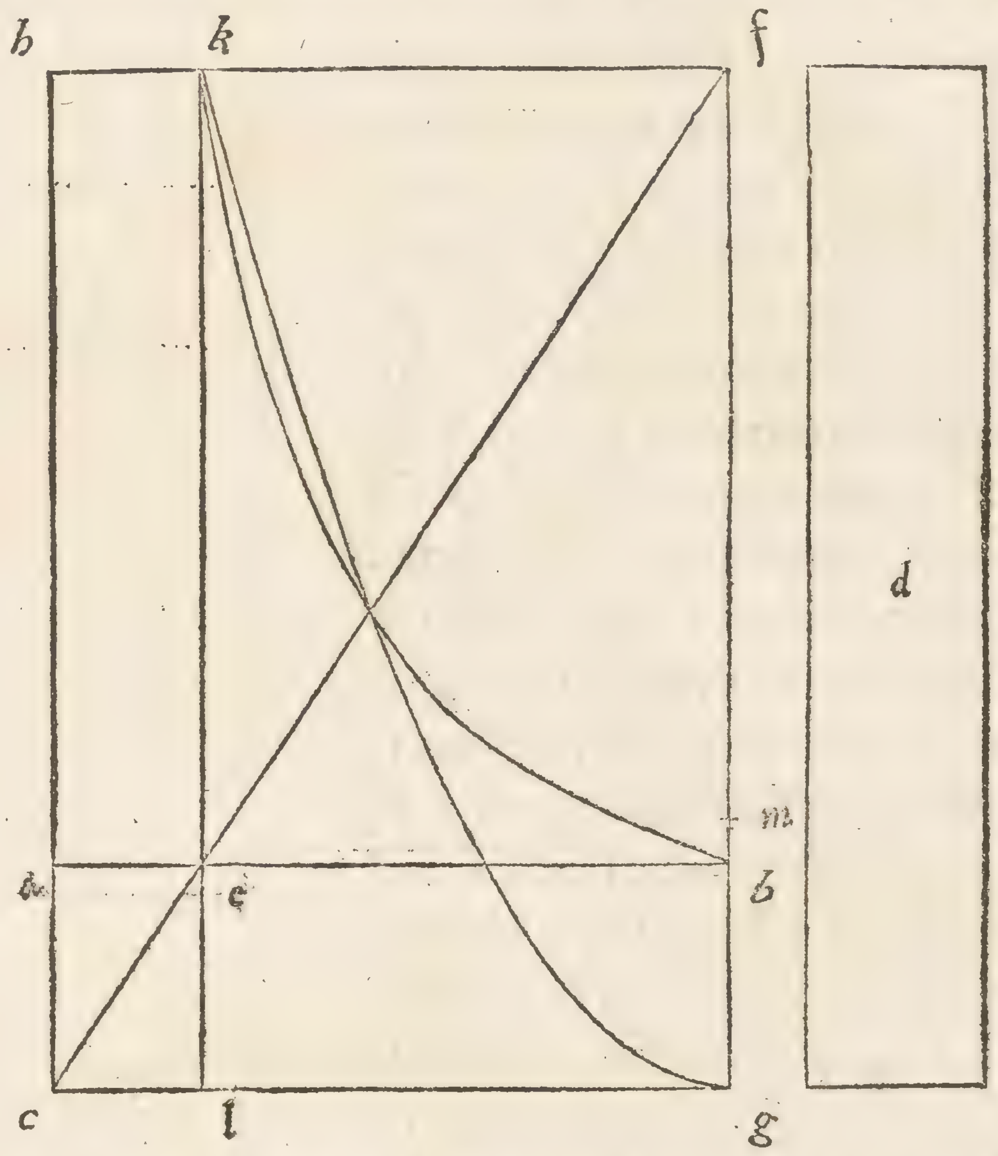
tur communem in ambabus proportionem b f ad f q auferamus, reliqua quadrati b d ad quadratum d q proportio eadem eſt ei quæ eſt q f ad f h. & eſt datū d f diuidere puncto q, & facere ſicut q f ad datam, hoc eſt ad f h, ſic datum, hoc eſt quadratum b d ad quadratum d q. Hoc autem ſic ſimpliciter dictum, habet determinationem, adhibitis quæ iſtic habentur problematis: hoc eſt, ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h. Quātum autem ad reſolutionem, nō habet determinationem, & eſt problema tale.

Duabus rectis datis d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto h ſumpto, in b f diuidere ipſam d b puncto q, & facere ſicut quadratum d b ad quadratum d q, ita q f ad f h. Vtraq; enim hæc in fine reſoluentur, & componentur. In fine quidē antedictum pollicebatur ſe oſtenſurū, in nullis autem ſcriptis hoc promiſſum inueniri poteſt. Nihil etiam inuenimus Dionyſodorū, ne quidpiam quidem horū attigiſſe, uerum putare fieri non poſſe, ut in limma aſſumptum perueniatur, atq; idcirco alteram totius problematis uiam ingreſſum eſſe, quam deinceps conſcribemus. Diocles quidem & ipſe in libro de Pirijs confecto ab ipſo, pollicitum fuiſſe exiſtimans Archimedem non feciſſe pollicitationē, & ipſe perficere aggreſſus eſt, & eius epicherima deinceps deſcribemus. nam & ipſum nullum habet ad aſſumptā rationem. Similiter autem euenit Dionyſodoro, qui alia demonſtratione conſtruit problema. In quodam utiq; uetuſto libro (non enim à multorum abſtinuimus inquiſitione) incidimus in Theoremata ſcripta, quæ quidem ex pteſmatibus obſcuritate magna tenebantur: in figuratione errore multiplici conſtituta; quæſitorum quidem habebant ſuppoſitionem, in parte autem gratam Archimedi linguam doricam ſeruabant, & conſuetis Archeo rerum nominibus erant inſcripta, ubi parabole ſectio rectanguli coni nominata eſt, & hyperbole ſectio coni ambligonij, ita ut ex ipſis intelligatur. Non igitur ipſe fuerit, qui quæ in fine promiſſa ſunt, deſcribi ſit proſecutus. Vnde ſtudioſius incumbentes, ipſum quidem rationale, uti ſcriptum fuit, propter errorum multitudinem, ut ſuprà dictum fuit, difficile inuenientes, ipſam ferè mentem denudantes, communius & apertius quantum fieri potuit dictio, conſcripſimus. Vniuerſaliter autem primū Theorema ſcribetur, ut quod de eo dictū eſt, declaret circa diffinitiones. Deinde & his quæ in problemate reſoluta ſunt, accommodabuntur.

Recta data a b, item altera a c, & ſpacio d, proponatur in a b ſumendum punctum, puta e, ita ut ſit ſicut a e ad a c, ita ſpacium d ad quadratum e b. Factum ſit, & ponatur a c ipſi a b ad angulos rectos, & iuncta c e producatē in f, et ducatur per c æquediſtans ipſi a b, ipſa c g, & per b ducatur æquediſtans ipſi a c ipſa f b g, cōcurrens cum utraque harum c e, c g, & compleatur g h parallelogrammum. Et per e ducatur k e l, æquediſtans utriuis harū c h, g f. Et ſit contentum ſub c g, g m æquale ipſi d. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum e b. Sicut autē e a ad a c, ita c g ad g f. Sicut autem c g ad g f, ita quadratum c g ad contentum ſub c g, g f. Igitur ſicut quadratum c g ad contentum ſub c g, g f, ita d ad quadratum e b, hoc eſt ad quadratum k f. & permutatim. ſicut quadratum c g ad d, hoc eſt ad contentum ſub c g, g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratum f k. Verum ſicut quadratū c g ad contentū ſub c g, g m, ita c g ad g m. Igitur ſicut c g ad g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratū f k. Verum ſicut c g ad g m, ipſa f g ſumpta cōmuni altitudine, ita contentū ſub c g, g f, ad contentū ſub m g, g f. Sicut igiē contentū ſub c g, g f ad contentū ſub m g, g f, ita contentū ſub c g, g f ad quadratum f k. Igitur quadratū f k, eſt æquale contento ſub m g, g f. Si igitur circa axem f g deſcribatur parabole per g, ita ut ductæ æquediſtantes ipſi c g poſſint ſecundum g m, ipſa ibit per k: & erit poſitione data, cum g m ſit data magnitudine, quæ cum g c data continet datum d. Igitur punctum k aptatur poſitione datæ parabolæ. Deſcribatur igitur uti dictum eſt, & eſto ſicuti g k. Quoniam rurſus ſpacium h l, æquatur

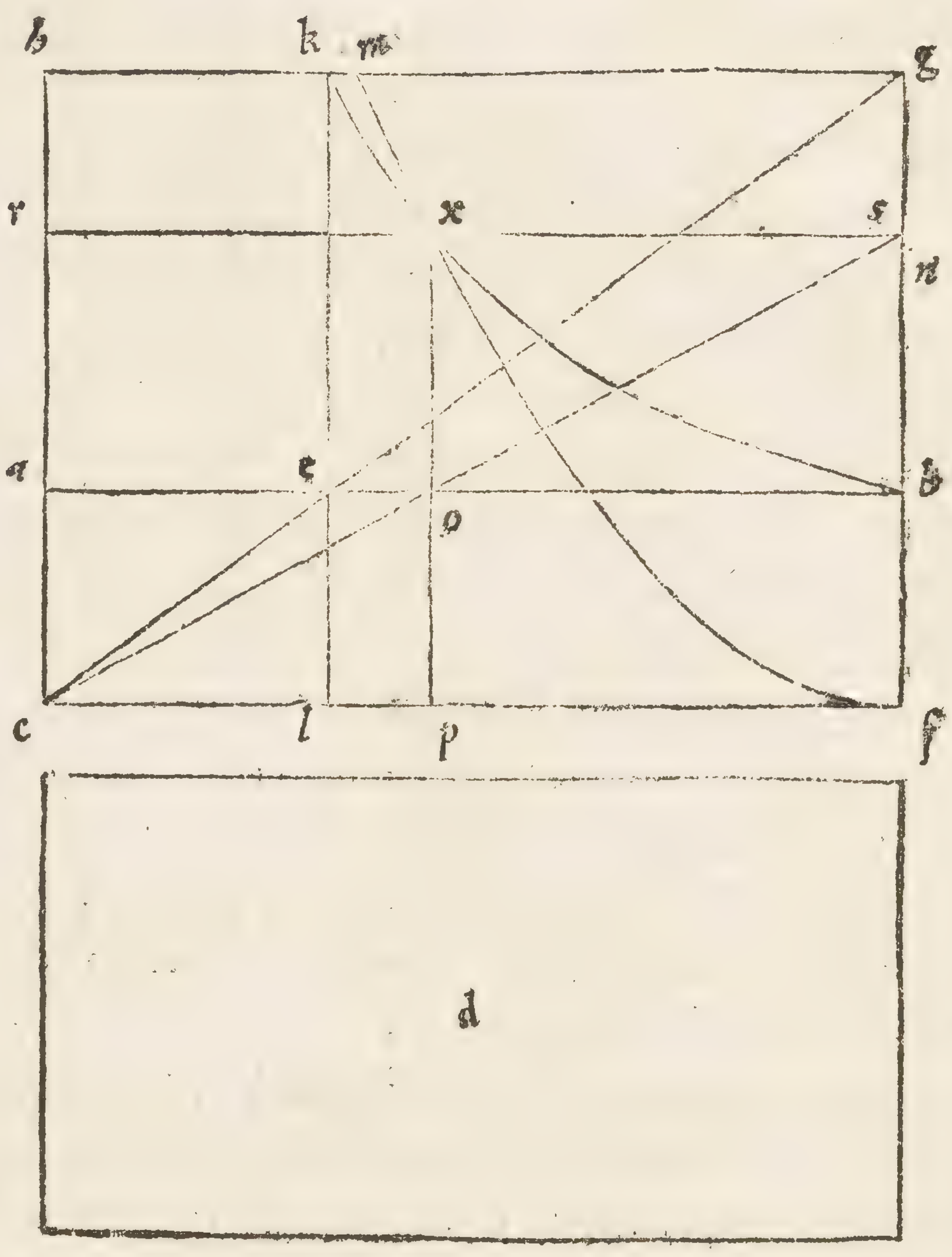
tur

tur ſpacio c b : hoc eſt contentum ſub h k, k l , contento ſub a b, b g. Si per b circa inconcurrentes has h c, c g deſcribatur hyperbole, tranſibit per k ex conuerſo octaui theorematis libri ſecundi Elementorum conorum Apollonij: & erit poſitione data, cum utraq; harũ h c, c g ſit data. amplius quidem, & b poſitione datũ eſt. Deſcribatur ut dictum eſt, & eſto ſicut b k. Igit̃ k aptatur hyperbolę poſitione datę. Item aptatum eſt parabolæ, poſitione datæ. igitur k datum eſt, & eſt perpendicularis ab ipſo k e ad datam poſitione a b. Igitur e datum. Quoniam igitur ſicut e a ad datam ipſam a c, ita d datum ad quadratum e b. Duorũ igitur ſolidorum, quorũ baſes hæ, quadratũ e b, & d: altitudines uero hæ e a, a c, mutua proportione habent̃ baſes cum altitudinibus. quare ſolida æqualia ſunt. Igitur quadratũ e b ſuper ipſam e a, eſt æquale d dato ſuper ipſam c a. Verum quadratum b e, ſuper ipſam e a, eſt maximum omnium ſimiliter ſumptorum in ipſa b a. quando ipſa b e eſt dupla ipſi e a, uti demonſtrabitur. Oportet igitur datum ſuper datam non maius eſſe quadrato b e ſuper ipſam e a.



Componetur autem ſic. Eſto data recta a b, & alia item data a c. & ſpacium datum d, & opus ſit ſecare ipſam a b, ita ut ſicut una pars habeat ad datam a c, ita datum ſpacium d ad quadratum reliquæ partis. Sumatur ipſius a b tertia pars a e. Igitur d ſuper ipſam a c, aut maius eſt quadrato b e ſuper ipſam e a, aut æquale ei, aut minus eo. Siquidem igitur maius eſt, non componetur, ut in reſolutione oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum e, efficiet problema. nam ubi ſolida ſunt æqualia, baſes altitudinibus habent̃ mutuæ: & erit ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum b e. Si autem minus eſt d ſuper a c, quadrato b e, ſuper e a componetur, hoc pacto. Statuatur a c ad angulos rectos ad ipſam a b, & ducatur per c æquediſtans ipſi a b ipſa c g. Et per b ducatur b f æquediſtans ipſi a c. educat̃ ad g, & compleatur parallelogrammum f h, & per e ducatur k e l æquediſtans ipſi f g. Quoniam igitur d ſuper ipſam a c minus eſt quadrato e b ſuper ipſam e a: erit ſicut e a ad a c, ita d ad minus quidpiam quadrato e b, hoc eſt quadrato g k. Eſto igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum g m, & ipſi d ſit æquale contentum ſub c f, f n. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d, hoc eſt contentum ſub c f, f n ad quadratum g m. Verum ſicut e a ad a c, ita c f ad f g. Sicut autem c f ad f g, ita quadratum c f ad contentum ſub c f, f g. Ergo quadratum c f, ad contentum ſub c f, f g, ita contentum ſub c f, f n ad quadratum g m: & permutatim, ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita contentum ſub c f, f g, ad quadratum g m. Verum ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita c f ad f n. Sicut autem c f ad f n, f g communi altitudine ſumpta, ita contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g. Sicut igitur contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g, ita contentum ſub c f, f g ad quadratum m g. Igitur quadratum g m æquatur contento ſub g f, f n. Si igitur per f circa axem f g deſcribamus parabolam, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam f n tranſibit per m, deſcripta ſit, & eſto puta m x f. Et quoni-

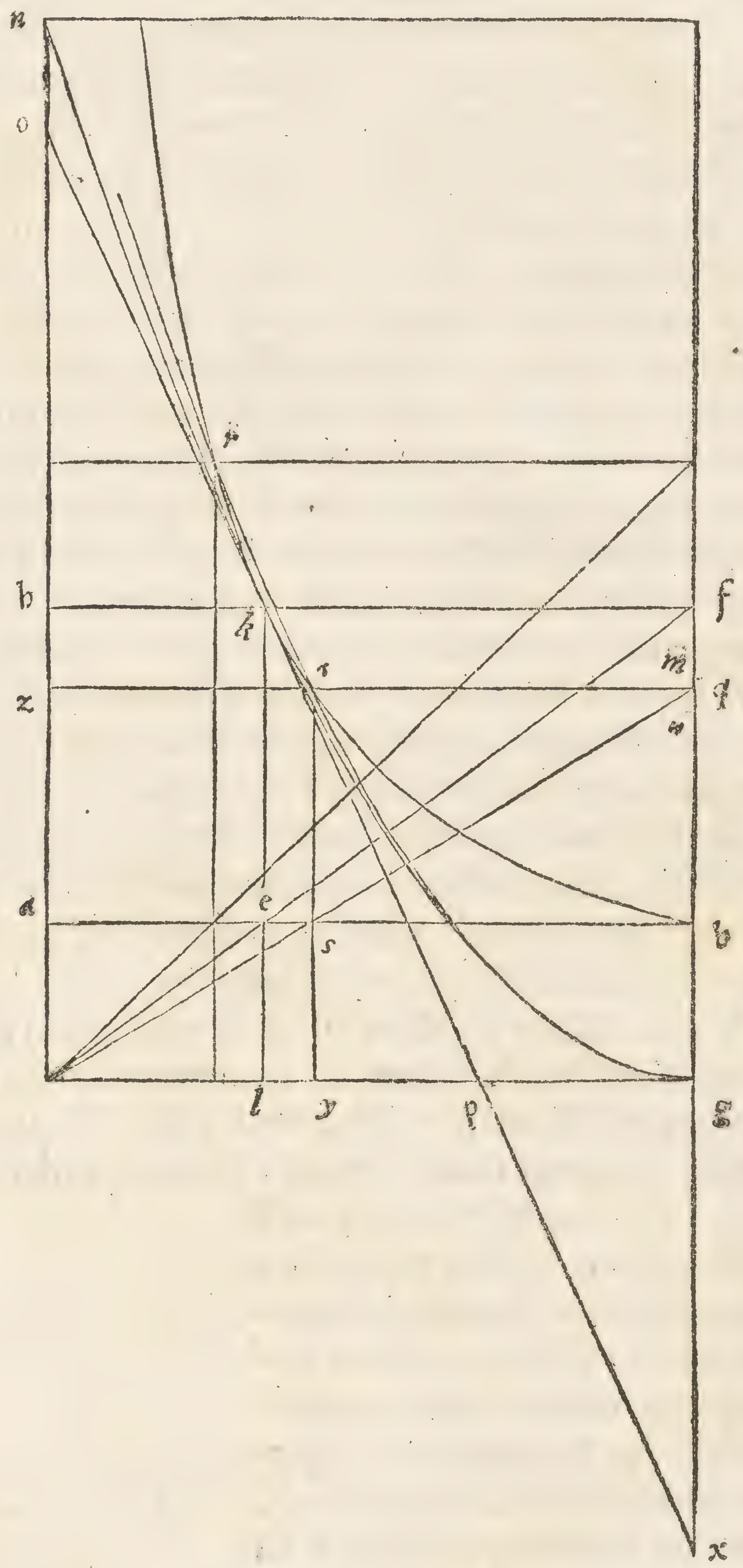
am h l æquatur ipſi a f, hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b f: ſi per b circa incoincidentes h c, c f deſcripſerimus hyperbolem, ipſa tranſibit per k, per conuerſionem octaui theorematis ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Deſcribatur, & eſto puta b k ſecans parabolem puncto x, & ab ipſo x ducatur x o p perpendicularis ad a b, & per x ducatur æquediſtãs ipſi a b, ipſa r x ſ. quoniã itaq; b x k eſt hyperbole, & ipſe h c, c f incoincidentes, & ductæ æquediſtantes r x, x p ipſis a b, b f: contentum ſub r x p eſt æquale cõtento ſub a b, b f. quare r o eſt æquale o ſ. Si igit̃ ab ipſo c iungatur ad s recta, tranſibit per o. peruenerit, & eſto c o ſ. Quoniam igitur ſicut o a ad a c, ita o b ad b ſ: hoc eſt c f ad f ſ. Sicut autem c f ad f ſ, ita f n cõmuni altitudine ſumpta contentum ſub c f, f n, ad contentum ſub ſ f, f n. Igitur ſicut o a ad a c, ita contentum ſub c f, f n ad contentum ſub ſ f, f n. Sed contentum ſub c f, f n eſt æquale ſpacio d, & cõtento ſub ſ f, f n æquatur quadratum ſ x, hoc eſt quadratum b o, propter parabolam. Vt igit̃ o a ad a c, ita ſpacium d ad quadratum b o. Sumptum eſt igitur punctum o, quo problema perficitur.



Quod autem ipſa b e exiſtẽte dupla ipſius a e, quadratum b e ſuper ipſam e a maximũ ſit omniũ ſimiliũ ſumptorũ ſuper ipſam b a, hoc pacto demonſtrabitur. Eſto enim ſicut in reſolutione rurſus recta data ad angulos rectos ipſa a c ipſi a b, & iuncta c e educatur, & concurrat lineæ æquediſtanti ductæ per b ipſi a c in pũcto f: & per puncta c, f ducantur h f, c g, æquediſtãtes ipſi a b: & producatur c a ad h, & huic ducatur æquediſtans k e l per punctum e, & fiat ſicut e a ad a c, ita contentum ſub c g, g m ad quadratum e b. Igitur quadratum e b ſuper ipſam e a erit æquale contento ſub c g, g m ſuper ipſam a c, eo quod duorum ſolidorum baſes altitudinibus mutuò afficiũtur. Dico igitur, contentum ſub c g, g m ſuper ipſam a c maximũ eſſe omnium ſimilium ſuper ipſam b a ſumptorũ. Deſcribatur enim per g, circa axem f g parabole, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam g m, ipſa tranſibit per k, ſicut in reſolutione oſtenſum eſt, & ipſa educta concurret ipſi h c æquediſtanti diametro ſectionis ex uigeſimoſeptimo theoremate primi libri Apollonij Elementorũ conicorũ. Educatur itaq;, & concurrat in puncto n, & per b circa incoincidentes has n c, c g deſcribatur hyperbole, quæ trãſibit per k, ſicuti in reſolutione dictum eſt. Peruenerit igitur, puta b k, & ipſi f g productæ ponatur g x æqualis, & iungatur x k, & producatur in o. Conſtat igitur, quod cõtingit parabolam ex conuerſione trigeſimi quarti theorematis primi libri Elementorum conicorum Apollonij: quoniam b e dupla eſt ipſius e a. ſic enim ſuppoſitum eſt: hoc eſt ipſa k f ipſius k h, & triangulus o h k ſimilis eſt triangulo x f k, & ipſa x k dupla erit ipſius k o, & eſt ipſa x k dupla ipſius k p: quia ipſa x f dupla ipſius x g, & quia

p g

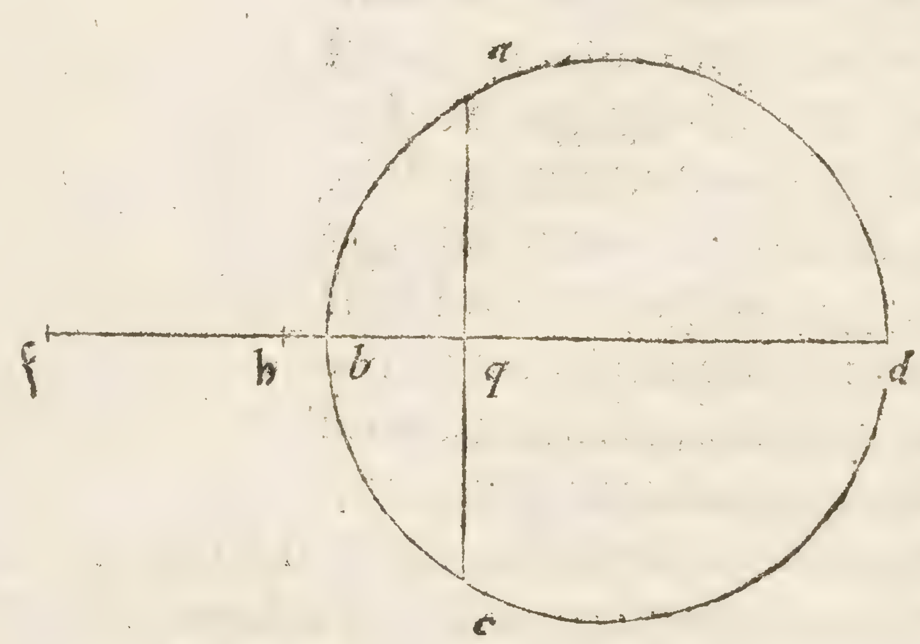
p g eſt æquediſtans ipſi k f, igitur o k eſt æqualis ipſi k p. Igitur o k p contingens hyperbolem, & coniuncta & collibrata cum incoincidentibus in duo æqua diuiditur. applicatur igitur ipſi hyperbolæ, per conuerſionē tertij theorematis ſecundi libri Elementorum conicorū Appollonij. Applicabatur autem & ipſi parabolæ ſecundum idem k. Igitur parabola applicatur ipſi hyperbolæ in pūcto k. Intelligatur igitur & hyperbole producta, puta ad r, & ſumatur in a b quodlibet punctum f, & ducatur per f ipſa τ f y æquediſtans ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in pūcto τ, & ducatur per τ ipſa z τ q æquediſtans ipſi c g. propter hyperbolen igitur & incoincidētes, erit z y æquale ipſi c b: ablato c f communi, fit z f æquale f g: & idcirco recta ab ipſo c ad q producta permeabit per f. permearit, & ſit puta c f q: & quoniam quadratum u q eſt æquale contento ſub q g, g m propter parabolen: quadratum t q minus eſt contento ſub q g, g m. Fiat igitur quadrato t q æquale cōtentum ſub c g, g ω. Quoniā igitur eſt ſicut s a ad a c, ita c g ad g q. Item ſicut c g ad g q, ipſa g ω cōmuni altitudine ſumpta, ita cōtentū ſub c g, g ω ad cōtentum ſub q g, g ω: & ad æquale illi quadratum q t, hoc eſt ipſius b f. Cōtentum ergo ſub q g, g ω ſuper ipſam ſ a, eſt æquale contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a. Cōtentum uero ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, minus eſt contento ſub c g, g m ſuper ipſam c a. Quadratum igitur b f ſuper ipſam f a, minus eſt quadrato b e ſuper ipſam e a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis ſumptis inter puncta, e, a. Verum ſumatur inter puncta e b punctum s. Dico quod & hoc modo quadratū b e ſuper ipſam e a, maius eſt quadrato b s, ſuper ipſam s a. Eiſdem enim præparatis, ducatur per s ipſa s r æquediſtās ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in R. concurrit enim ei propterea, quod æquediſtans eſt incoincidenti: & ipſa r b ducta æquediſtans ipſi a b per r cōcurrat ipſi f g eductæ in pūcto b. & quoniā rurſus proptet hyperbolem ipſum c h eſt æquale ipſi a g, recta ab ipſo c ad b iuncta permeabit per s. Permearit, et ſit puta c s, b. Et quoniā rurſus propter parobolen quadratū a b æquatur cōtento ſub b g, g m: erit quadratum r b minus contento ſub b g, g m. Fiat contentum ſub b g,



g ω æquale quadrato r b. Quoniã igitur eſt ſicut s a ad a c, ita c g ad g b. Verum ſicut c g ad g b, ita communi g ω altitudine ſumpta, contentum ſub c g, g ω ad contentum ſub b g, g ω, hoc eſt ad quadratum r b, hoc eſt ad quadratũ b s. Igitur quadratum b s ſuper ipſam s a, æquatur contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, & contentum ſub c g, g m maius contento ſub c g, g ω. Igitur quadratum b e ſuper e a maius eſt quadrato b s ſuper s a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis inter e b puncta ſumptis. Oſtenſum eſt autem & in omnibus ſumptis inter e a, & in omnibus ſumptis inter e b. Omnium igitur in ipſa a b ſimiliter ſumptorum maximum eſt quadratum b e, ſuper ipſam e a, quando ipſa b e dupla ſit ipſius e a.

Cognoſcere aũt eſt opus, & ea quæ ſequuntur ſecundum dictam deſcriptionem. Quoniam enim oſtenſum fuit quadratum b ſ ſuper ſ a, & quadratum b s ſuper s a, minus eſſe quadrato b e ſuper e a, fieri poteſt, ut ſpacio dato, quod ſit ſuper datam minus quadrato b e ſuper e a, per duo puncta diuiſa ipſa a b, problema fiat ex principio. Hoc autem fiet, ſi intellexerimus circa diametrum q g deſcriptã parabolam, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam g ω. talis enim parabola tranſit omnino per r. & quoniam neceſſariò ipſam incidit in c n æquediſtãtem diametro, conſtat quod ſecat hyperbolen in alio puncto ſuperiore ipſo k, ſicuti iſtic in τ, & perpendicularis ducta ab ipſo r ad ipſam a b, uti iſtic r s ſecat ipſam a b puncto s, ita ut punctum s faciat problema, & fiat quadratum b s ſuper s a æquale quadrato b s ſuper s a ueluti ex prædictis demonſtrationibus patet. Quare cũ duo puncta poſſint in ipſa b a ſumi quibus perficeretur quæſitũ, licet utrum libuerit cuiq; accipere, aut punctum inter e b, aut quod ſit inter e a. Siquidem enim quod inter e b, ut dictum eſt, parabola deſcripta per puncta g t in duobus punctis ſecante hyperbolen, id quod propinquius fuerit ipſi g, hoc eſt axi parabolæ, inueniet id quod eſt inter e b: ueluti iſtic r inuenit s. id quod remotius eſt, inuenit id quod eſt inter e a, ueluti iſtic ipſum t inuenit ipſum ſ.

Vniuerſaliter quidem igitur ſic reſolutum eſt, & compoſitum problema. Vt autem & uerbis Archimedis accommodetur, intelligatur ut in ipſa determinati deſcriptione diametros ſphæræ iſta d b, & quæ ex centro iſta b f, & data f h. Deſcendimus igitur in hoc, dixit, Secare ipſam d f ſecundum q, hoc pacto, ut ſicut q f ad datam, ita datum ad quadratum q d. Hoc autem ſimpliciter dictum, habet determinationem. Si enim datum ſuper datam maius fuerit quadrato d b ſuper b f, tunc fieri nõ poteſt problema, uti oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum b faciebat problema, & hoc modo nihil pertinebat ad Archimedis ex principio propoſitionem. Sphæra enim hoc modo non diuideretur in proportionem datam.



Simpliciter enim dictam habebat determinationem. Additis autem his problematibus iſtic exiſtentibus, ſcilicet duplam eſſe ipſam d b ipſius b f, & hoc, ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h, non habet amplius determinationem. nam quadratum d b datum, ſuper f h datam, minus eſt quadrato d b ſuper b f, quia b f maior eſt ipſa f h. quod cum eſſet, oſtendimus tunc poſſe problema, & inde tunc prouenire. Animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt, conſonare his quæ nos reſoluimus. Primum quidem poſt ſuam reſolutionẽ uniuerſaliter id in quod incidit proferens, dixit, Oportet datam d f ſecare, & facere ſicut q f

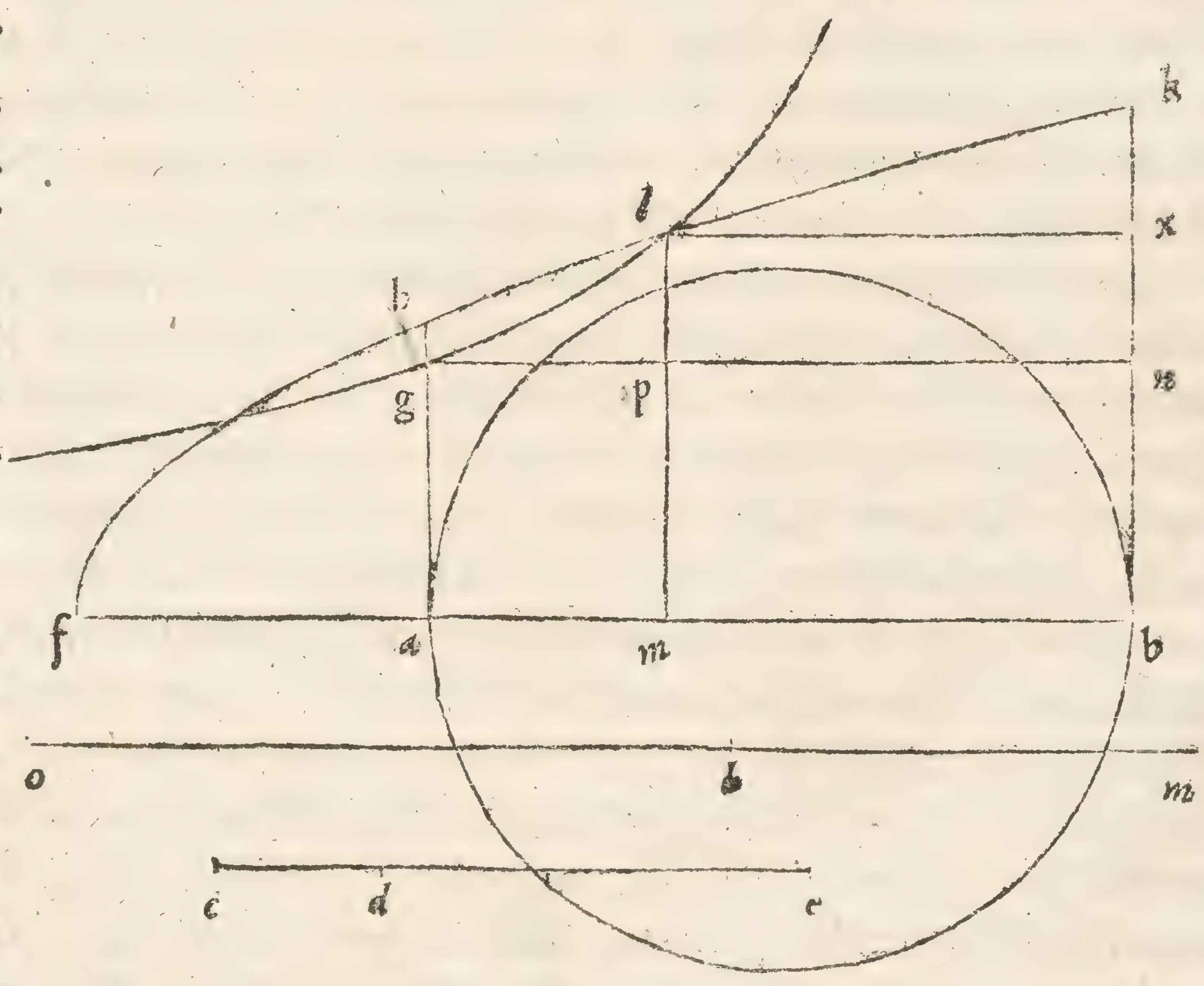
ad

ad datam, ita datum ad quadratum d q. Deinde dicens tanquam uniuerſaliter dictum habeat determinationem: adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem ipſa f h, non amplius habet determinationem magis particularẽ. Reſumit problema, & dicit, quod eſt tale problema hoc: Duabus rectis datis his d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto in b f ipſo h, ſecare ipſam d b pũcto q, non iam ſicut prius ipſam d f dicens, ſed d b oportere diuidi, propter id quod nos ſuprà demonſtrauimus, quod ipſe inſpiciebat duo puncta ſumpta eſſe in d f, quæ facerent problema: unum quidem inter d b, alterum uero inter b f, quorum quod eſt inter d b ad propoſitionem ex principio pertinebat.

Hæc igitur conſentanea uerbis Archimedis, prout potuimus, apertẽ deſcripſimus. Quoniam autem, ut prędictũ eſt, Dionyſodorus nullo pacto deſcriptis in fine ab Archimede prænunciatis incidens: adnixus autem ad inuenienda, quæ non expoſita eſſent, aliam uiam ingreſſus totius problematis, conſcripſit haud indignum inuentionis modum neceſſarium: quem exiſtimaui oportere iſtis connectere fideliter, quantum potuimus. nam & ipſe nimia hominum negligentia magnam demonſtrationum partem multitudine errorum deletam habens, in omnibus quibus nos incidimus ſcriptis ferebatur.

MODVS DIONYSODORI.

DAtam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones eius habeant inuicem proportionem datam. Eſto data ſphæra, cuius diametros a b, & proportio data quam habeat c d ad d e. Oportet igitur ſpheram plano erecto ad ipſam a b ſecare, ita ut portio cuius uertex a, ad portionem cuius uertex b, habeat proportionem, quam habet c d ad d e. producatur b a in f, & ponatur a f dimidia ipſius a b. & quã proportionem c e habet ad d e, habeat eam f a ad a g, & ſit ipſa a g ad angulos rectos ad ipſam a b, & ſumatur a h media proportionalis iſtarum a f, a g. Igitur a h maior eſt ipſa a g, & circa axem f b per f deſcribatur parabole, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam a g, quæ ibit per h, quoniam contentum ſub f a, a g eſt ęquale quadrato a h. Deſcribatĩ itaq;, & ſit puta f h k, & per b ducatĩ k b æquediſtans ipſi a h, & ſecet parabolam pũcto k, & per g circa incoincidentes has f b, b k deſcribatur hyperbole, quæ diuidet parabolen inter h k: ſecet in puncto l, &



ducatur ab l perpendicularis ad a b ipſa l m: & per puncta g, l ducantur ipſi a b æquediſtantes g n, l x. Quoniam igitur ipſa g l eſt hyperbole, & incoincidentes iſtę a b, b k, et æquediſtantes ipſis a g, g n, iſtæ m l, l x, erit contentũ ſub a g, g n æquale contento ſub m l, l x, ex octauo theoremate libri ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Verum ipſa g n eſt æqualis ipſi a b, & ipſa l x ipſi m b. Contentum igitur ſub l m, m b, eſt æquale contento ſub g a, a b. Et quia contentum

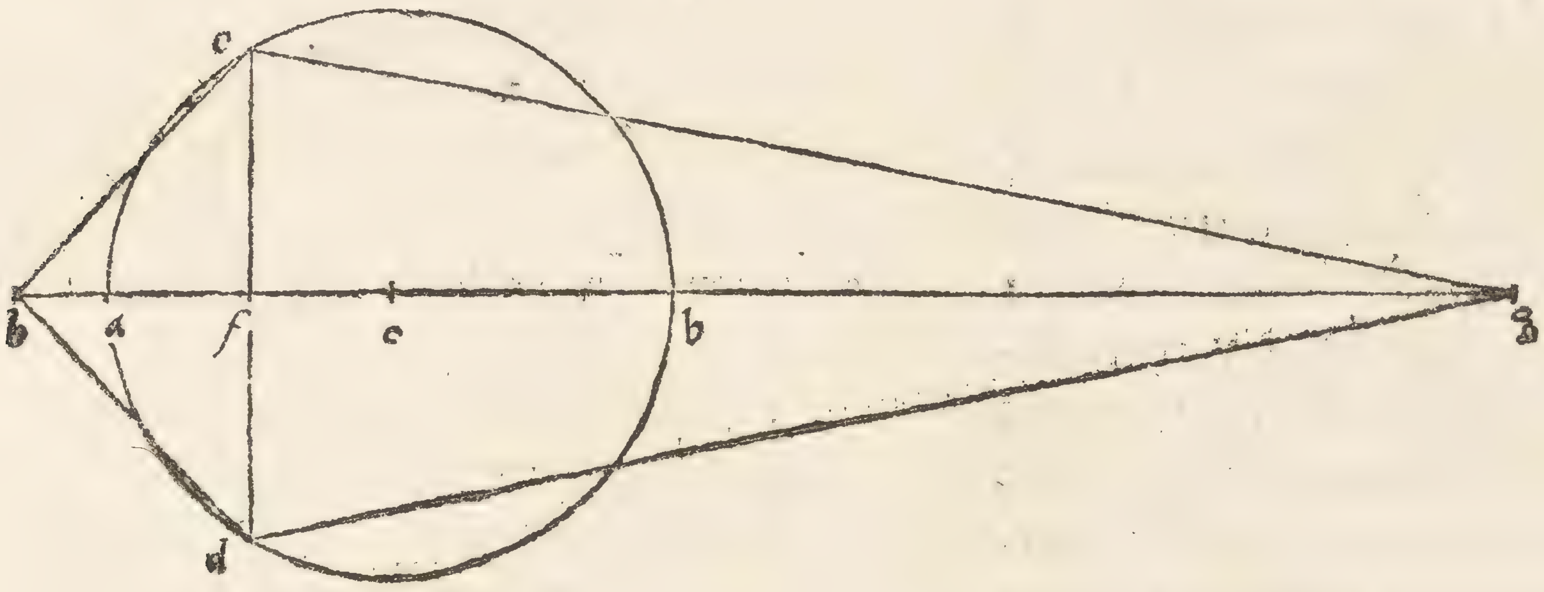
ſub extremis æquatur contento ſub medijs, quatuor rectæ proportionales ſunt. Erit igitur ſicut quadratum l m ad quadratũ g a, ita quadratum a b ad quadratum b m. Et quoniam propter parabolen quadratum l m æquatur contento ſub f m, a g. erit ergo ſicut f m ad m l, ita m l ad a g. Sicut ergo prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, & quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ. Sicut ergo f m ad a g, ita quadratum l m ad quadratum g a. Verum ſicut quadratum l m ad quadratum a g, ita oſtenſum eſt quadratum a b ad quadratũ b m. Igitur ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita f m ad a g. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m. & ſicut circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita f m ad a g. Conus ergo baſem habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi a b, altitudinem uero ipſi a g, æqualis eſt cono habenti baſem circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi b m, altitudinem uero ipſi f m. Nam coni quorum baſes contrario altitudinibus afficiũtur, ſunt æquales. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudo autem ipſi f a, ad conum baſim habentem eandem, & altitudinem ipſam a g, ſe habet ſicut f a ad a g, hoc eſt c d ad e d. Quoniam enim baſes eaſdem habent, ad inuicem ſe habebunt ſicut altitudines eorum. Conus igitur baſim habens circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudinem uero æqualem ipſi f a, ad conum habentẽ baſem circulum cuius quæ ex centro æquatur ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, eſt ſicut c e ad e d. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt a b, altitudinem uero ipſam f a, eſt æqualis ſphæræ: & conus baſim habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero f m, eſt æqualis portioni ſphæræ cuius uertex eſt b: altitudo uero b m, ſicuti deinceps oſtendetur. igitur ſphęra habet ad dictã portionem, eam proportionẽ, quam habet c e ad e d. & diuidenti portio cuius uertex eſt a, altitudo autem a m, ad portionem cuius uertex eſt b, altitudo uero b m, eam habet proportionem, quam c d ad d e. Planum igitur perductum per ipſam l m erectum ad a b ſecat ſphæram in proportionem datam: quod erat faciendum.

Quod autem conus baſem habens circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, æquatur portioni ſphæræ cuius uertex b, et altitudo m b, hoc pacto demõſtrabitur. Fiat enim ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. Igitur conus baſem habens eandem cum portione, altitudinem uero ipſam o m, æquatur portioni. Et quoniam ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. & permutatim, ſicut f m ad m o, ita a m ad m b. Verum ſicut a m ad m b, ita quadratum p m ad quadratum m b: & ita circulus cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, ad circulũ cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi m b. Sicut igitur circulus cuius quæ ex cẽtro eſt æqualis p m, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita m f ad m o. Sic igitur conus baſem habens circulum, cuius quæ ex cẽtro æqualis eſt ipſi m b, altitudinem uero ipſam m f, æquatur cono habenti baſim circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, altitudinem uero ipſam m o. nam baſes eorum altitudinibus contrario afficiuntur. quare & portioni eſt æqualis.

MODVS DIOCLIS.

Scribit autem & Diocles in libro de Pirijs, primum hæc dicẽs: In libro de ſphæra & cylindro Archimedes demonſtrauit, quod omnis ſphæræ portio æquatur cono baſem habenti eandem cum portione, altitudinem uero rectam quandã habentem proportionem ad perpendicularem ductam à uertice ipſius portionis ad baſem, quã utraq; ſimul ea quæ ex centro, & quæ permutatim habetur, ad portionem perpendicularis, ad perpendicularem permutatæ portionis. Vt ſi ſphæra ſit a b c, & ſecetur plano quodam circulo circa diametrum c d conſtituto, & diametro

tro a b, exiſtente centro e: & fecerimus ſicuti utraq; ſimul e a, f a ad f a, ita g f ad f b. Item ſicut utraque ſimul e b, b f ad f b, ita h f ad f a. Oſtenſum eſt portionem c b d ſphæræ, æqualem eſſe cono, cuius baſis quidem circulus circa diametrum c d con



ſtitutus, altitudo uero ipſa f g. Et portionem c a d æqualem eſſe cono habenti eã dem baſem, altitudinem uero h f.

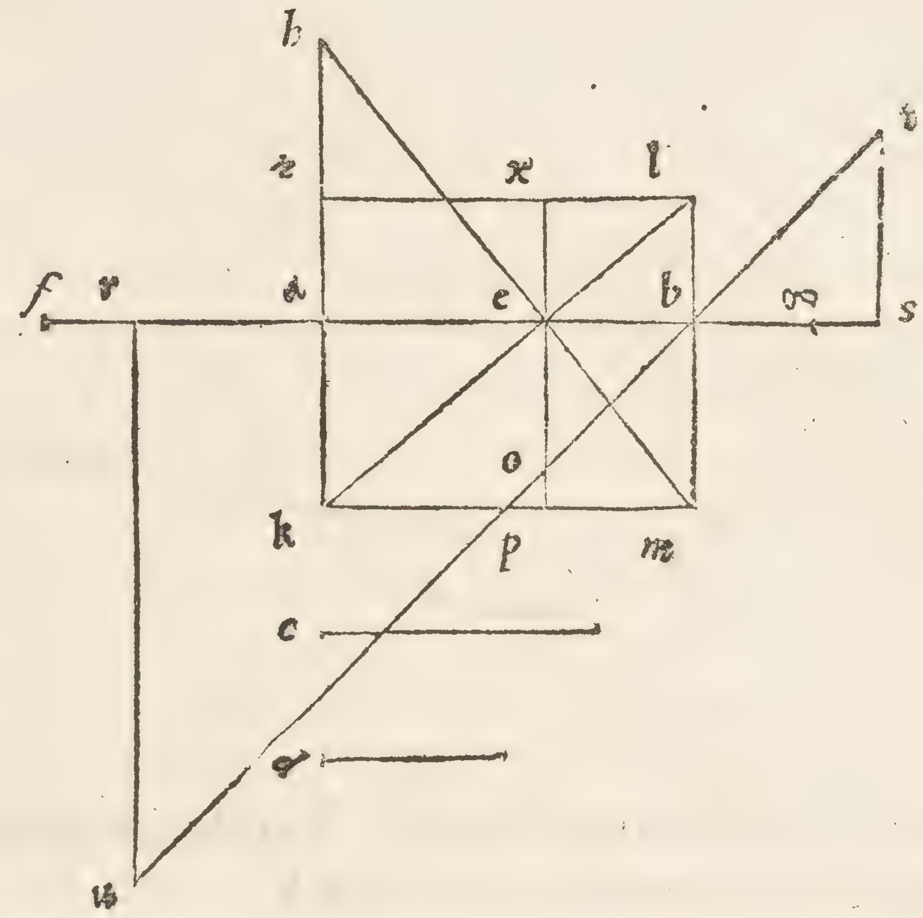
Propoſito itaq; ſibi hoc, datam ſphæram plano ſecare, ita ut portiones ſphæræ ad inuicem habeant proportionem datam, cõſtruens ea quæ ſunt dicta, ait: Proportio igitur data eſt coni baſis, cuius eſt circulus circa diametrum c d, altitudo uero ipſa f h, ad conum cuius baſis eſt eadem, altitudo uero ipſa f g. Etenim hoc demonſtratum eſt: coni, qui in eadem baſe conſiſtunt adinuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: igitur proportio h f ad f g data. & quia eſt ſicut h f ad f a, ita utraq; ſimul e b, b f ad f b: diuidẽti, ſicut h a ad a f. ita e b ad f b. Eadem ratione ſicut g b ad f b, ita ipſa eadem recta ad ipſam f a. Factũ eſt igitur problema tale: Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & data e b, ſecare ipſam a b pũcto f, & adijcere has h a, b g, ita ut portio h f ad f g ſit data. Item ſicut h a ad a f. ita data recta ad ipſam f b. Sicut autem g b ad b f, ita ipſa data recta ad ipſam f a. Hoc autem deinceps eſt demonſtratum. Archimedes enim longius hoc oſtendens, & ſic in alterum problema abigit, quod nõ demonſtrat in libro de ſphæra & cylindro.

Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & proportione quã habet ipſa c ad ipſam d, diuidere ipſam a b pũcto e, & adijcere ei has f a, g b, ita ut ſit ſicut c ad d, ita f e ad e g. Item ſit ſicut f a ad a e, ita quędam recta data ad b e: & ſicut g b ad b e, ita eadem recta data ad e a factum ſit. et ipſi a b ad angulos rectos addãtur h a k, l b m, & ipſi rectæ datæ ponatur utraq; æqualis a k, b m, & iunctæ hæ k e, e m educantur ad l, h. Iungatur autem & k m, & ducatur per l ipſa l n æquediſtans ipſi a b, & per e ducatur x e o p, æquediſtans ipſi n k. Quoniam igitur eſt ſicut f a ad a e, ita m b ad b e, hoc enim ſupponitur. ſicut autem m b ad b e, ita h a ad a e, propter ſimilitudinem triangulorũ. Sicut ergo f a ad a e, ita h a ad a e. Igitur f a eſt æqualis ipſi h a: eadem ratione & b g ipſi b l. Et quoniam eſt ſicut utraq; ſimul h a, a e, ad utrãq; ſimul m b, b e, ita utraq; ſimul k a, a e, ad utramq; ſimul l b, b e. utraque enim earum proportionum eadem eſt ei quę eſt a e ad e b. Contentum igitur ſub utraq; ſimul h a, a e, & ſub utraq; ſimul l b, e b, æquatur contento ſub utraque ſimul k a, a e: & utraq; ſimul m b, b e. Ponatur ipſi k a æqualis harũ utraq; a r, b ſ. Quoniam igitur utraque ſimul h a, a e, æqualis eſt ipſi f e: utraq; autem ſimul l b, b e æqualis ipſi e g: & utraq; ſimul k a, a e æqualis ipſi r e: & utraq; ſimul m b, b e æqualis ipſi ſ e. Et oſtenſum eſt, contentum ſub utraq; ſimul h a, a e, & utraque ſimul l b, b e, eſſe æquale contento ſub utraq; ſimul k a, a e, & utraq; ſimul m b, b e. Contentum igitur ſub f e, e g æquatur contento ſub r e, e ſ. Propter hoc quando

r ea-

r cadit inter a f, tunc ſ exterius ipſo g cadet, & ecõuerſo. Quoniam igitur ſicut c ad d, ita f e ad e g. Sicut autem f e ad e g, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Sicut ergo c ad d, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Contentum autem ſub f e, e g oſtenſum eſt eſſe æquale ſub r e, e s. Eſt igitur ſicut c ad d, ita contentum ſub r e, e s ad quadratum e g. Ponatur ipſi b e æqualis ipſa e o, & iuncta b o educatur utrinque, & à punctis ſ, r ductæ ad angulos rectos hæ ſ t, r y concurrant ei in pũctis y t. Quoniam igitur per b datum, ad poſitione datam a b ducta eſt t y, faciens angulum datũ hunc e b o dimidium recti, ipſa t y erit poſitione data. Et à datis r ſ poſitione, hæ r y, t ſ ductæ ſecant eã punctis t y. Igitur & puncta t, y data. quare et ipſa t y data, poſitione & magnitudine. & quia propter ſimilitudinem triangulorum e o b, ſ t y eſt, ſicut t b ad b o, ita ſ b ad b e: & cõponenti, ſicut t o ad o b, ita ſ e ad e b. Verum ſicut b o ad o y, ita b e ad e r. Igitur per æquam ſicut t o ad o y, ita ſ e ad e r. Verum ſicut t o ad o y, & ſ e ad e r, ita contentum ſub t o y, ad quadratum o y. Sicut autem ſ e ad e r, ita contentum ſub ſ e, e r ad quadratum e r. Sicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub e ſ, e r, ad quadratum e r. Et ſicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub ſ e, e r, ad quadratum e r. Et permutatim, ſicut contentum ſub t o, o y ad contentum ſub ſ e, e r, ita quadratum o y, ad quadratum e r. Quadratum autem o y duplum eſt quadrato e r. quandoquidem & quadratum o b duplum ad quadratum b e. Igitur contentum ſub t o, o y, duplum eſt contento ſub ſ e, e r. Contentum autem ſub ſ e, e r oſtenſum eſt habere ad quadratum e g eam proportionem, quam habet ipſa c ad ipſam d. Et quadratum e g æquatur quadrato x o. nam utraq; e g, x o eſt æqualis utriq; ſimul l b, b e. Igitur contentum ſub t o, o y habet ad quadratum x o eã proportionem, quam habet dupla ipſius c ad ipſam d. Proportio autem duplæ ipſius c ad ipſam d data eſt. Igitur contenti ſub t o, o y, ad quadratum x o proportio data. Si igitur fecerimus ſicut d ad duplam ipſius c, ita t y ad aliam quãdam, puta u. & circa ipſam t y deſcribamus ellipſim, id eſt ſectionẽ coni acutiãguli, ita ut deductæ in angulo ſub x o b, hoc eſt in dimidio recti poſſint ea quæ iuxta u deficientia, ſimili contento ſub t y, & u tranſibit per x per conuerſionem uigeſimi theorematis primi libri Elementorũ conicorum Apollonij. deſcribatur, & ſit puta y x t. Punctum igitur x applicatur ellipſi poſitione datæ. Et quoniam ipſa l k eſt dragonialis ipſius n m, parallelogrammum erit contentum ſub n x p æquale contento ſub a b, b m. Si igitur per b circa incoincidentes has h k, k m deſcripſerimus hyperbolen, ipſa tranſibit per x, & erit poſitione data, quia b punctum poſitione datum eſt. & utraq; harum a b, b m. Et quia hæ h k m incoincidentes deſcriptę ſunt, & eſto puta x b. igitur punctum x aptatur hyperbolæ poſitione datæ. Aprabatur autem & ellipſi poſitione datæ. Igitur punctum x datum, & perpendicularis ab ipſo x e. igitur e datum. Et quoniam eſt ſicut m b ad b e, ita f a ad a e. & a e data eſt: igitur a f data, & eadem ratione ipſa g b data.

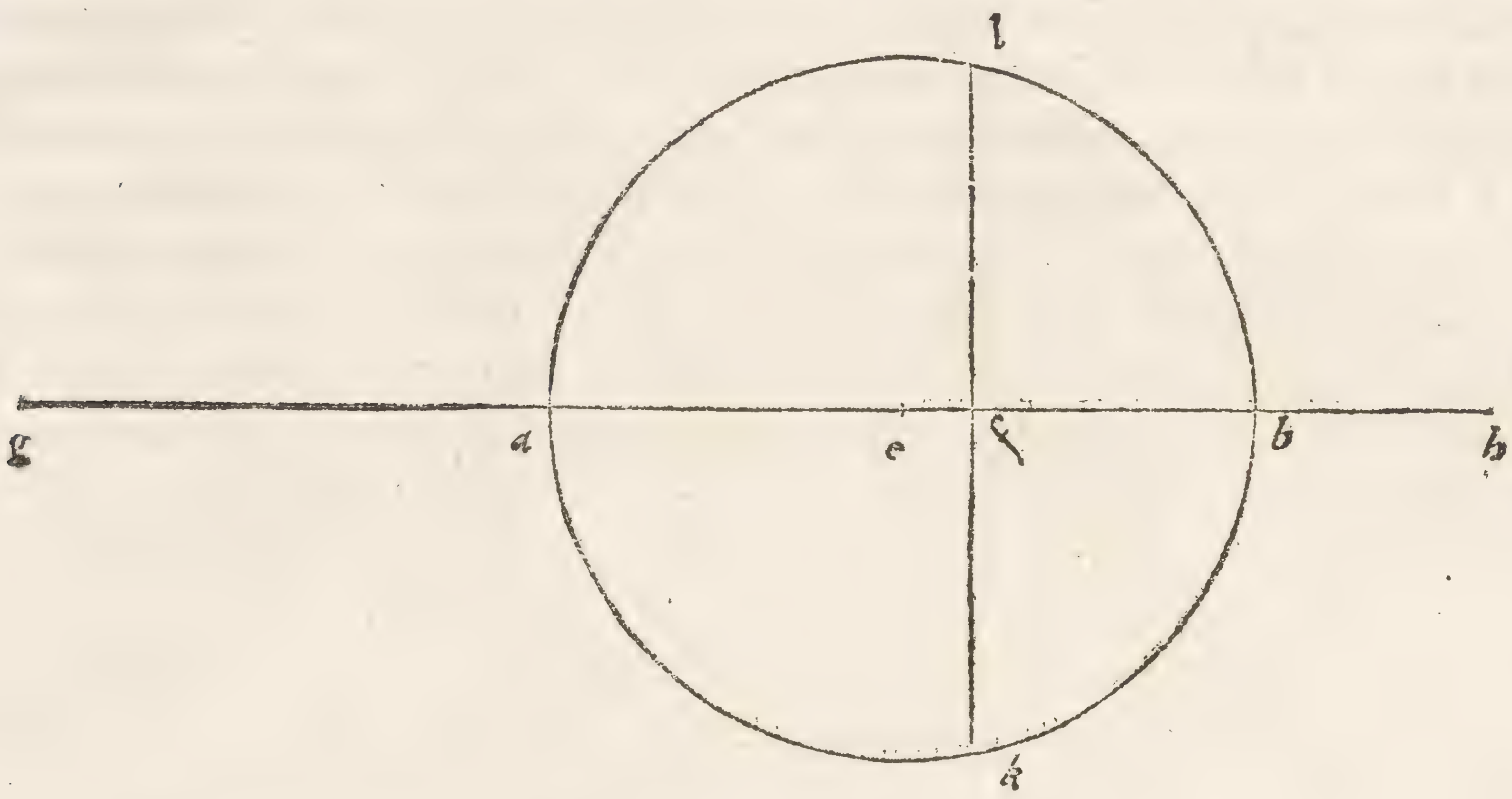
Componitur autem hoc modo, Sicut enim in eadem deſcriptione, eſto data re



cta a b, quam oporteat diuidere, et altera data a k: proportio data ſit c ad d. ducatur ipſi a b ad angulos rectos ipſa b m, æqualis ipſi a k: & iungatur k m, & ponatur utraqꝫ a r, b s æqualis ipſi k a. à punctis r ſ ducantur ad angulos rectos hæ r y, ſ t. Et ad punctum b conſtituatur dimidium recti anguli ſub a b o, & educta b o in utrãqꝫ partē, diuidat ipſas ſ t, r y, punctis t y: & fiat ſicut d ad duplā ipſius c, ita t y ad ipſam u. & circa t y deſcribat̃ ellipſis, ita ut eductæ in dimidio recti poſſint ea quæ adiaceant ipſi u deficientia ſimili contento ſub t y, & u. Et per b circa incoinciden tes has a b, k m deſcribatur hyperbole b x, ſecans ellipſim in x: & ducatur ab x per pendicularis x e ad ipſam a b, & educatur in p, & per x ducatur æquediſtans ipſi a b ipſa l x n, & educantur k a, m b ad l, h: & ipſa m e iuncta, educatur & concurrat ipſi k n in h. Quoniam igitur b x eſt hyperbole, & incoincidentes hæ h k, k m, contentum ſub n x, x p æquatur contento ſub a b, b m, per octauum theorema ſecundi libri Elementorum conicorum Apollonij. Idcirco ipſa k e l recta eſt. Ponat̃ itaqꝫ a f æqualis ipſi h a, & ipſa b g ipſi l b. Quoniā igit̄ eſt ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita ipſa u ad t y. Sicut autem ipſa u ad t y, ita contentum ſub t o, o y ad quadratum x o, per uigeſimum theorema primi libri Elementorū conicorum Apollo nij. Et ideo ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita cōtentū ſub t o, o y, ad quadratū x o. Et quoniam eſt ſicut t b ad b o, ita ſ b ad b e: & componenti, ſicut t o ad o b, ita ſ e ad e b. Verum ſicut b o ad o y, ita b e ad e r. Per æquam igitur, ſicut t o ad o y, ita ſ e ad e r. Sicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub ſ e, r e ad quadratum e r: & permutatim, ſicut contentum ſub t o, o y ad contentū ſub ſ e, e r, ita quadratum o y ad quadratum e r. Verum quadratum o y ad quadratum e r duplum eſt, quia & quadratum b o ad quadratum b e. nam b e æqualis eſt ipſi e o, quia uterqꝫ angulorum ad b & o eſt dimidium recti. Igitur cōtentum ſub t o, o y duplum eſt contento ſub ſ e, e r. Quoniam igitur oſtenſum eſt, ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita contentum ſub t o, o y, ad quadratum x o, & antecedentium dimidia. Sicut ergo c ad d, ita contentū ſub r e, e ſ, ad quadratū x o, & ad quadratū e g, cum x o æqualis ſit ipſi e g, quia utraqꝫ earum eſt æqualis utriqꝫ ſimul l b, b e. Quoniam igitur eſt ſicut utraqꝫ ſimul h a, a e, ad utramqꝫ ſimul m b, b e: ſic utraqꝫ ſimul k a, a e, ad utramqꝫ ſimul l b, b e. Vtraqꝫ enim earum proportionum eſt eadem proportioni a e ad e b. Contentum igitur ſub utraqꝫ ſimul h a, a f, & utraque ſimul l b, b e æquatur contento ſub utraqꝫ ſimul k a, a e, & utraqꝫ ſimul m b, b e. Verum utriqꝫ ſimul h a, a e æqualis eſt ipſa f e: & utriqꝫ ſimul l b, b e æqualis eſt ipſa e g. utriqꝫ ſimul k a, a e æqualis eſt ipſa r e: utriqꝫ ſimul m b, b e æqualis eſt ipſa e ſ. Contentum igitur ſub f e, e g æquatur contento ſub r e, e s. Verum ſicut c ad d, ita contentum ſub r e, e s ad quadratum e g. Et ſicut c ad d, ita contentum ſub f e, e g, ad quadratum e g. Verum ſicut contentum ſub f e, e g ad quadratum e g, ita f e ad e g, & ideo ſicut c ad d, ita f e ad e g. Et quoniam eſt ſicut m b ad b e, ita h a ad a e, & h a æquatur ipſi f a. Sicut ergo m b ad b e, ita f a ad a e. eadem ratione ſicut k a ad a e, ita g b ad b e. Recta igitur data ipſa a b, & altera itē data k a, & proportione c ad d, ſumptum eſt in ipſa a b quoddam punctum, puta e, & adiectæ rectæ hæ f a, g b: & facta eſt f e ad e g in data proportione. Item ſicut data m b ad b e, ita f a ad a e. Sicut autem ipſa k a data ad a e, ita g b ad b e: quod fuerat faciendum.

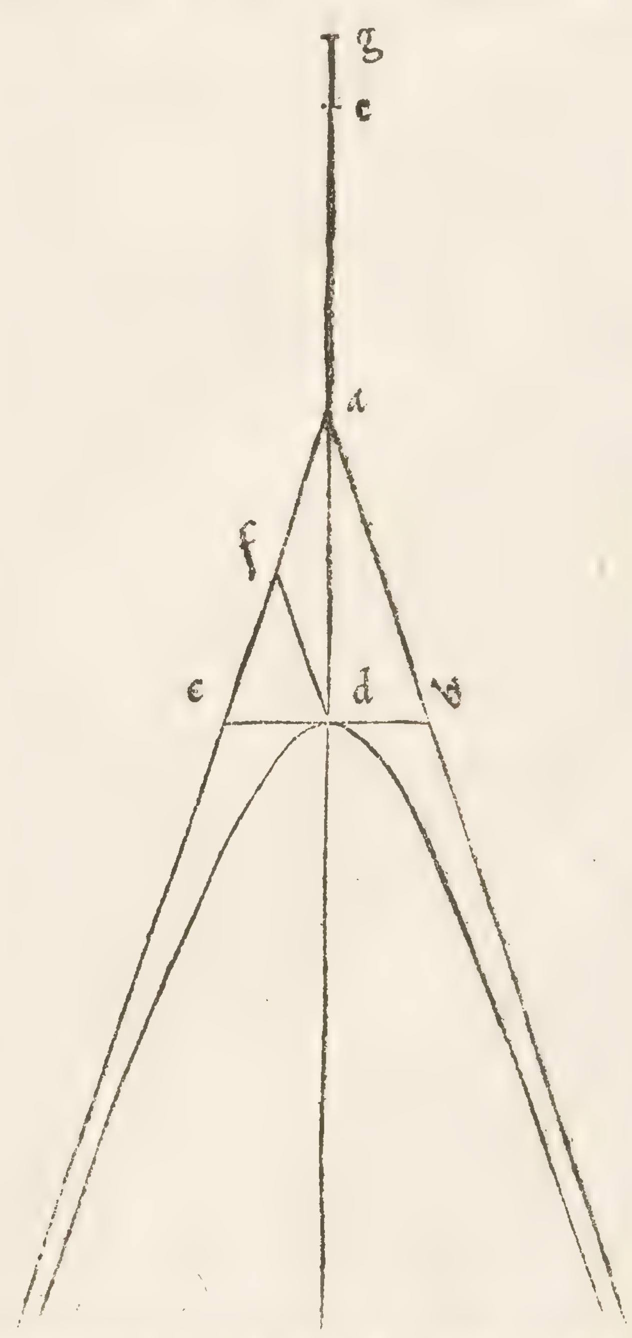
His igitur ita demonſtratis, poteſt data ſphæra ſecari in proportionem datam, hoc modo. Eſto enim datæ ſphæræ diametros a b, proportio autem quam opus ſit partes ſphæræ inter ſe habere, ſit c ad d, centrum ſphæræ ſit c: & ſumatur in a b punctum f, & adijciantur g a, h b, ita ut ſicut c ad d, ita ſit g f ad f h. Item ut ſit ſicut g a ad a f, ita e b data ad b f. ut autem h b ad b f, ita eadem data e a ad a f. Hoc autem quo pacto fieri poſſit, prius demonſtratum eſt. & per ipſum f ducatur k f l ad angulos rectos ipſi a b, & per k l planum perductum erectum ad ipſam a b ſecet ipſam ſphæram. Dico itaqꝫ, eas ſphæræ portiones habere inuicem proportio-

nem quæ eſt c ad d. quoniam enim eſt ſicut g a ad a f, ita e b ad b f. componenti, ſicut f g ad f a, ita utraque ſimul e b, b f, ad b f. Conus igitur baſem habẽs circulum circa diametrum k l, & altitudinem f g, æquatur portioni ſphæræ baſem eandem



habenti, altitudinem autem f a. Rurſus quoniam ſicut h b ad b f, ita e a ad a f. & componenti, ſicut h f ad b f, ita utraq; ſimul e a, a f ad a f. Igitur conus baſem habens circulum circa diametrum k, altitudinem ipſam f h, æquatur portioni ſphæræ eandem baſem habenti, & altitudinem ipſam b f. Quoniam igitur dicti coni eadem in baſe conſtantes, habentur inuicem ſicut eorum altitudines, hoc eſt ſicut h f ad f g, hoc eſt c ad d. Portiones igitur ſphæræ inuicem habent proportionem datam, quod initiò fuerat faciendum.

Quo autem pacto per punctum datum deſcribi circa datas incoincidentes hyperbole debeat, hoc modo oſtendemus: quoniã non inde ponitur in conicis Elementis. Sint duæ rectæ c a, a b complexæ quemcunq; angulum ad a, & detur punctum quoddam puta d, & proponatur per d circa incoincidentes has c a, a b deſcribere hyperbolen. iungatur a d, & ducatur a d e, & ponatur ipſa d a ęqualis ipſi a e, & educatur per d ipſa d f æquediſtans ipſi a b, & ponatur f c æqualis ipſi a f, & iungat̃ c d, & educatur ad b: & quadratũ c b ſit æquale contento ſub d e, e g: & educta a d circa eam deſcribat̃ hyperbole per d, ita ut deductæ poſſint ea quæ iuxta e g addẽtia ſimile cõtento ſub d e, e g. Dico quod hyperbolæ deſcriptæ ſũt incoincidẽtes c a, a b. Quoniã enĩ d f eſt æquediſtãs ipſi b a, & ipſa c f æqualis ipſi f a: igit̃ c d eſt ęqualis ipſi d b. Igit̃ quadratũ c b quadruplũ eſt quadrato d c, & quadratũ c b æquat̃ contento ſub d e, e g. Igit̃ hæc c a, a b ſunt incoincidentes ipſi hyperbolæ, per primum theorema ſecũdi libri Elementorum conicorum Apollonij.



IN COMPOSITIONEM QVARTI.

IN compoſitione autem producens diametrũ ſphæræ ipſam d b, & ponens dimidium eius æquale ipſi b f, & diuidens eam in datam proportionem puncto h, & in d b ſu-

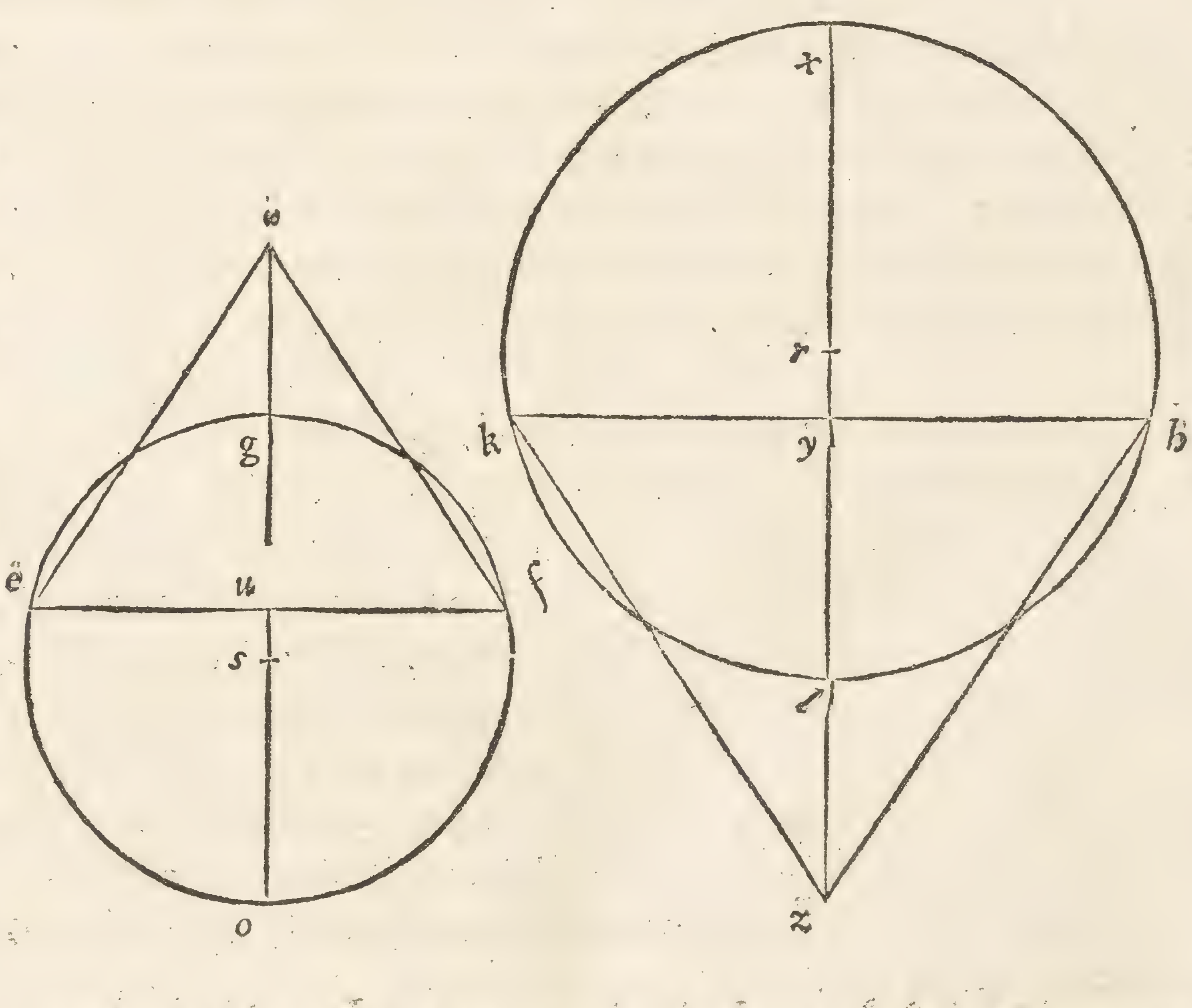
mens

mens q, ita ut ſit ſicut q f ad h f, ita quadratum b d ad quadratum d q, & eadem apparans quæ prius dicit, quod fiat ſicut utraq; ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & ponit ipſum r inter h f. Quod autem hoc ſic habeatur, eſt oſtendendum. Quoniam enim ſicut utraque ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, diuidenti erit k d ad d q, ſicut r b ad q b. Et permutatim, ſicut k d ad r b, ita d q ad q b. Verum d q maior eſt ipſa q b. igitur k b maior r b, hoc eſt f b ipſa b r: quare punctum r inter ipſum b & f cadet. Quod autem & extra h, ſimiliter oſtendetur eis quæ in reſolutione præceſſerunt, in tota theorematis compoſitione. Colligitur enim, quod eſt ſicut r q ad q l, ita f h ad h b. Quare componenti, & propterea fit conſequens ſupradictis, & his quæ ſunt iſtic dicta demonſtratio.

Et per æquam in proportionalitate perturbata, &c. Perturbatā proportionalitatem in Elementis didicimus, quando tribus magnitudinibus, & alijs numero totidem ſit, ſicut antecedens ad conſequens in primis magnitudinibus, ita in ſecundis antecedens ad conſequens. Sicut autem conſequens ad aliud quoddam in primis, ita in ſecundis aliud quoddam ad antecedens. & iſtic igitur oſtenſum eſt, ſicut antecedens r l ad conſequens l d, ita antecedens q f ad conſequens f h. Sicut autem conſequens l d ad aliud quoddam d q, ita aliud quoddam a f ad antecedens q f. Sequitur igitur, ut oſtenſum eſt per æquam in quinto Elementorum, ſicut r l ad l q, ita b f ad f h.

IN QVINTO.

ET quoniam portio e f g eſt ſimilis portioni h k l, conus igitur e f o ſimilis eſt cono z h k. Intelligātur enim deſcriptiones ſeorſum poſitæ, & iunctæ e g, g f, e o, o f, h l, l k, h x, x k. Quoniam igitur portiones e f g, h k l ſimiles ſunt inter ſe, erūt anguli e g f, h l k æquales: quare & eorum dimidia, & recti ſunt hi, qui ad u, y. Igitur reliquus reliquo æqualis. igitur triangulus g u f eſt æquiangulus triangulo l y k. & eſt ſicut g u ad u f, ita l y ad y k. Eadem ratione cum trianguli u f o, y k x ſint inuicem æquianguli, erit ſicut f u ad k y, ita f o ad k x, & u o ad y x. per æquam igitur ſicut g u ad u o, ita l y ad y x. & cōponēti, ſicut g o ad o u, ita l x ad x y. & antecedentiū dimidia ſūt ſ o, & r x. quare per æquam. et cōponenti, ſicut utraq; ſimul ſ o, o u, ad o u, hoc eſt ω u ad u g: ſic utraq; ſimul r x, x y ad x y, hoc eſt z y ad y l. Verum ſicut g u ad u f, ita l y ad y k. per æquam ergo, ſicut ω u ad u f, ita z y ad y k: & conſequentium dupla ſunt e f, & h k. Sicut ergo ω u ad f e, ita z y ad h k. Conorum igitur ω e f, z h k axes ſunt proportionales, et diametri baſium. igitur coni ſunt ſimiles, quod fuerat demonſtrandum.



Proportio autem ω u ad e f data. Quoniam enim portiones ſphærarum datæ ſunt, & diametri baſium datæ, & altitudines portionum. quare e f data, & g u. Igi

tur eorum dimidia data erunt:quare & quadrata earum, & quadratum e u æqua tur contento ſub g u,u o. Si autem datum iuxta datam applicetur,facit latitudinē datam.igitur u o data. Verum & u g, igitur tota diametros ſphæræ data: idcirco & eius dimidia s o data.uerum & o u data:igitur proportio s o ad o u data. & cōponēti,utriuſq; ſimul ſ o,o u ad ipſam o u, proportio data,hoc eſt ω u ad u g,& ipſa u g data.igitur & ω u data. Verum & e f data. quare & proportio ω u ad e f data. Eadem autem utiq; dicerentur in portione a b c, & colligetur proportio q t ad a b data. Et quia a b data eſt, igitur & q t data.

Quod autem ſi portiones datæ ſunt,earum altitudines ſint datæ,antea quidē conſtat. Verum ut hoc quoque coordinationi datorum conſequenter colligi uideatur,dicetur. Quoniam enim portiones ſunt datæ poſitione & magnitudine, & e f data,erit angulus in portione datus. Quare & eius dimidium.& ſi intelligamus iunctam e g,dato eo qui ad u recto,erit reliquus datus,& triangulus e g u datus ſpecie.quare & proportio e u ad u g data erit. & e u data eſt, cum ſit ipſius e f dimidia, igitur u g data. Licet autem & aliter dicere.quoniā e f eſt poſitione data, & à puncto u dato cum ſit in duo æqua diuidens e f,educta eſt u g ad angulos rectos ipſi poſitione datæ,& circumferentia portionis poſitione data. Igitur g datū eſt. Erat autem & u datum. quare & ipſa u g data.

Quoniam eſt ſicut z y ad q t,hoc eſt quadratum b a ad quadratum h k,ita k h ad ipſam d. Quoniam enim factum fuit,ſicut z y ad h k, ita q t ad d:erit permutatim ſicut z y ad q t,ita h k ad d. Verum ſicut z y ad q t,ita quadratum a b ad quadratū h k. Conis enim exiſtentibus æqualibus,baſes eorum altitudinibus ecōtrario afficiunt. Sicut aūt baſes ad inuicē,ita quadrata diametrorū. Sicut ergo quadratum b a ad quadratū h k,ita h k ad d. Et permutatim,ſicut a b ad h k,ita 9 ad d. Quandoquidem proportio b a ad 9, oſtenſa eſt eadem proportioni quadrati a b ad quadratum h k,et item k h ad d,et b a ad 9,eadem eſt proportioni k h ad d. Quare permutatim,ſicut b a ad h k,ita 9 ad d.

IN COMPOSITIONEM QVINTI.

QVoniam itaq; proportionales ſunt a b, h k 9 d,erit ſicut quadratum a b ad quadratum h k,ita h k ad d. Vniuerſaliter enim ſi ſint quatuor rectæ continue proportionales,erit quadratum primę ad quadratum ſecundæ,ſicut ſecunda ad quartam. Quoniam enim ſicut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam,erit permutatim ſicut prima ad tertiam,ita quadratum primæ ad quadratum ſecūdæ. igitur ſicut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ita ſecunda ad quartam.

IN SEXTVM THEOREMA.

QVoniam k l m portio ſimilis eſt portioni a b c, erit ſicut r l ad r n,ita b p ad p h. Si enim iungantur hæ m n,c h, quoniam portiones ſunt ſimiles, erunt anguli ad b & l æquales: & anguli ad m c ſunt recti,igitur reliquus reliquo,& trianguli ſunt æquianguli, & eſt ſicut b h ad h c, ita l n ad n m. Verum ſicut h c ad h p,ita n m ad n r,propter ſimilitudinem triangulorum c p h,& m r n.per æquam igitur,ſicut b h ad h p, ita l n ad n r. quare diuidenti,ſicut l p ad p h,ita l r ad r n.

Proportio autem e f ad b c data,igitur utraq; earum data. Quoniam enim portiones ſphærarum datæ ſunt, & diametri baſium datæ ſunt, & altitudines portionum. quare ipſa a c data eſt, & eius dimidia p c data erit. & b p data eſt,& ambiunt angulum rectum:igitur b c data. Eadem ratione & e f data. quare & proportio b c ad e f data.

IN COMPOSITIONEM SEXTI.

POrtiones ergo circulorum quæ in k m, a c inſiſtunt, ſimiles exiſtunt. Si enim ſicut in reſolutione, iungantur hæ c h, m n, quia anguli ad c m ſunt recti: & c p,& m r ſunt perpendiculares: erunt mediæ proportionales inter partes baſium. quare erit ſicut prima b p ad tertiam p h,ita quadratū primæ b p ad quadratum

dratum ſecundæ c p. Eadem ratione ſicut l r ad r n, ita quadratum l r ad quadratũ r m. Sicut ergo b p ad p c, ita l r ad r m, & latera circa angulos æquales ſunt proportionalia: igitur trianguli æquianguli. igitur anguli ad b l ſunt æquales: & eorum dupli, qui ſunt in portionibus. igitur portiones ſunt ſimiles.

IN SEPTIMVM THEOREMA.

PRoportio igitur utriuſque ſimul e d, d f ad d f data. Quoniam enim proportio utriuſq; ſimul e d, d f ad d f eſt data, ſi magnitudo data habeat ad aliquam ſui partem proportionem datam, & ad reliquam habebit proportionem datam: quare utraq; ſimul e d, d f ad e d habet proportionem datam. Quoniam igitur utraque e d, d f ad utramq; ſimul e d, d f, habent proportionem datam, habebunt etiam inter ſe proportionem datam. Proportio igitur data e d ad d f, & e d data. quare reliqua f e dabitur. Quare & contentum ſub d f, f b, hoc eſt quadratum a f, & ideo a f data erit. quare & tota ipſa a c. Aliter autem, dixeris ipſam a c datam eſſe. Quoniam enim diametros data eſt d b poſitione, & punctum f datum, ut petitũ eſt: & a dato f ducta eſt a c ad angulos rectos, erit ipſa a c poſitione data. uerum & circuli circumferentia: quare ipſa a c puncta data, & ipſa a f c data eſt.

Et quoniam utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionem habet, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. Quoniam enim e d maior eſt ꝙ dimidia ipſius d f, erit utraque ſimul e d, d f, maior quàm ſeſquialtera ipſius d f. Verum utraque ſimul e d, d b, eſt ipſius d b ſeſquialtera: igitur e d, d f ad ipſam d f maiorem proportionẽ habet, quàm e d, d b ad d b. Aut aliter, quoniam ipſa d b eſt maior ipſa d f, alia autem quædam e d: igitur e d habet ad d f maiorem proportionem, quàm e d ad d b. componenti utraq; ſimul e d, d f ad d f, habet maiorem proportionem, ꝙ utraq; ſimul e d, d b ad d b. Cõpoſitio theorematis manifeſta eſt per ea que iſtic dicta ſunt.

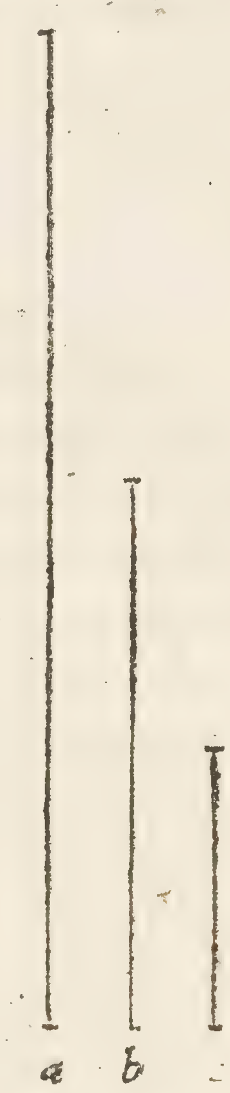
IN OCTAVVM THEOREMA.

IPſa h f ad ipſam f g minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quã habet quadratum b a ad quadratum a d: hoc eſt ipſa b f ad f d. Quoniam enim in triangulo rectangulo ducta eſt ab angulo recto a f perpendicularis, cum trianguli ad perpendicularem ſimiles exiſtant, erit ſicut f b ad b a, ita a b ad b d. Et ſicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, & quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, uti ſuperius oſtenſum fuit. Sicut ergo f b ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b d. Verum ſicut b d ad d f, ita quadratum b d ad quadratum d a. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratũ ſecundæ. Et per æquam ſicut quadratum b a ad quadratũ d a, ita b f ad f d. Colligetur autem idem & aliter hoc modo. Quoniam enim ſicut b f ad f d, ita cõtentum ſub f b, b d ad contentum ſub b d, d f, ipſa b d cõmuni altitudine ſumpta. Eſt autem contentum ſub f b, b d æquale quadrato b a. Cõtento autem ſub b d, d f ęquatur quadratum d a. Sicut ergo quadratum b a ad quadratum a d, ita b f ad f d. Et quoniam h f habet ad f k minorem proportionẽ, quàm h b ad b k. Vniuerſaliter enim ſi ſint duæ magnitudines inæquales, quibus aliæ æquales addantur, maior habet ad minorem maiorem proportionem, quàm compoſitum ad compoſitum. Sunt enim duæ rectæ inequales a b, c d: quibus addantur b e, d f æquales. Dico quod a b ad c d maiorem propornem habet, quàm a e ad c f. Quoniam enim maior eſt a b ipſa c d, a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm c d ad b e, hoc eſt ad d f. Igitur & componenti, a e ad e b maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, ex prædemonſtratis.



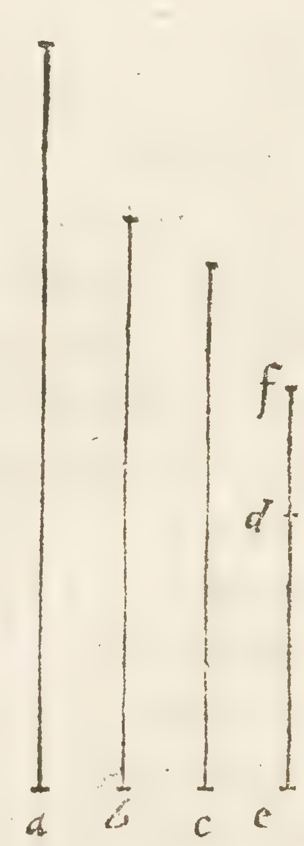
& euerſim, a e ad a b minorem, ꝙ c f ad c d. quare permutatim conſtabit res ipſa.

Contentum igitur ſub h f, f g minus eſt quadrato f k. Si enim ſint tres rectæ continuæ, ſicuti hæ a b c, ita ut a habeat ad b minorem proportionem, quàm b ad c, contentum ſub extremis minus erit quadrato mediæ. Si enim fecerimus ſicut a ad b, ita b ad quandam aliam, ipſa erit maior ipſa c, ſiquidem debeat ad eam habere minorẽ proportionem, quàm c: & tunc erit cõtentum ſub a, & ſub maiore ipſa c, æquale quadrato k. quare contentũ ſub a c minus eſt quadrato b.



Contentum igitur ſub h f, f g ad quadratum f g, minorem proportionem habet, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Sicut enim h f ad f g, ita contentum ſub h f, f g ad quadratum f g. Contentum autem ſub h f, f g, quadrato f g minus eſt: maius autem ad idem maiorem habet proportionem, quàm minus.

Et quoniam b e eſt æqualis ipſi d e, erit igitur contentum ſub b f, f d minus contento ſub b e, e d. contentum autem ſub b e, e d æquatur quadrato e d. contentum autem ſub b f, f d, cum quadrato e f, æquatur eidem. Et cõſtat, quod quanto abfuit à bipertitione ipſum f maiori minus eſt, contento ſub æqualibus. Cum maiore enim eo quod fit ab intermedia diuiſionum, æquatur cõtento ſub æqualibus. quare recta, & ſi per ęqualia diuidatur, per pũctum aliud atq; aliud, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt cõtento ſub partibus remotioribus. Igitur f b ad b e minorẽ proportionem habet, quàm e d ad d f. Vniuerſaliter autem ſi ſint quatuor termini, puta a b, b c, c d, d e: et contentũ ſub a b, d e minus ſit cõtento ſub b c, c d. tunc a b ad b c habet minorem proportionem, quàm c d ad d e. Eſto enim contentum ſub b c, c d, æquale contẽto ſub a b, d f. Eſt igitur ſicut a b ad b c, ita c d ad d f: & d f eſt maior d e: igitur c d habet ad d e maiorem proportionem, quàm ad d f. Quare a b habet ad b c minorem proportionem, quàm c d ad d e.



Eſt igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k. Quoniam enim quadratum b n æquatur cõtento ſub h b, b k. erũt tres rectæ proportionales, ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. & ſicut prima h b ad tertiam b k, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, hoc eſt quadratum b n ad quadratum b k, uti ſuperius demonſtratũ fuit. Rurſus quoniam eſt ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. Componenti, ſicut h n ad b n, ita k n ad b k: & permutatim, ſicut h n ad n k, ita b n ad b k. Igitur ſicut quadratum h n ad quadratum n k, ita quadratum n b ad quadratum b k. Verũ ſicut quadratum n b ad quadratum b k: ita eſſe oſtenſum eſt h b ad b k. Igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k.

Quadratum autem h f, ad quadratum f k, maiorem habet proportionẽ, quàm quadratum h n ad quadratum n k. Rurſus duabus inæqualibus h f, k f adijciatur n f, & per ſupradictum habet h f ad f k, maiorem proportionẽ, quàm h n ad n k. quare & earum duplæ. igitur quadratum h f ad quadratum f k, maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k, hoc eſt h b ad b k, hoc eſt h b ad b e, hoc eſt k f ad f g.

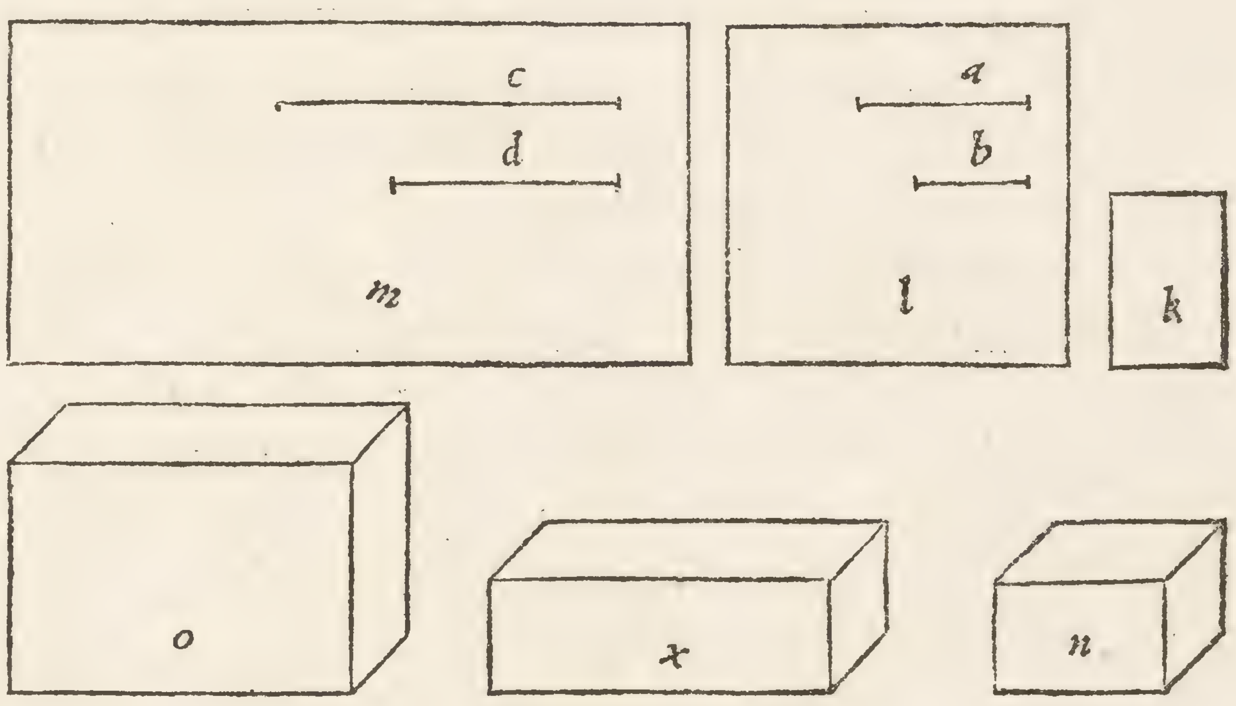
Igitur h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſeſquialteram eius, quæ eſt k f ad f g. Intelligantur enim ſeorſum poſitæ rectæ, puta a b, c, d: ita ut quadratum

tum a b ad quadratum c maiorem habeat proportionẽ, quàm c ad d. Dico quod a b ad d maiorem habet, quàm ſeſquialteram eius quam habet c ad d. Sumatur enim media inter c & d proportionalis e. Quoniam igitur quadratum a b ad quadratum c maiorem proportionem habet, quàm c ad d. Verum quadrati a b ad quadratum c, eſt proportio dupla, eius quæ eſt à b ad c. Illa uero quæ eſt c ad d, dupla eſt eius quę eſt c ad e. Igitur a b habet ad c maiorem proportionem, quàm c ad e. Fiat autem ſicut e ad c, ita c ad b f. Et quoniam quatuor rectæ conſequenter ſunt proportionales b f, c, e, d: igitur b f habet ad d proportionem, quæ eſt b f, ad c triplicatam. Idem eſt c ad e. Habet autem & c ad d proportionẽ, quæ eſt c ad e duplicatam. Igitur b f ad d habet proportionem ſeſquialteram, eius quæ eſt c ad d. Quare a b ad d maiorem proportionem habet, quàm ſeſquialteram eius, quam habet c ad d.



LIMMA AD SEQVENTIA.

SVnto quatuor termini, a b c d. Dico quod proportio compoſita ex his, ex contento ſub a b, ad quadratum c, & ex proportione b ad d, eadem eſt proportioni collectæ ex contento ſub a b, ſuper ipſam b ad quadratum c, ſuper ipſam d. Eſto itaque contento ſub a b æquale k, & quadrato c æquale l, & fiat ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur proportio k ad m componit̃ ex k ad l, hoc eſt contenti ſub a b ad quadratum c: & l ad m, hoc eſt b ad d. Etenim k multiplicans b faciat n, ipſa uero l multiplicans b faciat x, & multiplicans d faciat o.



Quoniam igitur contentum ſub a b eſt k, & k multiplicans b facit n: igitur n erit contentum ſub a b, ſuper b. Rurſus quoniam quadratum c eſt l, & l multiplicans d facit o, & multiplicans b facit x: igitur o eſt quadratum c ſuper d. quare proportio contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratũ c ſuper d, eadem eſt proportioni n ad o. Oportet igitur oſtendere, quod proportio k ad m eſt ſicut n ad o. Quoniam uterq; k l multiplicans b, produxit utrumq; n x. Eſt igitur ſicut k ad l, ita n ad x. Rurſus quoniam l multiplicans utrumq; b d produxit, utrumq; x o erit ſicut b ad d, ita x ad o. Verum ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur ſicut l ad m, ita x ad o. Igitur hi k l m ſunt bini, & bini cum his n x o, in eadem proportione. Per æquam igitur ſicut k ad m, ita n ad o. Et eſt k ad m proportio eadem compoſitæ ex cõtento ſub a b ad quadratũ c, & ex ea quam habet b ad d. Itẽ n ad o eſt eadem proportio proportioni contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratum c ſuper d. Igitur proportio compoſita ex proportione contenti ſub a b ad quadratum c, & ex b ad d, eadẽ eſt proportioni contenti ſub a b ſuper b ad quadratum c ſuper d. Manifeſtum autem eſt, quod cõtentum ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a. Quoniam enim ſicut a ad b, ita contentum ſub a b ad quadratum b, ſumpta b communi alti-

tudine

tudine: ſi quatuor termini fuerint proportionales, contentum ſub extremis æqua tur contento ſub medijs. Contentum igitur ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a.

IN ALITER OCTAVI.

DIctum eſt in præaſſumptis, quod ſi duarum magnitudinū medium quoddam ſumatur, proportio extremitatum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium. Similiter fiet, & ſi multa media ſumātur extremi tatum, proportio componitur ex proportionibus quas habent media conſequen ter collecta inter ſe. Et iſtic dicit, quod proportio portionis b a d ad portionē b c d cōponitur ex ea quam habet portio b a d ad conū cuius baſis circulus circa diame trum b d, uertex uero punctum a. Et idem conus ad conum baſem eandem habētem uerticem punctum c. Et dictus conus ad portionem b c d, portione uidelicet d a b, & ipſa d c b extremis, ſumptis medijs dictis conis. Verum portionis b a d ad conum b a d eſt proportio g h ad h c, per corolarium ſecundi theorematis ſecundi libri. Dicebatur enim, portionem ad conum in ſeipſa conſtitutum habere eā pro portionem, quam habet utraq; ſimul quæ ex centro ſphæræ, & altitudo reliquæ portionis ad altitudinem reliquæ portionis. Proportio autem coni b a d ad conum b c d eſt, quæ a h ad h c. Quoniam enim eiuſdem baſis exiſtentes inuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: coni autem b c d ad portionem b c d ſicut a h ad h f, propter corolarium dictum conuerſim ſumptum. Quare proportio portionis b a d, ad portionem b c d, componitur ex proportione g h ad h c, & a h ad h c, & a h ad h f. Proportio autem compoſita ex g h ad h c, & a h ad h c, eſt ſicut proportio contenti ſub g h, h a ad quadratum h c. nam parallelogramma æquiangula habent inuicem proportionem compoſitam ex proportione laterum. Proportio au tem compoſita ex proportione contenti ſub g h, h a ad quadratum c h, & ex proportione a h ad h f eadem eſt proportioni contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratū c h in h f, ut oſtenſum eſt in limmate præaſſumpto. Proportio autem contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratum c h in h f, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Et hoc quoq; demonſtratum fuit in præaſſumpto. Proportio igitur portionis ad portionem, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Quoniam igitur oſtendere oportet, quod portio ad portionem minorem habet proportionem, quàm duplam eam quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem: oportet igitur oſtendere, quod proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quā habet ſuperficies portionis b a d ad ſuperficiem b c d, hoc eſt quam habet quadratum a b ad quadratum b c. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b c, ita a h ad h c. Oſtenſum eſt enim hoc in theorematibus præcedentibus. Oportet igitur oſtendere, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quam habet a h ad h c. Verum propor tionis a h ad h c dupla eſt proportio quadrati a h ad quadratum h c. Oſtendere igitur oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratū c h in h f, habet minorem proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h c. Verum ſicut quadratum a h ad quadratum h c, ſumpta h g communi altitudine, ita quadratum a h in h g ad quadratum c h in h g. Igitur oſtendere oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habeat proportionem, quàm idem quadratū a h in h g, ad quadratum h c in h g. Ad quod autem habet idem minorem proportio nem, ipſum eſt maius. Oportet igitur oſtēdere, quod quadratum c h in h f, maius eſt quadrato c h in h g, hoc eſt quod maior ſit h f quàm h g. Eſt autem hoc manifeſtum. inæqualib. enim his a h, h c æquales ſunt additæ f a, c g. Hęc dicens ipſe quidem non induxit compoſitionem, nos autem eam apponemus. Quoniam f h maior eſt ipſa h g, erit quadratum c h in h f, maius eodem in h g. Quare quadra ti

tĩa h in h g ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm idem ad quadratum c h in h g. Verum ſicut quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h g, ita quadratum a h ad quadrarum h c. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem proportionem habet, quàm quadratũ a h ad quadratum h c. Verum proportio quadrati a h, ad quadratum h c, dupla eſt eius quæ eſt a h ad h c. Quadratum igitur a h in h g, ad quadratũ c h in h f minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quæ eſt a h ad h c. Verum portionum proportio eſt oſtenſa eadem ei quæ eſt quadrati a h in o g h, ad quadratũ c h in h f. Et proportio ſuperficierum ea eſt, quam habet a h ad h c. Portio igitur ad portionem habet minorẽ proportionẽ, quàm ſit ea duplicata, quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiẽ.

Deinceps autem reſoluens reliquam partem theorematis, inducit: Dixi iam quod portio maior habet ad minorem, maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem. Verum portionum quidem proportio oſtẽſa eſt eadem illi quam habet quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Proportionis igitur ſuperficiei ad ſuperficiem illa eſt ſeſquialtera, quã cubus a b habet ad cubum b c. nam eius quę eſt a b ad b c, illa dupla eſt quæ eſt quadrati a b ad quadratũ b c. tripla uero quę eſt cubi a b, ad cubum b c. Sicut enim a b ad b c, ita a h ad h b, propter ſimilitudinem triangulorum a h b, a b c. Si autem ſint quatuor proportionales rectæ, ſolida quoq; ab eis ſimilia inter ſe & ſimiliter deſcripta ſunt proportionalia. quare cubus a h ad cubum h b habet proportionẽ ſeſquialteram eius quam habet quadratum a b ad quadratum b c. hoc eſt ſuperficies ad ſuperficiem. Verum ſicut portio ad portionem, ita quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Dico igitur, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quàm quadrati a h ad quadratum h b, & ipſius a h ad h b. nam proportio quadrati a h ad quadratum h b, aſſumpta ea quæ eſt a h ad h b, eadem eſt ei quæ eſt cubi a h ad cubũ h b. nam utraq; eiuſdem eſt tripla. Proportio autem quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eſt ea quæ eſt quadrati a h ad contentum ſub c h, h b. Quoniã enim proportio a h ad h b eadem eſt proportioni b h ad h c, ipſa b h media proportionali exiſtente, proportio quadrati a h ad quadratum h b, cũ proportione a h ad h b eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum portione b h ad h c. uerum proportio b h ad h c eadem eſt proportioni quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, ſumpta b h communi altitudine. quare proportio quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Verum proportio quadrati a h ad contentum ſub b h, h c, eſt compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, quadrato b h ſumpto medio. quare proportio quadrati a h ad quadratũ h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad contentũ ſub b h, h c. quadrati aũt a h ad contentum ſub b h, h c, proportio eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad contentũ ſub b h, h c in h g, ſumpta cõmuni altitudine h g. Dico item, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorẽ habet proportionem, ꝙ quadratum a h in h g, ad contentũ ſub c h, h b in h g. Ad quod aũt idem maiorem habet proportionem, illud minus exiſtit. Oſtendendum igitur, quadratũ c h in h f eſſe minus contento ſub b h, h c in h g. Idẽ eſt ac ſi oſtendatur, quod quadratũ c h ad contentũ ſub c h, h b minorem habeat proportionẽ, ꝙ h g ad h f. Si enim fuerint quatuor termini, ueluti iſtic ſunt, quadratum c h contentum ſub c h, h b, & h g, et h f: & contentũ ſub extremis minus ſit contento ſub medijs, tunc primus ad ſecundũ minorem proportionem habet, quàm tertius ad quartum, uti ſuprà oſtenſum fuit. Rationabiliter autẽ oportuerat oſtendere, quadratum c h in h f maius eſſe contento ſub c h, h b in h g. quod idem eſt ac ſi demõ-

ſtretur quod quadratum c h ad contentum ſub c h, h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f. Verum ſicut quadratum c h ad contentum ſub c h, h b, ita c h ad h b. Oportet oſtendere quod c h ad h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f: hoc eſt h g ad h f maiorem habet proportionem, quàm c h ad h b. Ducatur ab e k ad angulos rectos ipſi e c, & ab ipſo b perpendicularis ſupra eam b l. Reliquum nobis eſt oſtendere, quod g h ad h f maiorem proportionem habeat, quàm c h ad h b. Eſt autem ipſa h f æqualis utrique ſimul h a, k e. nam a f æquatur ei quæ ex centro. Oſtendendũ eſt ergo, quod g h ad utramque ſimul h a, k e maiorẽ habeat proportionem, quàm c h ad h b. Et ablata ab ipſa g h ipſa c h, & ab ipſa k e ipſa e l, æquali ipſi b h, oportebit oſtendere quod reliqua c g ad reliquam utranque ſimul a h, k l maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Quoniam enim oportet oſtendere, quod g h ad utramque ſimul h a, k e maiorem proportionem habeat quàm c h ad h b. Et permutatim, g h ad h c maiorem habeat proportionem, quàm utraque ſimul h a, k e ad h b, hoc eſt ad l e. Et diuidenti g c ad c h maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul h a, k l ad l e, hoc eſt b h. Permutatim quoque g c ad utramque ſimul h a, k l maiorem habet proportionem, quàm c h ad b h. Item ſicut c h ad b h, ita b h ad h a, hoc eſt l e ad a h. Quoniam igitur g c ad utramque ſimul h a, l k maiorem habet proportionem, quàm l e ad a h. Et permutatim, quoniam c g, hoc eſt k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a. diuidenti, k l ad l e maiorem proportionem habet, quàm ipſa k l ad h a, hoc eſt quod minor eſt l e ipſa h a.

Deinceps autem nos compoſitionem adijciemus. quoniam l e minor eſt a h, habebit k l ad l e maiorem proportionem, quàm k l ad a h. Componenti habet k e ad l e maiorem proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a. Ipſa uero l e eſt æqualis ipſi b h. Igitur g c ad b h maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, a h ad a h. Permutatim igitur, g c ad utramque ſimul k l, a h maiorem proportionem habet, quàm b h ad h a, hoc eſt c h ad h b. Permutatim ergo g c ad c h maiorem proportionem habet, quàm utraque ſimul k l, a h ad h b. Componenti igitur g h ad h c maiorem proportionem habet, quàm utraque ſimul k l, a h, h b ad h b, hoc eſt utraque ſimul a h, k e ad h b. Eſt autem k e æqualis ipſi a f, igitur permutatim g h ad h f maiorem proportionem habet quàm c h ad h b. Sicut autem c h ad h b, ita quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Igitur ipſa g h ad h f maiorem habet proportionem, quàm quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Et per prius dicta quadratum c h in h f minus eſt cõtento ſub c h, h b. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm ipſum quadratum a h in h g, ad contentum ſub c h, h b in h g: hoc eſt quadratum a h ad contentum ſub c h, h g. Proportio autem quadrati a h ad contentum ſub c h, h b, ſumpto medio quadrato b h, cõponitur ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Proportio autem quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, eadem eſt proportioni b h ad h c, hoc eſt a h ad b h. Igitur quadratum a h in g h, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h b cum proportione a h ad h b. Proportio autem compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & ipſa a h ad h b, eadẽ eſt proportioni cubi a h ad cubum h b, hoc eſt cubi a b ad cubum b c. Quadratũ igitur a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm cubus a b ad cubum b c. Verum proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f, eſt oſtenſa eadem eſſe proportioni portionum. Proportio uero cubi a b ad cubum b c oſtenſa eſt eſſe ſeſquialtera proportioni ſuperficierũ. Portio igitur ad portionem habet maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem.

IN

IN NONVM THEOREMA.

CONſtat autem, quod ipſa b a minor eſt ipſa a k, quàm dupla potẽtia. ea uero quę ex centro, maior quàm dupla. Coniũcta enim ab ipſo b ad cẽtrum b o, & angulo ad centrum facto obtuſo b o a, erit quadratum a b maius quadratis late rum angulum obtuſum complexorum. cumq; ſint ęqualia, quadrato unius eorũ, puta quæ ex centro eius, maius erit quàm duplum. Item cum quadratum a b ſit æquale quadratis a k, b b, & quadratum a k ſit maius quadrato k b, erit quadratũ ab minus quàm duplum quadrati a k. Et hæc quidem in figura in qua eſt ſignũ tale ✓. In altera uero figura contraria iſtis conuenienter dicentur.

Eſto e n æqualis ipſi e l, & à circulo circa h f diametrũ conus eſto uerticem habens punctum n. Iſte autem æquatur hemiſphærio ſecundum circumferentiam h e f. Quoniam enim cylindrus baſem habens circulum circa diametrum h f, altitudinem d e, eſt triplus coni baſim eandem & altitudinem æqualem habentis, & ſeſquialter hemiſphærij, erit tale hemiſphærium duplum eiuſdem coni. Eſt autẽ conus baſem habens circulum circa diametrum h f, et altitudinem l n, duplus eiuſdem coni. Igitur hemiſphærium ęquatur cono, baſem habenti circulum circa diametrum h f, & altitudinem l n.

Contentum autem ſub r c, a r, maius eſt contento ſub a k, k c, quia habet latus ſuum minus latere minore alterius maius. Dictum eſt enim ſuperius, quod ſi recta diuidatur in duo inæqualia, alio & alio puncto, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt contento ſub remotioribus. Ac ſi dicat, quia latus minus ſuum habeat latere minore alterius maius. nam quanto minus habuerit, tanto diſcedet ab æquipartitione.

Quadratum aũt a r æquatur contento ſub a k, c x. nam dimidiũ eſt quadrati a b. Si enim iungatur b c, quia in triangulo rectangulo ducta eſt à recto angulo perpendicularis b k, & trianguli circa cathetum ſunt ſimiles inuicem & toti, quod ſub c a, a k continetur, æquatur quadrato a b. quare & contentum ſub dimidia ipſius c a & a k, hoc eſt c x, a k, æquatur dimidio quadrati a b, hoc eſt quadrato a r. Maius eſt igitur utrumq; ſimul utroq; ſimul. quoniam contentum ſub c x, a k, æquatur quadrato a r: & contentum ſub a r, r c, maius eſt contento ſub a k, k c. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota fient inæqualia, & maius id quod antea fuerit maius. Contento igitur ſub a r, r c ſi addatur quadratum a r, & cõtento ſub a k, k c contentum ſub c x, a k: fiet contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, maius contento ſub a k, k c, cum contento ſub c x, a k. Verum contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, æquatur contento ſub c a, a r, per ſecundum theorema ſecundi libri Elementorũ. Et contentũ ſub a k, k c, cũ contento ſub c x, a k, æquatur contento ſub a k, k x per primum theorema ſecũdi libri eiuſdem. Igitur contentum ſub c a, a r, maius eſt contento ſub a k, k x. Cõtento autem ſub x k, k a, æquatur contentũ ſub m k, k c. Supponitur enim, ſicut x c ad c k, ita m a ad a k. quare componenti ſicut x k, k c ad k c, ſic m k ad k a: & contentum ſub extremis, æquatur contento ſub medijs. Cõtentum igitur ſub x a, a k, æquatur contento ſub m k, k c. Verum contento ſub x k, k a, maius eſt cõtentum ſub a c, a r. Igitur contentum ſub a c, a r, maius eſt contento ſub m k, k c. quare maiorem proportionem habet ipſa a c ad c k, quàm m k ad a r. Quoniam enim lineæ quatuor rectæ a c, c k, k m, a r ſunt, & contentum ſub prima c a, & quarta a r, maius eſt contento ſub ſecunda c k, & tertia k m: habebit prima a c, ad ſecundam c k, maiorem proportionem, quàm tertia k m ad quartam a r. Quam autem c a habet ad c k, hanc habet quadratum a c ad quadratum b c. iuncta enim b c. Quia itaq; in triangulo rectangulo ab angulo recto eſt ducta cathetus, fit ſicut a c ad c b, ita c b ad c k. Quare ſicut prima a c ad tertiam c k, ita quadratum primæ a c ad quadratum c b. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum a b ad quadratum b k. nam triangulus a b k

 ſimi-

ſimilis eſt triangulo a b c. Eſt igitur ſicut a c ad c k, ita quadratum a b ad quadratũ b k. At uero a c habet ad c k maiorem proportionem, quàm m k ad a r, & antecedentium dimidia, dimidium quadrati a b, quod eſt quadratum a r, ad quadratum b k, maiorem habet proportionem quàm dimidia ipſius m k ad ipſam a r, hoc eſt ipſa m k ad duplam ipſius a r. Verũ quadratum f l æquatur quadrato a r. quoniã ipſa a b poſita eſt æqualis ipſi e f, & ipſa e f eſt ipſi r a potentia dupla. nam ipſa e l æqualis eſt ipſi a r. Et ipſa n l dupla eſt ipſius a r, quia & ipſius l f. Quare quadratum f l ad quadratum b k maiorem habet proportionem, quàm m k ad duplam ipſius a r, quæ eſt æqualis ipſi l n. maiorẽ ergo proportionẽ habet circulus circa diametrum h f conſtitutus, ad circulum circa diametrum b k, quàm m k ad n l. quare conus habens baſem circulum circa diametrum h f, uerticem uero pũctum n, maior eſt cono baſem habente circulum circa diametrum b d, uerticem uero m punctum. Si enim fecerimus ſicut circulus circa diametrum f h, ad circulum circa diametrum b d, ita ipſam k m ad aliam quandam, erit ad minorem ipſa l n. Et erit conus habens baſem circulum circa diametrum f h, altitudinem uero rectam minorem inuentam, æqualis ipſi cono m b d: quia eorum baſes altitudinibus contrà afficiuntur. Et erit minor cono n h x, quia in eadem baſe ambo conſtituti habentur inuicem, uti eorum altitudines. Conſtat igitur, quod hemiſphærium quod eſt ſecundum circumferentiam e f h, maius eſt portione quæ eſt ſecundum circumferentiam b a d.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in ſecundum librum Archimedis de Sphæra & cylindro: expoſitione diſcurſa Mileſio Mechanico Iſidoro noſtro præceptori

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII IN MENSVRATIONEM *circuli Archimedis.*

CONSEQVENS igitur fuit mihi, intentum meum proſequenti, qui ex his quæ ab Archimede ſcripta fuerũt, clarioribus & breuiori diſciplina indigentibus inciderim, & ea quæ utcunque in eis diſcuſſione indiguerint, pro uirib. continua reddere eis, quæ à nobis in libro de Sphæra & cylindro ſcripta ſunt. Cũ uotum ſanè dignũ obtigerit, ut & maioribus, & quib. ampliori cura opus erit, nobis ſit inſiſtendũ: erit utiq; propoſitus nobis deinceps Archimedis libellus, cuius inſcriptio eſt Circuli menſuratio, in quo uiri propoſitionem ex ipſa ſuperſcriptione percipimus. Vult enim oſtendere, cui ſpacio rectilineo ſit circulus æqualis, rem longè ante ipſum à clariſſimis philoſophis quæſitam. Conſtat enim hoc, id quæſitum eſſe quod Hippocrates Chius, & Antiphon cum ſtudioſè inueſtigaſſent, eos nobis paralogiſmos inuenerunt, quos illis exquiſitè cognitos exiſtimo qui Geometricam Eudemi hiſtoriam inſpexerunt, & Ceria Ariſtotelica acceperũt. Verũ eſt quidem hic libellus, uti ait Heraclides in Archimedis uita, ad uſum uitæ neceſſarius. Oſtendit enim circumferentiam diametro triplam & minus ſeptima parte, plus uero quantum ſunt decem ſeptuageſimæprimæ. Hoc autem, dicit, proximè demõſtratum eſt: inuenta quidem uera eſt talis per quaſdam ſpirales recta linea, quæ ſit æqualis circumferentiæ dati circuli.

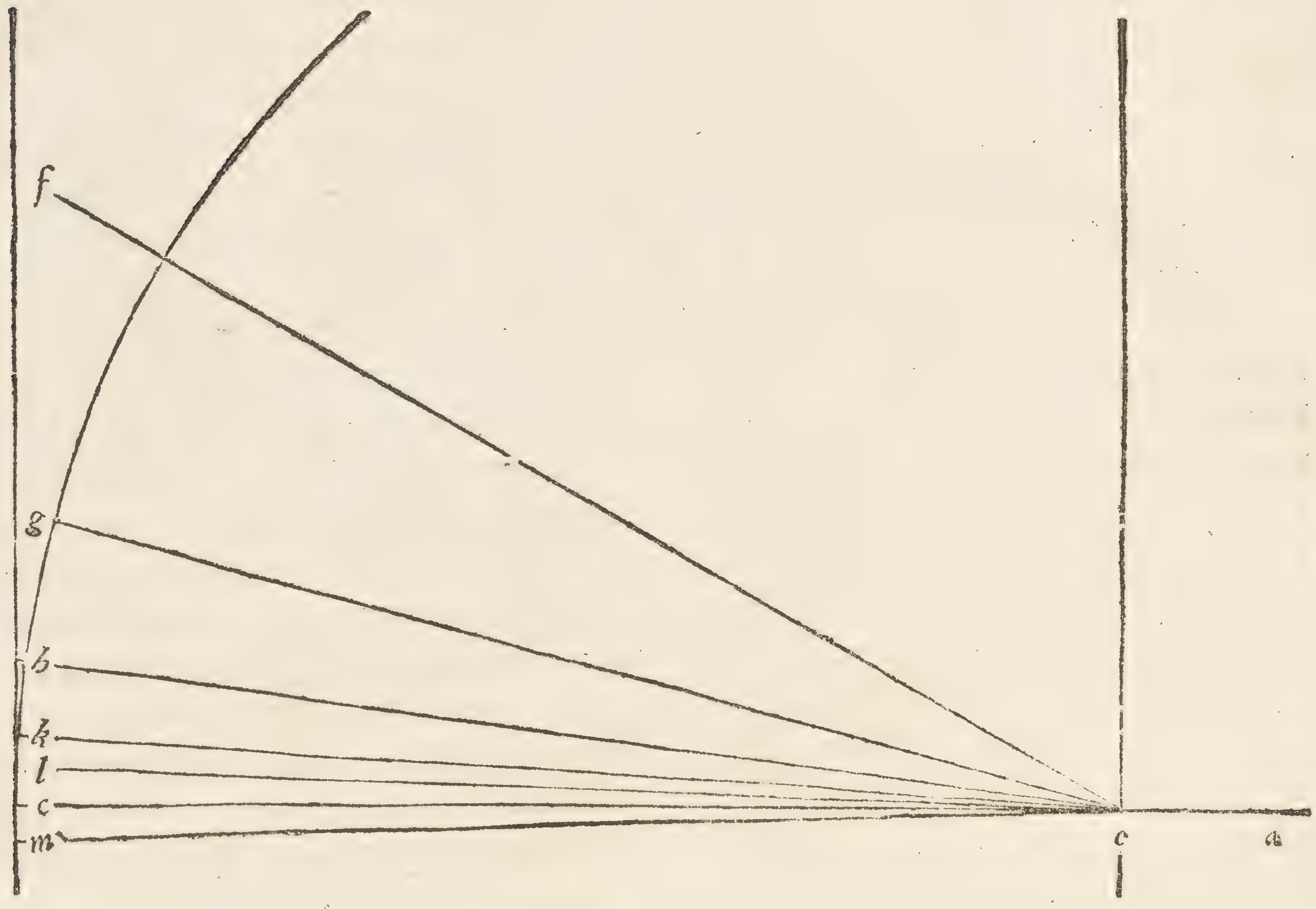
IN PRIMVM THEOREMA.

PRimum theorema his qui aliquantulum in mathematicis ſint uerſati, nullam uidetur habere difficilem perquiſitionem, cum ipſa Archimedis uerba palàm expoſita ſint, & concluſionem propoſitioni reſtituant nulla parte neglecta parem. Videtur autem quadam re eſſe ad demonſtrationem abuſus, quę res nondum ſit demonſtrata. Nam exponens triangulum rectangulum, dicit: Habeat latus unum, ambiens angulum rectum, æquale ei quæ ex centro reliquum latus æquale circumferentiæ. Verum rectam circumferentiæ dati circuli æqualem ſumere, neq; ante ipſum fuerat oſtenſum, neq; ab alio traditũ. Conſiderare tamẽ oportet, nihil præter id quod deceat, ab Archimede ſcriptum eſſe. nam circuli circumferentiam eſſe quandam magnitudinem, nulli prorſus dubium eſt. Puto autem, & hoc eorum quæ ad unum diſtant. Eſt autem rectæ eiuſdem ſpeciei, quanquam non utiq; appareat, poſſe circumferentiæ circuli rectam æqualem præſtare. Verumtamen eſſe rectam quandam ipſi æqualem, à nullo quæſitum eſt. Quod igĩt et ab Archimede propoſitum eſt, tale eſt, triangulum rectangulum qui circa rectũ angulum habuerit latus unum, circumferẽtiæ circuli æquale, uti dictum eſt. Quare propoſitum exponens, non ulla utiq; iudicabitur abuſione. Admirabilis autẽ magis & iſtis uidebitur, quod ita ſupra magnitudinem quæſitorum claram & facilem inuentionem addiderit. Sicut autem dictum eſt, nulla inquiſitione opus eſt primo theoremati. nam triangulus p o r, quod maior ſit figura a f o m, et quod ſimpliciter circa datum circulum poteſt figura rectilinea deſcribi, ita ut portiones quę inter circuli circumferentiam & latera circumſcriptæ figuræ rectilineæ minores ſunt ſpacio dato, apertè dictum eſt in his quæ in primo de Sphæra & cylindro conſcripſimus.

IN TERTIVM THEOREMA.

IN hoc theoremate continenter iubemur, numero quocunq; dato radicem quadratam inuenire. Hanc autem in numero nõ quadrato præciſam inueniri non eſt poſſibile. Numerus enim in ſe multiplicatus producit quendam numerũ quadratum: partes autem in ſe multiplicatæ, non explent numerũ, ſed partes. Quemadmodum uero oporteat radicem proximè producentem datum numerum inuenire, dictum eſt ab Herone in metricis, dictum & à Pappo & Theone, & à multis alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compoſitionem expoſuerunt. Quare nõ eſt opus in hoc nos laborare, cũ liceat ſtudioſis illud ab illis petere. Et angulus c e f, eſt tertia pars recti. Si enim hexagoni circumferentiã bipertientes, eius dimidium ad tertiæ ſeparantes iunxerimus ipſam e f, erit angulus c e f, tertia recti. nam circũferentia ad c aſſumpta, cum ſit dimidia circũferentiæ hexagoni, eſt duodecima circuli pars. quare & angulus c e f, qui eſt ad centrum, eſt duodecima pars quatuor rectorum. quare eſt tertia unius recti. Igitur e f habet ad f c proportionem, quam 306 ad 153. Quod autem e f ſit ipſius c f dupla, hinc manifeſtum eſt. Si enim exproducentes ipſam f c in c, & æqualem ei conſtituentes iunxerimus ab ipſo e, erit angulus apud e duæ tertiæ recti, & angulus ad f duæ tertiæ recti. Igitur trianguli æquilateri eſt dimidium triangulus c e f, & quia baſis æquilateri æquatur ipſi e f, bipertietur puncto c. igitur e f eſt dupla ipſius f c. Habet autem ipſa e c ad c f proportionem, quam 265 ad 153. quia enim e f ponitur 306. Si ipſa in ſeipſam multiplicetur, fient 93636. Ipſa autem c f eſt 153. quare quadratum eius erit 23409. Quoniam igitur quadratum e f æquatur quadratis harum e c, c f, ſi à quadrato e f quod eſt 93636. auferamus quadratum ipſius c f, 23409. relinquetur quadratum e c, quod eſt 70227. Cuius latus quadratum eſt 265. Et item pars quædam minima & inſenſibilis. Deficit enim potentia horum 265, à præciſo duab. unitatibus. Multiplicationes autem ſubijciuntur. Diuidatur itaq; angulus e f c in duo æqua, ducta e g. Eſt igitur ſicut f e ad e c, ita f g ad g c, per tertium theorema ſexti libri E-

lementorũ Euclidis: & cōponēti, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad e c, ita f c ad c g. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. Eſt autem utraq; ſimul e f, f c maior, quàm 571. Eſt autem f c, 153. Igitur utraque ſimul f e, e c ad e c, maiorem ha



bet proportionem, quàm 571 ad 153. quare e c ad c g maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. Igitur e c ad g c potentia habet maiorem proportionem, q̃ 349450 ad 23409. Concludetur autem hoc ita. quoniam enim oſtenſum eſt, quod e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm 571 ad 153. ſi quis poſuerit ipſam e c eſſe 571, & ipſam c g 153, erit quadratum ipſius e c 326041. & quadratũ c g 23409, cum utraq; ſimul ſint æqualia, quadrato ipſius e g, quod eſt 349450. huius radix quadrata eſt 591, & $\frac{1}{8}$ proxime. nã quadratus huius 591$\frac{1}{8}$ deeſt à præciſo una & uiginti unitatibus & 59 ſexageſimis quartis. Igitur e c ad c g habet potentia proportionẽ, quam 349450 ad 23409. longitudine uero, quam 591, & $\frac{1}{8}$ proxime ad 153. Multiplicationes autem ſubijciuntur.

Rurſus in duo æqua diuidatur angulus g e c ducta h e, eadem ratione ipſa e c habebit ad c h maiorem proportionẽ, quàm 1162$\frac{1}{8}$ ad 153. Fit enim per bipertitionem anguli, ſicut e g ad e c, ita g h ad h c. Et componenti, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad e c, ita g c ad c h: & permutatim, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad g c, ita e c ad c h. Et eſt quidem e c, 571, & pars quædam. At uero e g 591, & amplius quædã pars maioris. igit̃ ſunt 1162$\frac{1}{8}$. Eſt aũt g c 153. igitur utraq; ſimul g e, e c ad g c maiorem proportionem habet, quàm 1162$\frac{1}{8}$ ad 153.

Item h e, habet ad h c maiorem proportionem, quàm 1173$\frac{1}{8}$ ad 153. quoniam enim oſtenſum eſt e c habere ad h c maiorem proportionem, quàm 1162$\frac{1}{8}$ ad 153. Si quis ſuppoſuerit eas ſic habere, erit quadratum e c 1350534, & $\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. quadratum uero c h 23409. Quadratum ergo e h æquale quadratis harũ e c, c h erit 1373943, $\frac{3}{6}\frac{3}{4}$ cuius latus eſt 1172$\frac{1}{8}$ proxime. nam deeſt à præciſa potentia ipſius unitatibus 66, multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item angulus h e c diuidatur in duo æqua, ducta e k. Igitur e c ad e k maiorem proportionẽ habet, quàm 2304$\frac{1}{4}$ ad 153. Rurſus enim propter bipertitionem angu-

guli h e c erit ſicut h e ad e c, ita h k ad c k. Et componenti, ſicut utraque ſimul h e, e c ad e c, ita h c ad c k. Et permutatim, ſicut utraque ſimul h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Et quia oſtenſum eſt ipſam h e eſſe 1172$\frac{1}{8}$. utraque ergo ſimul h e, e c, maior erit iſto 2334$\frac{1}{4}$. & h c ponitur 153. Igitur utraque ſimul h e, e c ad h c maiorem habet proportionem, quàm 2334$\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur e k ad c k maiorem habet proportionem, quàm 2339$\frac{1}{4}$ ad 153. Item quoniam ſupponit e c 2334$\frac{1}{4}$, erit quadratum ipſius e c 5448723$\frac{3}{16}$. Quadratum uero ipſius c k 23409. Iſtis autem æquatur quadratum k e, quod erit 5472232$\frac{3}{16}$. cuius latus quadratum eſt proxime 2339$\frac{1}{4}$. deeſt ab eius præciſo quadrato unitatibus 41$\frac{1}{2}$. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item diuidatur angulus k e c in duo æqua, ducta e l. Igitur e c ad e l maiorē habet proportionem, quàm 4660$\frac{1}{2}$ ad 153. Rurſus enim propter bipartitionem anguli ſicut k e ad e c, ita k l ad l c. Et componenti, ſicut utraqꝫ ſimul k e, e c ad e c, ita k c ad l c. Et permutatim, ſicut utraqꝫ ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad l c. & k e eſt 2339$\frac{1}{4}$. & pars inſuper quædam. & e c, 2334$\frac{1}{4}$, & particula inſuper quædam. Igitur utraque ſimul k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm 4673$\frac{1}{2}$ ad 153. Sicut autem utraqꝫ ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad c l. Igitur e c ad c l maiorem proportionē habet, quàm 4673$\frac{1}{2}$ ad 153. Quoniam igitur angulus f e c exiſtens tertia pars recti, eſt duodecima pars quatuor rectorum, eius dimidium erit g e c pars uigeſimaquarta, cuius item dimidium h e c erit quadrageſimaoctaua, atque item huius dimidium k e c erit nonageſimaſexta. rurſus huius dimidium centeſima nonageſimaſecunda. Ponatur, uti dicit, angulus c e m æqualis ei, & educatur f c ad m. Angulus igitur l e m exiſtens duplus anguli l e c, erit nonageſimaſexta rectorum quatuor. quare ipſa l m erit latus polygoni habentis latera 96 circa circulum deſcripti. Quoniam igitur e l ad c l oſtenſa eſt habere maiorē proportionem, quàm 4673$\frac{1}{2}$ ad 253. & eſt ipſa a c dupla ipſius e c, & l m ipſius l c. Igitur a c ad l m habet maiorē proportionem, quàm 4673$\frac{1}{2}$ ad 153. Econuerſo igitur l m ad a l minorem habet proportionem, quàm 153 ad 4673$\frac{1}{2}$. Et quoniam l m eſt latus polygoni habentis latera 96, igitur ambitus polygoni erit 14688. nam 96 multiplicatus in 153 dictum numeri producit. Igitur ambitus polygoni habet ad diametrum a c minorem proportionem, quàm 14688 ad 4673$\frac{1}{2}$. Ambitus ergo polygoni erit triplus diametro circuli, & inſuper 667$\frac{1}{2}$. hic autem minor eſt, quàm pars ſeptima ipſius diametri. Hic enim ſepties ſumptus producit 4672$\frac{1}{2}$ qui minor eſt diametro unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor eſt quàm triplus ſeſquiſeptimus diametro, & circuli ambitus ſit minor ambitu polygoni: multo magis igitur circuli circumferentia eſt minor, quàm tripla ſeſquiſeptima.

Deinceps uero conſtruens reliquam partem theorematis, dicit: Eſto circulus circa diametrum a c, & tertia pars recti angulus b a c. Hoc autem erit, ſi à puncto c ſumpta c b, æquali lateri hexagoni iungamus a b. Nam angulus in circumferentia hexagoni ad centrum factus eſt duæ tertiæ recti, in circumferentia uero trigoni eſt quatuor tertiæ recti. Quoniã igitur angulus a b c eſt rectus, & angulus b a c eſt tertia recti, erit angulus a c b duæ tertiæ recti. Si ergo educentes ipſam c b ad b, & æqualem ei ſumpſerimus, & ab a iunxerimus e a, fiet triangulus æquilaterus. Et quia a b cathetus eſt, & bipertitur baſim, erit a c æqualis ipſi c b. Si rurſus ſumpſerimus ipſam a c 1560, erit ipſa c b 780. Et quadratum a c 2433600. & quadratum ipſius c b 608400. Et ſi auferamus quadratum c b à quadrato a c, relinquetur quadratum a b 1825200. cuius latus quadratum 1351 proxime. excedit enim præciſum ſola unitate. propterea dixit ipſam a b minorē habere ad b c proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Diuidatur in duo ęqua angulus b a c, angulo a f g. Quoniã igitur angulus b a g æqua-

æquatur angulo g c b, nam in eadem circumferentia conſiſtunt: item æquatur angulo g a c: igitur angulus g c b eſt æqualis angulo g a c. & angulus a g c communis eſt rectus: igitur reliquus g f c, reliquo a c g æqualis. igitur triãguli a g c & c g f ſunt inuicem ęquianguli, & ſimiles. Igitur ſicut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. Nam triangulorum ſimiliũ latera æquos angulos complexa, ſunt proportionalia. Verum ſicut a c ad c f, ita utraque ſimul c a, a b ad c b, & a g ad g c. quia enim angulus b a c in duo æqua diuiditur, ducta a f erit ſicut b a ad a c, ita b c ad c f. Et permutatim, ſicut utraqꝫ ſimul b a, a c ad b c, ita a c ad c f. Et eſt a b minor q̃ 1351, & a c 1560, & b c 780. igitur utraqꝫ ſimul a b, c b minorem habet ad b c proportionem, quàm 2911 ad 780. igitur a c ad c f habet minorem proportionem, quàm 2911, & 780. ſicut autem a c ad c f, ita a g ad g c. igitur a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780. Ex his igit̃ erit quadratum a g 8473921. quadratum g c, 608400. Et quadratum a c eſt eis æquale. Erit igitur ipſum 9082321, cuius latus eſt tetragonicum proxime. nam excedit præciſum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{6}$. Eadem ratione dicit a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3390 $\frac{1}{4}$ ad 980. multiplicationes autem ſubijciuntur.

Diuidatur in duo æqua angulus c a g, ducta a h. propter bipartitionem igitur anguli & ſimilitudinem triangulorum, & proportionalitatem laterum & componenti, & permutatim, ſicut utraqꝫ ſimul g a, a c ad g c, ita a h ad h c. & ſupponebatur a c minor quàm 2911. & ipſa a c minor quàm 3013 $\frac{3}{4}$. igitur utraqꝫ ſimul g a, a c minor eſt quàm 5924 $\frac{3}{4}$. ipſa uero g c eſt 780. igitur utraqꝫ ſimul g a, a c ad g c minorem habet proportionẽ, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare & a h ad h c minorem proportionem habet, q̃ 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare a h ad h c minorẽ proportionem habet quàm 455 $\frac{3}{4}$ ad 60. nam utraqꝫ utriuſqꝫ eſt pars, & horum quadrupli ipſa a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 1823 ad 240. propter hoc enim dicit, quod utraque utriuſqꝫ eſt $\frac{4}{13}$. Et quoniam a h eſt 1823, erit quadratum eius 3323429. Eſt autem h c 240, & eius quadratum 57600. & eſt iſtis quadratis a h, h c æquale quadratũ a c. Erit igitur 3380429, cuius latus quadratum eſt 1838 $\frac{9}{11}$. nam huius quadratum excedit, uerum quadratum unitatibus 321 propè. quare a c ad h c minorẽ habet proportionem, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item in duo æqua diuidatur angulus h a c ducta k a. Rurſus propter bipartitionem anguli, & ſimilitudinẽ triangulorũ, & proportionalitatem laterũ, et componẽti, & permutatim, ſicut utraqꝫ ſimul h a, a c ad c h, ita a k ad k c. Verũ utraqꝫ ſimul h a, a c minor eſt, quàm 3661 $\frac{9}{11}$. Quoniam enim h a ſupponit̃ 1823, & a c 1838 $\frac{9}{11}$. Eſt autem h c 240. Igitur utraqꝫ ſimul h a, a c ad h c habet minorem proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240.

igitur a k ad k c minorem proportionem habet, quàm 1007 ad 66. & quadratum a k 1014049. quadratum uero k c eſt 4356: quibus æquatur quadratum a c. igitur erit 1018405, quorum latus quadratum eſt 1009 $\frac{1}{6}$ proximè. nam eius quadratum ſuperat præciſum unitatibus 12 & $\frac{3}{63}$. Igitur a c ad c k minorem proportionẽ habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes autem ſubijcientur.

Item diuidatur in duo æqua angulus k a c ducta a l eadem ratione, ſicut utraqꝫ ſimul k a, a c ad k c, ita a l ad c l. & eſt a k minor quàm 1007, & a c minor quàm 1009 $\frac{1}{6}$, & k c 66. Igitur utraqꝫ ſimul k a, a c, ad k c minorem proportionẽ habet, q̃ 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur a l ad l c minorem proportionem habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Et quoniam a l ſupponitur eſſe 2016 $\frac{1}{6}$ erit eius quadratum 4064928 $\frac{1}{36}$. Et ipſa l c eſt 66, cuius quadratũ eſt 4356: æquale uero ipſis ambobus ſimul quadratum

a c

a c 4069 28 $\frac{1}{36}$. cuius radix quadrata eſt 2017 $\frac{1}{4}$ proximè. nam quadratum eius excedit præciſum unitatibus 13 $\frac{6}{20}$. quare a c ad c l habet minorem proportionem, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem ſubijcientur.

Quoniam igitur a c habet ad c l minorē proportionem, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. Ecō uerſo igitur c l ad c a habet maiorem proportionem, quàm 66 ad 2017 $\frac{1}{4}$. et quoniā circūferētia c b eſt ſexta pars circuli: erit igit̄ ipſa g c pars duodecima, et ipſa h g uigeſimaquarta, & ipſa k c quadrageſimaoctaua, & ipſa l c nonageſimaſexta. Ambitus ergo polygoni ad diametrum circuli maiorem proportionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$. Hæc autem ſunt tripla. etiam ſupererant 284 $\frac{1}{4}$, qui quidem minor eſt decem ſeptuageſimis primis, quarum una eſt 27 $\frac{2}{3}$ proximè. Harum decuplus eſt 277. multo magis ergo circumferētia circuli maior eſt diametro ſua, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. Quemadmodum igitur numeri ab eo poſiti partiuntur, mediocriter declarati ſunt. Sciendum quod Apollonius Pergeus Mocyntocio demonſtrauit idē, per alios numeros ducens ad maiorem propinquitatem. id quidem diligētius factum & exquiſitius uidetur; nihil autem confert ad Archimedis propoſitum. Diximus enim, eum in hoc libello propoſuiſſe, ſe inuenturum propè propter uitæ utilitates. Quare neque Sporus Nicenus percipitur opportunè Archimedem accuſare, quod non exquiſitè ab eo traditum ſit cui rectæ lineæ circuli circumferentia ſit æqualis. Ex quib. ipſe in Cerijs dicit, præceptorem ſuum Philonem Apogadarum ad numeros diligentiores rem hanc adduxiſſe, quàm Archimedes. Omnes enim ex ordine habentur, & uidentur eius propoſitum nō cognouiſſe. Vtuntur tamē multiplicationibus myriadū, & diuiſionibus, quibus non eſt facile aſſequi inductum, & rationibus magnis. Si quis uero uoluerit omnino ad minuta magis hāc rem adducere, utatur licet his quæ in compoſitione mathematica à Claudio Ptolemæo tradita ſunt, uel quæ ſequuntur ex illis per partes & minutiſſimum calculum, & per rectas in circulo ſitas. Et ego utiq; hoc iam feciſſem, niſi quod ſæpe dixi, intellexiſſem, quòd per ea quæ dicta ſunt, non poteſt ad exquiſitiſſimū perueniri, ut inueniatur recta linea, quæ ſit circūferentiæ circuli dati ęqualis. Quanquam proximè quis ac ferè habuerit eam. Et quæ ab Archimede ſunt hic dicta, ſufficiant.

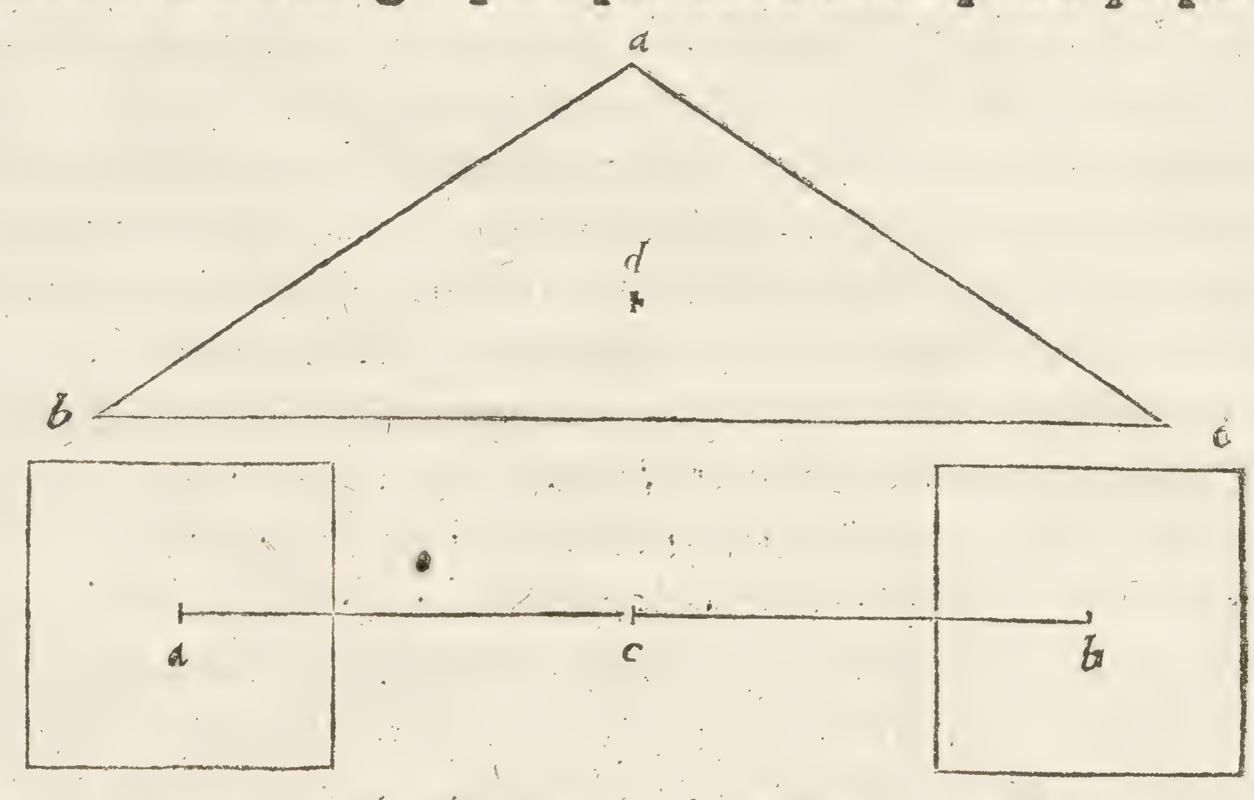
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in Circuli menſurationem, editione aſſcripta Mileſio Mechanico Iſidoro noſtro præceptori.

EVTOCII IN PRIMVM THEOREMA AEQVEPONDERAlium *Archimedis*.

MOMENTVM ipſum, ô generoſiſſime Petre, commune grauitatis & leuitatis eſſe genus, & Ariſtoteles aſſerit, & Ptolemęus eum ſequutus. Timæus uero apud Platonem, momētum omne dicit grauitate produci. nā exiſtimat leuitatem priuationē quandam eſſe. quorum opiniones licet diſciplinarū ſtudioſis legere, & ex Ptolemæi libro quem de Momentis conſcripſit, & ex naturalibus negocijs Ariſtotelis, & ex Timæo Platonis, & ex his qui illos expoſuerūt. Archimedes uero in hoc libro cētrum ponderis figuræ planæ exiſtimat id, ex quo

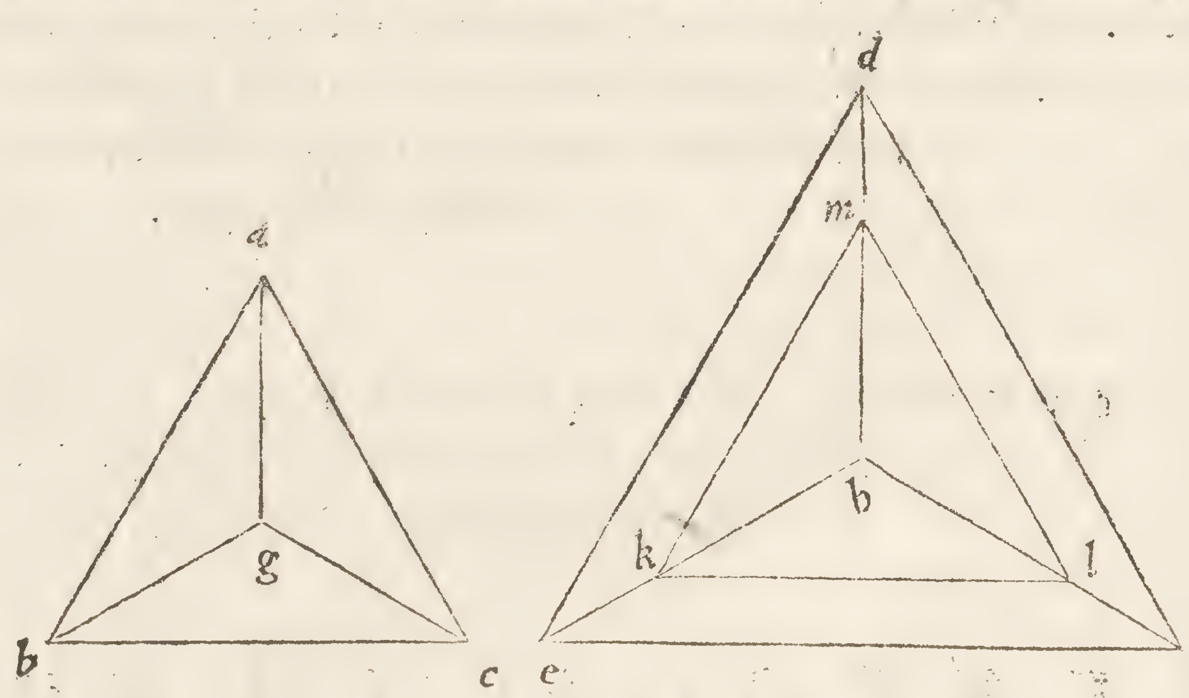
Hh ſuſpenſa

ſuſpenſa manet æquediſtãs horizonti, duorum uero uel plurium planorũ centrũ ponderis, hoc eſt grauitatis, à quo libra ſuſpenſa ſtat horizonti æquediſtãs: ut puta ſit triangulus a b c, & in medio eius punctum quoddam d, à quo ſuſpenſum maneat æquediſtãs horizonti. Conſtat igĩt quod partes a b c ſibi ipſis æquepõderabunt, & nulla tẽdit altera magis ad horizõtem. Similiter autem & poſita libra a b, & ſuſpenſis ex ea magnitudinib. a b, ſi ſuſpẽſa libra ex c habeat partes a b æqueponderantes, manebit æquediſtãs horizonti, & erit centrum ſuſpenſionis magnitudinum a b pũctum c.



Bene uidetur Geminus de Archimede dicere, quod dignitates petitiones appellat. nam æqualia grauia ex æqualibus diſtantijs aut lõgitudinibus æqueponderare dignitas eſt, & quæ ſunt conuenienter. Et ſunt clara omnia, his qui ea moderatè inſpiciunt.

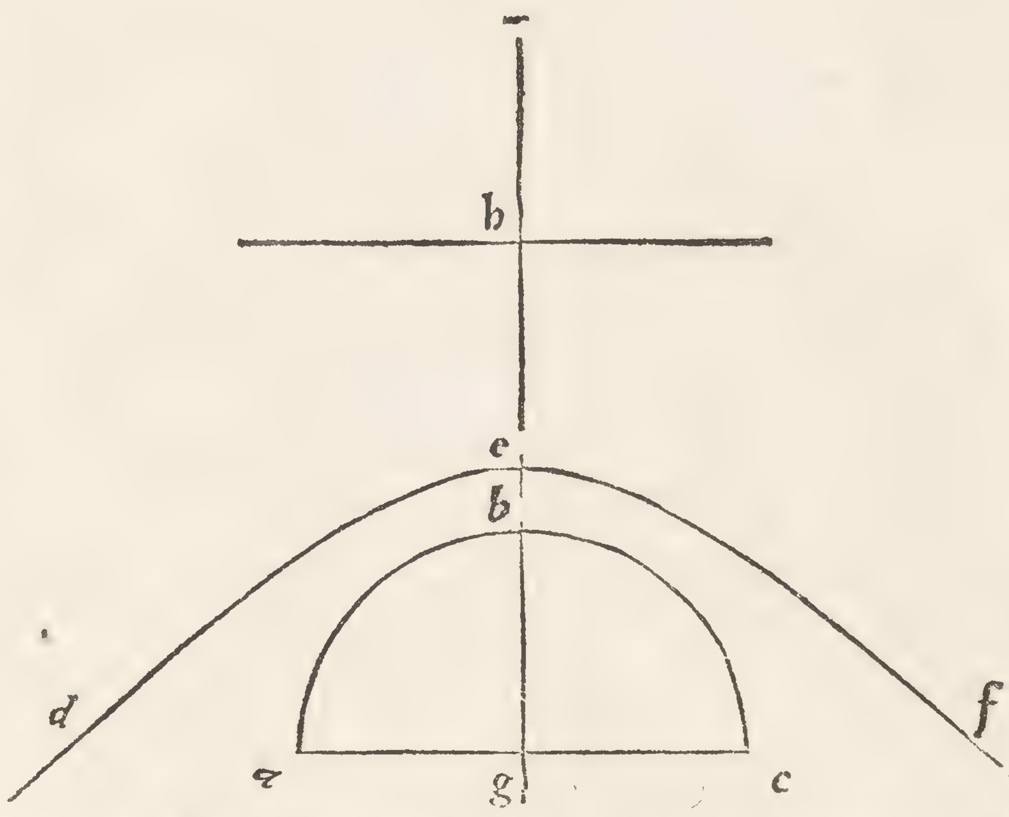
Aequalibus inquit, & ſimilibus planis inuicem coaptatis, & eorũ centra grauitatis inuicem coaptabuntur. Omnes enim eorũ partes coaptabũtur: inæqualiũ uero & ſimilium centra grauitatis erunt ſimiliter ſita. Intelligantur autem, uti in ſubiecta deſcriptione trianguli a b c, d e f inæquales & ſimiles. & centrum grauitatis ipſius a b c ſit g, ipſius uero d e f ſit h: & iungantur a g, b g, c g, d h, e h, f h. Dico igitur, quod per æqualia diuidant angulos lineæ ductæ ab ipſo g uel h puncto ad angulos. Fiat enim ſicut e f ad b c, ita e h ad h k, & f h ad h l, & d h ad h m. Et iungãtur m k, k l, l m. erit iam k l m triangulus ſimilis triangulo d e f. Quoniam enim eſt ſicut e h ad h k, ita h f ad h l: erit e f ęque diſtans ipſi k l, & ſimiliter m k ipſi e d, & ipſa d f ipſi l m.



Igitur triangulus d e f ſimilis eſt triangulo k l m. Eſt igitur ſicut d e ad m k, ita e f ad k l, & f d ad l m. Supponitur autem propter ſimilitudinem triangulorũ, eſſe ſicut d e ad a b, ita e f ad b c, & d f ad a c. Sunt igĩt latera a b c æqualia lateribus k l m. quare aptatur unumquodque unicuique. Igitur triangulus a b c, eſt ſimilis & æqualis triangulo k l m. quare coaptabitur centrum ipſius a b c, in centrũ ipſius k l m. Ipſo autem g coaptato in h, & latera a b c coaptabuntur in k l m, & ipſe a g, b g, c g in ipſas h k, h l, h m: & facient angulos ad k l m æquales angulis in triangulo a b c. quare & in ipſo d e f. Sunt enim eædem rectæ, quæ à puncto h ad d e f, & ad k l m iunctæ fuerunt.

Cuiuſcunque figuræ cuius ambitus in eadem caua conſiſtit, centrum grauitatis intra figuram contineri neceſſe eſt. Quas appellat in eadem cauas lineas, iam dictum eſt à nobis in procemijs de Sphæra & cylindro. Quoniam enim figura quæ ha-

habet ambitum in eadem cauum, partes omnis plani inter ambitum ſuum complectitur, & angulos. Conſtat quod & centrum grauitatis intra ipſam figuram continetur. in quibuſdam enim figuris centrum eſt extrà, in quibuſdam in limbo. In ſemicirculo enim a b c centrum figuræ eſt g. in hyperbole autem d e f, cētrum figuræ eſt extrà, ubi diametri concurrunt inuicem, ſicut habet h. Hęc enim dicta ſunt in ſecundo libro Conicorum Apollonij. Verūtamen et in figura a b c, & in d e f, centrum grauitatis, à quo uidelicet figura ſuſpenſa maneat æquediſtans horizōti, eſt intra ambitum. nam ſi foret in ambitu, aliquid extrà in alteram partem tenderet, quod non ſupponitur.



IN SECVNDVM.

ESto centrū grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod enim ſit in a b, oſtenſum eſt. nam ſuprà dictum eſt, quod duarum magnitudinum centrum eſt, à quo libra ſuſpenſa partes habet ęqueponderantes: & æquediſtās manet horizonti. quare centrum magnitudinum a b eſt in ipſa a b.

IN QVINTVM.

AVt enim quod ab ipſo a b maius eſt ipſo c, ita ut æqueponderet, aut non. Hoc dictū rectè intelligere oportet, non utputa quod magnitudo a b ſit omnino maior c: ſed poſita maior, aut ſecundum æqueponderātiam. Poteſt enim fieri, quod minor magnitudo magis ponderet quàm maior, per longitudinem libræ quæ maior admodum exiſtat, & proportionem faciat inæqualem. Et auferatur ab ipſo a b minus exceſſu, quo a b maius eſt ipſo c, ita ut æqueponderent: ita ut reliquum, puta a ſit cōmenſuratum ipſi c. Oportet, inquit, auferre ab ipſo a b magnitudinem quandam b: puta quod faciat reliquum a commenſuratum ipſi c, & maius ipſum a ipſo c ſecundum æqueponderationem. Hoc autem fieri poteſt per ea quæ in principio libri decimi Elementorum Euclidis dicta fuerunt, & in tertio Sphæricorum Theodoſij.

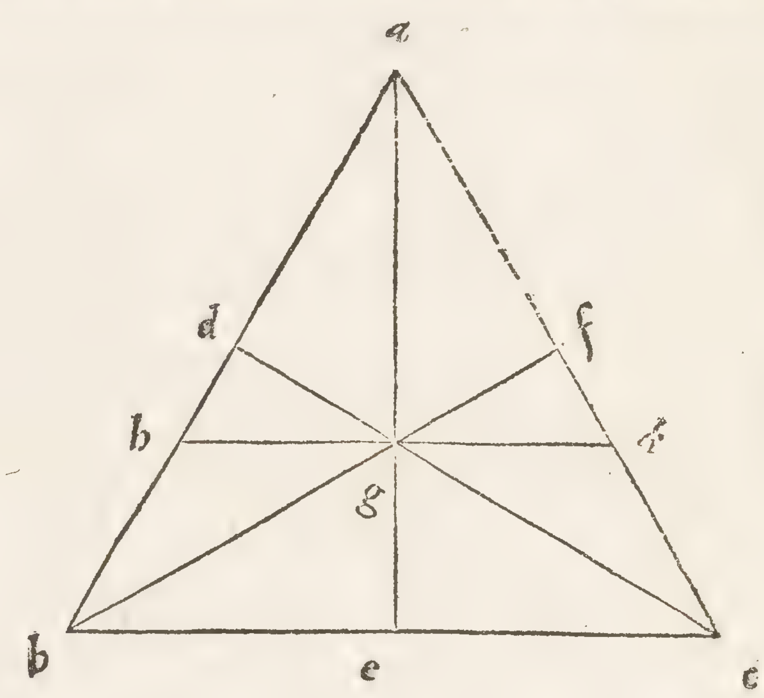
IN VNDECIMVM.

ET iungantur hæ, e f, g k, l m. cadent iam ipſæ iuxta ipſam b c. Quoniā enim ipſa b o eſt æqualis ipſi z c, & ipſa d b ipſi d c, erit ſicut d b ad o b, ita d c ad z c. & diuidenti ſicut d o ad o b, ita d z ad z c. Verum ſicut d o ad o b, ita a e ad e b. nā e o eſt iuxta ipſam a d. Sicut autem d z ad z c, ita a f ad f c. Igitur ſicut a e ad e b, ita a f ad f c. Igitur e f eſt æquediſtans ipſi b c. Similiter autem oſtendētur & reliquæ.

Ipſe a d c ad omnis triangulos ab ipſis a m, m k, k f, f c deſcriptos, ſimiles ipſi a d c eam habent proportionem, quam habet c a ad a m. eoq; rectæ ſunt æquales. Quoniam enim trianguli a d c, a ſ m ſunt ſimiles, habebunt inuicem proportionem a c ad a m duplicatam. Quoniam uero nunc ſupponitur, ipſam a c ipſius a m quadruplam eſſe, triangulus a d c habebit ad triangulum a ſ m, ſicut ſexdecim ad unum, & ad triangulos omnis ab a m, m k, k f, f c deſcriptos, proportionē habet, quam ſexdecim ad quatuor. Igitur proportionaliter eſt, ſicut triangulus a b c, ad triangulos ab a m, m k, k f, f c, ſimiles ipſi a d c, ita ipſi trianguli ad ipſum a ſ m. Hoc eſt c a ad a m. Sunt enim ſimiles, & in baſibus æqualibus, & propterea inuicem æquales, quia habent ad inuicem ſicut eorum baſes. Verum c a ad a m ma-

iorem proportionẽ habet, ꝗ u r ad r h. Proportio enim a c ad a m eadem eſt proportioni u r ad r p. Si enim intelligantur u r, c d eductæ & concurrentes in parallelas, erit ſicut u r ad r p, ſic c d ad d ω. Verum ſicut c d ad d ω, ita c a ad a m. ſicut ergo c a ad a m, ita u r ad r p. Habet autem u r ad r p maiorem proportionẽ, quàm u r ad r h. Igitur c a ad a m habet maiorem proportionem, quàm u r ad r h. Quod ſanè eſſe non poteſt. nam lineæ rectæ ductæ per q iuxta ipſam d a, in eadem erunt centra hęc ſcilicet in alterã partẽ, & tendẽt uidelicet in illud omnis magnitudines, & non æqueponderabunt: quod eſt commune poſitum. nam centrum parallelogrammorum poſitum eſt r, & triangulorum q.

Si enim educas iſtas c d g, f e g, b a g, conſtat quod in idem punctũ ueniunt. eductis enim b a g, f e g, & concurrentibus inuicem in puncto g, & ipſa c d concurret in idem. Eſt autem ſicut b g ad g a, ita f g ad g e, & b f ad a e, & f c ad e d, & c g ad d g. Erit iam trianguli b d c centrum grauitatis in ipſa h m. quoniam ipſa a b eſt tertia pars b h. Eſto triangulus a b c, & iũgantur ab angulis ad bipartitiones laterũ rectæ a e, b f, c d. Igitur centrum grauitatis trianguli a b c eſt g. Et manifeſtũ, quod omnes trianguli ſunt inuicem æquales. quoniam omnes rectæ ab angulis ad bipartitiones laterum iunctæ per g tranſeunt, ne eiuſdẽ plura centra exiſtant. Quoniam autem a d, d b, b e, e c, c f, f a ęquales ſunt, trianguli erunt æquales, qui habent uerticem punctum g, baſes uero dictas rectas. Quare a g b triãgulus, duplus eſt triangulo g b e. quare & a g ipſius g e. Si igitur per g iuxta ipſam b c duxerimus ipſam h k, erit a h dupla ipſius h b. Quare uniuerſaliter, ſi unũ latus trianguli ſecetur, ita ut portio ad uerticem ſit dupla portioni ad baſim, & per ſumptum punctum ducatur æquediſtans ipſi baſi: in ipſa ducta erit centrum grauitatis trianguli illius.



FINIS PRIMI EVTOCII.

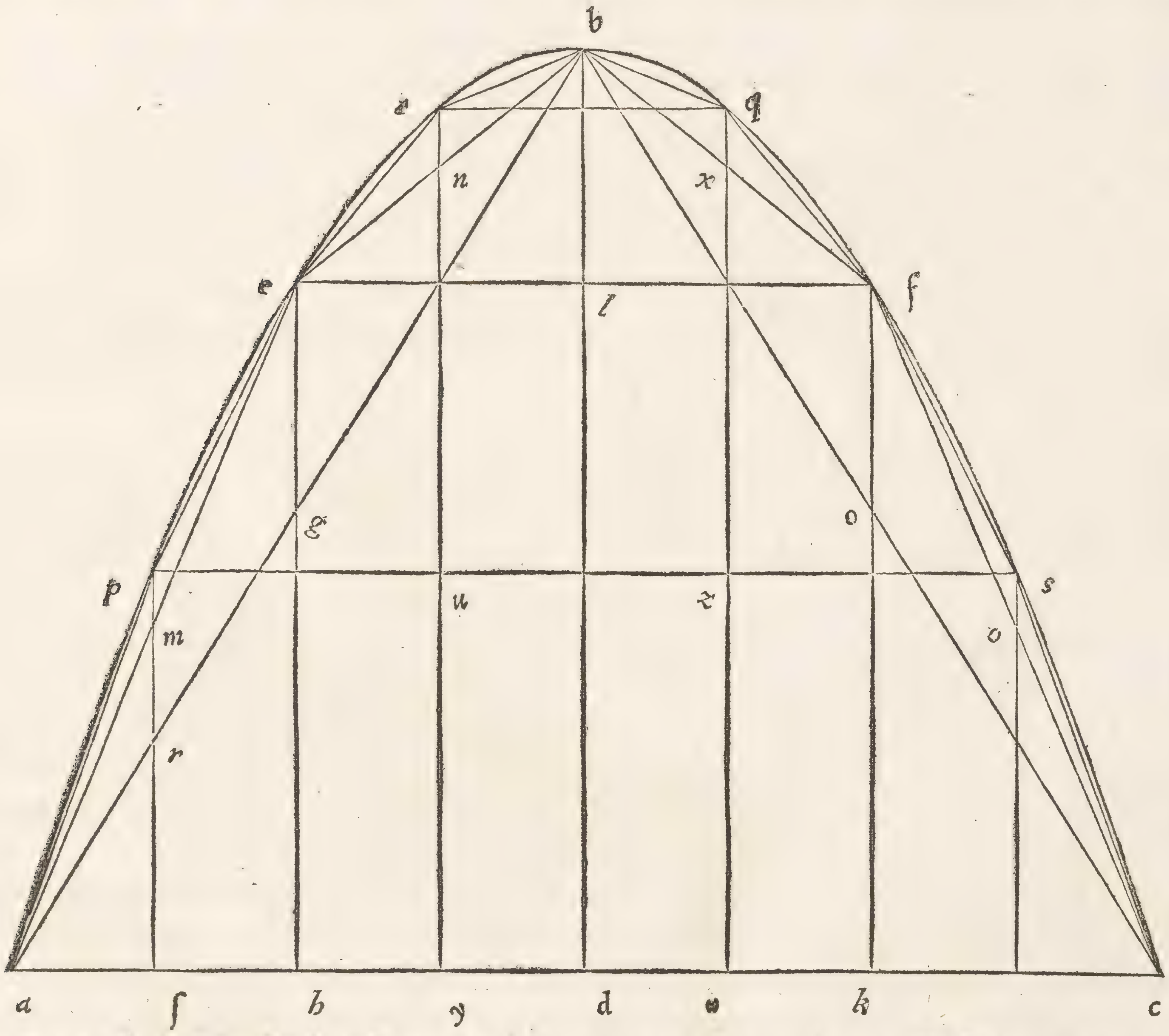
EVTOCII IN SECVNDVM AEQVEPONDERANTIVM *Archimedis*.

CVM diligenter ea quæ in primo libro habentur percurrimus, & inſpectu difficilia ſatis declarauerimus: neceſſariũ duximus, & quæ in libro ſecũdo obſcurè dicta ſunt, pro modo explicare. Dicit itaq; in propoſitione primi theorematis: Supponãtur ſpacia a b, c d contenta à recta & ſectione rectanguli coni, quæ poſſimus iuxta rectam datam applicare. hoc aũt non licet inde per ea quæ iſtic demonſtrata ſunt inuenire. Quoniã aũt oſtenſum eſt ſibi, ueluti in libro de Sphęra & cylindro dixit, quod figura huiuſmodi eſt ſeſquitertia triãgulo habẽti baſem, & altitudinem cum portione eandem: plano uero exiſtẽte rectilineo ſeſquitertio, trianguli æquale poſſumus iuxta rectã datam applicare, conſtat quod & figuris huiuſmodi. Quæ uero in apparatu dicta ſunt, omnia clara per quartum theorema primi iſtorum libri.

In

IN SECVNDVM.

IN ſecundo theoremate prædicit quædam declarantia, quo pacto in ſectione rectanguli coni figura cognitæ poſſit inſcribi. Et dicit, hæc oſtendenda ſunt in ordinibus. Quoniam igitur dictum obſcurũ eſt, neceſſe eſt pauca quædam de eo dicere ex Conicis Apollonij inuẽta. Eſto figura cõtenta ſub parabola a b c, & recta a c, cuius ſit diameter b d. Conſtat quod uertex portionis eſt punctum b. Vertices uero appellat Apollonius, terminos, qui ſunt ad rectas diametrorum. Si iam iunxerimus has a b, b c, erit triãgulus a b c, qui baſem habeat cũ portione eandẽ, & altitudinem æqualem: ductã à puncto b ad ipſam a c perpendicularẽ. Sic enim omnino b d eſt axis, ſi ſumentes uertices portionũ a b, b c, ipſos e, f, & per ipſos duxerimus parallelas ipſi b d, puta e g, f o, erũt ipſę diametri portionũ a b, b c. Oſtẽſum eſt enim in parabola, quod omnes ductæ æquediſtãtes iuxta diametrũ ſunt diametri ſectionis. erũt iam e, f uertices portionũ: & quæ per e, f applicatę æquediſtãtes ipſis a b, b c: erit & e l f iuxta ipſam a c. Quoniam itacꝫ e h, f k ſunt inuicẽ æque diſtãtes, & exiſtentes diametri æquales æqualiũ portionũ, & coaptatæ inuicẽ uti in ſexto Conicorũ oſtẽſum eſt: & quoniã e g h eſt æquediſtãs ipſi b d, erit ſicut b g ad g a, ita d h ad h a. Eſt aũt b g ęqualis ipſi g a. nã e g ſecat eã in duo æqua æquediſtãtem applicatę cõtingenti. igitur d h eſt ęqualis ipſi h a. Et eadem ratione d k ipſi k c eſt æqualis. Tota uero a d eſt æqualis toti d c. igitur d h eſt ęqualis ipſi d k: et ex hoc e l ipſi l f. Quare uerissimè dictũ eſt, quod recta iũgẽs uertices portionũ, æque diſtãs erit baſi portionis, & in duo æqua diuidet à diametro portionis. Iungant̃



quocꝫ a e, e b, b f, f c. & diuidãtur in duo æqua pũctis m, n, x, o, & ducant̃ per pũcta m, n, x, o iuxta ipſam b d iſtæ p m r ſ, t n , q x z ω s o iungãtur a p, p e, e t, t b, b q, q f, f s, s c: & hę t a q, p b c d z s. Cõſtat iã ex iſtis ante demõſtratis, quod t q, et e f, & p s ſunt æquediſtantes ipſi a c: & quod t a eſt qualis a q & p d ipſi d s. Dico quod hæ ſecãt ipſam b d in numeros conſequenter impares: hoc eſt, cuius b a ſit unum,

unum, eius erit a l tria, & l d quinque, & d d ſeptem: quoniam a g eſt æqualis ipſi g b, & e h eſt æquediſtans ipſi b d, erit a h æqualis h d. igitur d a dupla eſt ipſius d h: quare & ipſius e l. Igitur quadratũ a d quadruplum erit quadrato e l. Sicut autem quadratum a d ad quadratum e l, ita oſtenſum eſt eſſe b d ad b l. quare b d quadrupla eſt ipſius b l. igitur d l tripla eſt ipſius b l. Cuius igitur b l eſt unum, eius erit d l tria: & eadem ratione cuius b l fuerit quatuor, eius erit ipſa d l duodecim. & quoniam e n eſt æqualis ipſi n b, & e f ipſi f l, & h u ipſi u d, igitur e l dupla eſt ipſius l f, hoc eſt ipſius t a. igitur quadratum e l quadruplum eſt quadrato t a. igitur b l quadrupla eſt ipſius b a. quare l a tripla eſt ipſius a b. quorum igitur ipſa l b eſt quatuor, erit ipſa b a unum: et quorum ipſa l a tria, erit ipſa l d duodecim. Rurſus quoniam a m eſt æqualis ipſi m e, & a k ipſi k g, & a f ipſi f h: erũt igitur a f, f h, h u, u d inuicem æquales: quorum igitur a d eſt quatuor, eorum f d eſt tria, hoc eſt ipſa p d. quorum igitur quadratum a d eſt ſexdecim, horum quadratum p d eſt nouem: quorum igitur b d eſt ſedecim, eorum eſt nouem b d, & reſidua d d ſeptem. Quoniã igitur oſtenſum eſt, quorum b d eſt ſedecim, eorũ b a eſſe unum, & a l tria, & d d ſeptem: erit igitur reſidua l d quinq;. Diuiditur ergo ipſa b d ab æquediſtantibus in numeros conſequenter impares, ea quæ ad uerticem portionis eſt parte ab unitate denominata. Cõſtat igitur ex deſcriptione, quod ductæ à diametris in numeros ab unitate cõſequenter diſpoſitos excreſcunt. Cuius enim eſt t a unum, eius eſt e l duo, & p d tria, & a d quatuor. Cum enim ſint omnes æquediſtantes, ſecãtur in æqualia. Appellatur autem ab Archimede figura a p e t b q f s c, cognitæ inſcripta.

IN TERTIVM.

SImiles portionum ſectiones coni Apollonius diffiniuit in ſexto libro Conicorum illas, in quibus ſi ducantur in unaquaque æquediſtantes baſi æquales numero æquediſtantes, & baſes ad abſciſas ab ęquediſtantibus uerſus uerticem partes diametrorum in eadem proportione erũt, & abſciſæ ad abſciſas, & quod parabolæ omnes ſunt ſimiles inuicem. Figura uero cognitæ inſcripta, quid ſit, dictũ eſt in præſumpto limmate. Hoc autem ſimiliter diuidere diametros eſt, ut portiones earum eandem habeant proportionem. Reſiduum uero theorematis eſt clarum ex prædicta figura.

IN QVARTVM.

INſcribatur rectilinea figura cognitæ in portione, ita ut circumciſæ partes ſint minores ipſo k. hoc autem manifeſtum eſt ex prædictis, in ſecundo Stichioſis ordinationis, & in primo de Sphæra & cylindro.

IN QVINTVM.

ET quoniam h f g i eſt parallelogrammum, &c. quoniam enim hæ k f, l g ſunt æquales. Sunt enim portionũ æqualium diametri, & æqualiter ab axe diſtãtes a b d, & ſimiliter diuiduntur à centris h i, erit ſicut k h ad h f, ita l i ad i g, & permutatim. & idcirco h f eſt æqualis ipſi g i. eſt autem & æquediſtans ei. nã omnes diametri parabolæ ſunt æquediſtantes: igitur ipſum h f g i eſt parallelogrammũ.

IN SECVNDAM PARTEM QVINTI.

ERit itaq; magnitudinis compoſitæ ex utriſq; a k b, b l c portionibus centrum grauitatis q. & compoſitæ ex utriſq; a k b, b l c triangulis, eſt centrum c, &c. Oſtenſum eſt enim in præſumpto, quoniam h m iungens centra portionum, bipartitur ab ipſa b d puncto q, cum ſit ipſi f g æquediſtans: & g h bipartitur puncto t. quare t eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex triangulis a k b, b l c. Quoniam igitur triangulus b a c maiorem proportionem habet ad triangulos a k b, b l c, q̃ ad portiones, & reliqua. Quoniam enim oſtenſum eſt, trianguli a b c centrum grauitatis eſſe e: & triangulorum a b k, b l c centrum t, manifeſtũ eſt quod rectilinei a k b l c centrum grauitatis eſt in t e, diuiſa puncto R ſecundũ mu-

mutuam proportionē,quam habet triangulus a b c, ad triangulos a k b,b l c.quoniam aũt triangulus a b c maiorem proportionē habet ad triangulos a k b,b l c,ꝙ ad portiones: nam portiones ſunt triangulis maiores: cõſtat quod ſi ſecuerimus ipſam et i n proportionē quam habet triangulus ad portiones, punctũ ſectionis cadet ſuperius ꝙ ſit R: quod erit centrũ totius portiōis, propter mutuã affectionē.

IN SEXTVM.

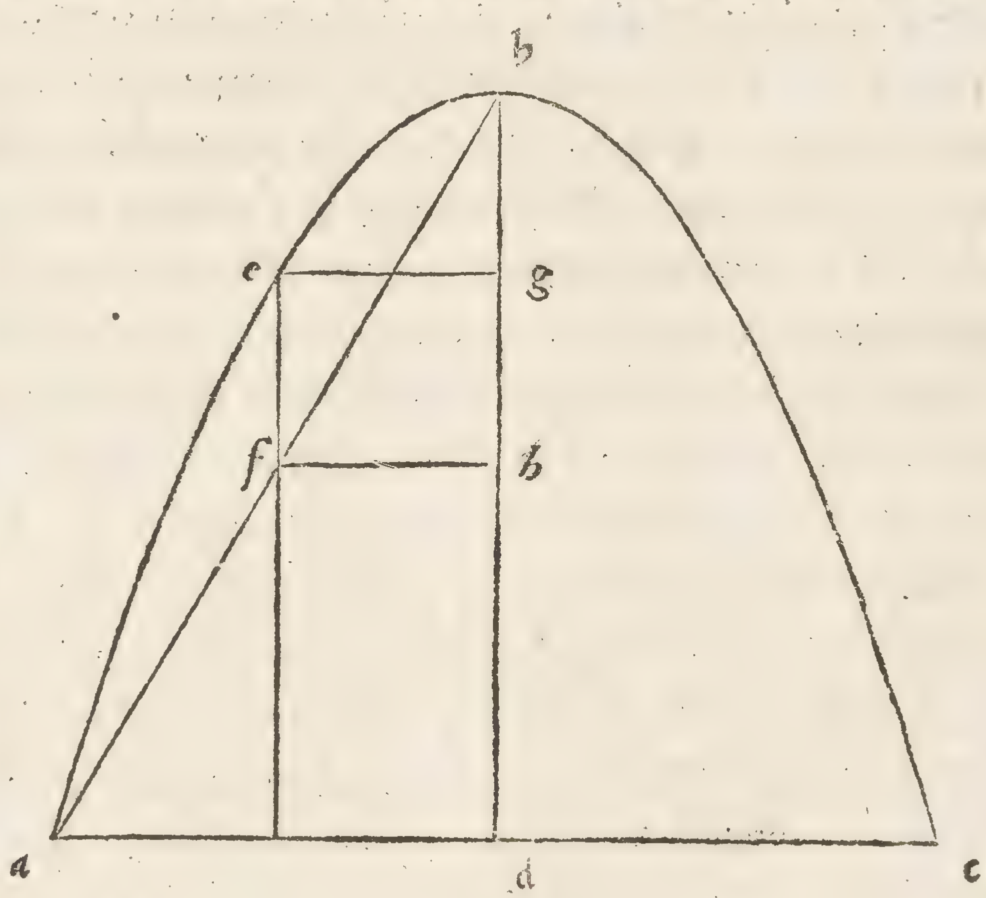
Centrum portionis eſt omnino unum, & propinquius uertici portionis, ꝙ centra inſcriptarum rectilinearum. Nam trianguli a b c centrum grauitatis eſt, ſi contingat e, ipſa b d, ita diuiſa ut e b ſit dupla ipſius e d. Cõſtat quod omnia centra inſcriptarum rectilinearum cadent inter puncta h e. & quanto plurium laterum fuerit inſcriptum cognitæ, tanto magis ipſi h appropinquat. Conſtat itaq; quod eſſe non poteſt, ut linea inter centrum inſcripti cognitæ rectilinei, & centrũ portionis intercepta ſit maior e h. poteſt autem minor eſſe non ſolum ipſa h e, uerum omni alia data.

IN SEPTIMVM.

INſcribatur itaq; in portione a b c rectilineũ, ſimile ei quod eſt in portione d e f, hoc eſt ſimiliter cognitæ. Similiter enim cognitæ inſcribitur, quando ſectiones parabolæ a b c æquales fiant ipſi e f g, ita ut latera cognitæ inſcripti ipſi portioni a b c, ſint numero æquales rectilinei laterib. inſcripti ipſi e f g. quoniam enim puncta b & f, ſunt uertices ſimilium portionum, erunt ita cognitæ inſcripta ſimilia.

IN OCTAVVM.

ET quoniam eſt ſicut b h ad h d, ita k m ad m f. nam portiones cum ſint ſimiles, habebunt centra diuidentia diametros in eaſdem portiones. & componēti, ſicut b d ad d h, ita k f ad f m: & permutatim, ſicut b d ad k f, ita d h ad m f. Eſt autem b d quadrupla ipſius k f. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignum hoc ✐. Cõſequenter autē illud nos oſtendemus. Eſto parabola a b c, cuius diametros b d, & ducatur ordinate a d, & iungatur a b: & diuidatur a b in duo æqua puncto f, & ducatur per f æquediſtans ipſi b d ipſa e f. igitur ipſa e f eſt diametros portionis a b: & à punctis e f ducantur ordinate hæ e g f h. Quoniam itaque a f eſt æqualis f b, erit a b dupla ipſius f b, & a d ipſius f h: hoc eſt ipſius e g. Quare quadratum a d eſt quadruplum ad quadratum e g:



quare d b quadrupla eſt ipſius b g longitudine. Quoniam igitur b d eſt dupla ipſius b h, erit b h dupla ipſius b g, & ipſa h g æqualis ipſi g b: & ipſa h g æqualis etiam ipſi e f. quia ipſum e g f h eſt parallelogrammum. Igitur ipſa b d eſt quadrupla ipſius f e. & quoniam ipſa b d eſt quadrupla ipſius b f, etenim hoc eſt oſtenſum. nam oſtenſum eſt in ſumpto, ipſam b d utriq; harum b g, e f eſſe quadruplam: quare b g eſt æqualis ipſi e f: & idcirco iſtic ipſa b f ipſi k f æqualis, & b d utriq; earum quadrupla: igitur ipſa b f eſt tertia pars ipſius f d. quoniam enim b d eſt quadrupla ipſius b f. Quorum igitur ipſa b d eſt quatuor, eorum ipſa b f eſt unum: & quorum b d eſt duodecim, eorum ipſa b f eſt tria. Eſt autem b f tripla ipſius f x. quorum igitur b f eſt tria, ipſa f x eſt unum. Tota igitur b x eſt quatuor: horum autem erat b d duodecim: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Triplus autem

tri-

triangulus a b c portionum. Oſtenſum enim eſt ab eo, in eo quod ſcripſit de Coni
rectanguli ſectione, quod omnis figura cōtenta à recta, & ſectione rectanguli co-
ni, eſt ſeſquitertia trianguli baſem eandem habentis, & altitudinē æqualem. qua-
re portio a b c, eſt ſeſquitertia triāguli a b c: & diuidenti, triangulus a b c eſt triplus
portionū a k b, b l c. & eſt d b tripla ipſius e d. igitur ipſa b h eſt ſeſquitertia ipſius
h d, quod erat demoſtrandum. quoniam enim b d eſt tripla ipſius d e. Quorum i-
gitur b d eſt quindecim, eorum e d eſt quinq; : quorum uero d e eſt quinq;, eorum
h e eſt unum: & tota h d ſex, ſcilicet ſexcupla ipſius h e. Quorū igitur b d quinde-
cim, eorum d h eſt ſex: & reliqua h b, nouem. quare b h eſt ſeſquialtera ipſius h d.

IN NONVM THEOREMA.

NOnum theorema ualde obſcurū, exponemus iuxta loquentes quàm clarè
poterimus. Quoniam enim iſtæ a b, b c, b d, b e ſunt proportionales, & diui
denti, & permutatim, erūt a c, c d, d e in eadem proportione. Quoniam igitur a b,
b c, b d, b e in eadem ſunt proportione, & iſtæ a c, c d, d e. eſt ſicut in primis magni
tudinibus antecedens, & medium ad ſequens: ita in ſecundis magnitudinib. an-
tecedens, & medium ad ſequens. Sicut ergo utreq; ſimul a c, c d: hoc eſt, d a ad d e:
ita utraq; ſimul a b, b c ad d b. Sicut aūt utraq; ſimul a b, b c ad d b: ita dupla utriuſ-
que ſimul a b, b c ad duplam ipſius b d: quia partes eandem ſuis multiplicibus ha
bent proportionem. Sicut ergo a d ad d e, ita duplum utriuſq; ſimul a b, b c ad du
plum d b. Rurſus quoniam iſtæ c b, b d, b e in eadem ſunt proportione. & iſtę a c,
c d, d e. eſt autem per prædicta ſicut a d ad d e, ita utraq; ſimul c b, b d ad b e. Erat
autē ſicut a d ad d e, ita duplum utriuſq; ſimul a b, b c ad duplum ipſius b d. Sicut
ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia. Sicut ergo a d ad d e, ita antecedētia ad ſe
quentia. Sunt autem antecedentia duplū utriuſq; a b, b c: et utraq; c b, b d, hoc eſt
duæ a b, tres c b, & una b d: ſequētia uero duplum, b d, & ſola b e. Eſt igitur ſicut
a d ad d e, ita recta compoſita ex dupla ipſius a b, & tripla c b, & ſola d b ad compo
ſitam ex dupla b d & ſola b e. Et quoniam compoſita ex duplo a b, & quadruplo
c d, & quadruplo d b, et duplo b e, maior eſt compoſita ex duplo a b, & triplo c b,
& ſola d b: maius autem habet ad idem maiorem proportionem, quàm minus:
maiorem ergo proportionem habet compoſita ex duplo utriuſque ſimul a b, b e,
& quadruplo utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex duplo d b, & ſola e b, ꝙ
compoſita ex duplo a b, & ex triplo c b, & ſola d b, ad compoſitam ex duplo b d, et
ſola e b. Verum ſicut cōpoſita ex duplo a b, & tripla c b, & ſola b d, ad compoſitā
ex duplo b d, & ſola e b: ita oſtēſum eſt eſſe a d ad d e. Igitur cōpoſita ex dupla u-
triuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla
b d, & ſola e b, maiorē proportionem habet, ꝙ ad ad d e. Si igit̄ uoluerimus facere
eādem proportionē ipſius a d ad quandā aliam, erit illa minor ꝙ d e. ſit aūt d o. Eſt
igit̄ ſicut a d ad d o, ita compoſita ex dupla a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b,
b d, ad compoſitam ex dupla b d, & ſola e b. Et ecōuerſo, igitur eſt ſicut o d ad d a,
ita compoſita ex dupla b d, & ſola e b, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b,
b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d: & componēti, ſicut o a ad d a, ita compoſi
ta ex dupla a b, & quadrupla c b, & ſexcupla ipſius b d, & tripla ipſius b e, ad cōpo
ſitā ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Ipſa enim
b d ſexies ſumpta eſt, quater in primis, bis in ſecundis, & ipſa b e ter ſumpta: bis
inter primas, ſemel inter ſecundas. Supponitur autem & a d habere ad g h, eam
proportionem, quam habet compoſita ex quincupla utriuſque ſimul b e, & decu
pla utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla a b, & quadrupla c b, ſexcu-
pla b d, & tripla b e, & eſt proportionalitas indirecta. Per æquam igitur, ſicut o a
ad g h, ita cōpoſita ex quincupla utriuſq; ſimul a b, b e, & decupla c b, b d, ad com-
poſitam ex dupla utriuſque ſimul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Huius autem de-
ſcriptæ proportionalitatis conditio ſic fiet manifeſta. Quoniam enim in primis

ma-

magnitudinibus ſicut antecedẽs o a, ad conſequens a d, ita in ſecundis magnitu dinibus antecedẽs compoſita ex dupla a b, & quadrupla b c, & ſexcupla b d, & tripla b e, ad conſequentem compoſitam ex dupla utriuſq; a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinibus conſequens ipſa a d, habet ad quoddam aliud, ad ipſam g h: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quid compoſita ex quincupla utriuſq; a b, b e, & decupla utriuſq; ſimul c b, b d ad cõpoſitam ex dupla a b, & quadrupla c b, et ſexcupla b d, & tripla b e. Quoniam autem quincupla utriuſq; ſimul a b, b e ad duplam eiuſdem, eam habet proportionem quam quinq; ad duo: habet autem et decupla utriuſque ſimul c b, b d ad quadruplam eiuſdem proportionem, quam quinq; ad duo: quandoquidẽ decem ad quatuor habeãt eam proportionem quam quinq; ad duo. Cõpoſita igiẽ ex quincupla utriuſq; ſimul a b, b e, & decupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, proportionem habet quam quinq; ad duo. Quare a o ad g h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo. Rurſus quoniã oſtenſum eſt ſuperius, quod o d ad d a proportionem habet, quam e b cum dupla d b ad æqualẽ compoſitæ ex dupla utriuſq; a b, b e, cum quadrupla utriuſq; c b, b d. Eſt autem ſicut cõſequens in primis magnitudinibus d a, ad aliud quid d e: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quiddã cõpoſita ex dupla a b, tripla c b, & ſola d b, ad antecedẽs, cõpoſitam ſcilicet ex e b, & dupla b d. diſſimiliter indirecte proportio, hoc eſt proportionalitate indirecta. Igitur ſicut o d ad d e, ita compoſita ex dupla a b, tripla c b, & ſola b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Quare & ẽ conuerſo ſicut e d ad d o, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitã ex dupla a b, & tripla c b, et ſola b d. & euertenti, ſicut d e ad e o, dico antecedens ad exceſſum, ita cõpoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, cum quadrupla b c, b d, ad compoſitã ex c b ſola, & tripla b d, & dupla e b. In antecedẽte enim eſt dupla ipſius a b, & ipſius e b: in cõſequẽte uero dupla ipſius a b ſola. quare ſuperfluit in exceſſibus dupla ipſius e b. Rurſus in antecedẽte quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d: in conſequente uero tripla ipſius c b, & ſola b d: quare ſuperrelicta fuit in exceſsibus ſola c b, & tripla ipſius b d. Bene igitur dictũ eſt quod eſt euertẽti ſicut d e ad e o, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad cõpoſitã ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius e b. Quare ẽ cõuerſo ſicut o e ad e d, ita cõpoſita ex c b & tripla d b, et dupla e b, ad compoſitã ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Eſt aũt ſicut d b ad aliud quiddã ad ipſum e b ita a b, ad b c, et diuidẽti ſicut d e ad e b, ita a c ad c b. Eadẽ aũt ratione ſicut c d ad e b, ita d e ad e b. Sicut ergo tripla ipſius c d, ad triplã ipſius d b, ita dupla ipſius d e, ad duplã ipſius b e. Partes em̃ eã inuicẽ habent proportionẽ, quam earũ æquemultiplicia. Igitur ſicut unũ ad unũ, ita omnia antecedentia ad omnia ſequentia. Eſt igitur ſicut d e ad e b, ita compoſita ex a c, & tripla c d & dupla d e, ad cõpoſitam ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius b e. Quoniam enim oſtenſum eſt, ſicut in primis magnitudinibus antecedens o e ad ſequens d e, ita in ſecũdis magnitudinibus compoſita ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius b e, ad ſequens cõpoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinib. ſequẽs d e ad aliud quiddam ad ipſam e b: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quiddam compoſita ſcilicet ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad antecedens compoſitam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Per æquam igitur in proportionalitate indirecta, ſicut o e ad e b, ita compoſita ex a c, tripla c d, & dupla d e, ad cõpoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. & componenti ſicut o b ad b e, ita compoſita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, & dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla

utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Verum compoſita ex a c & tripla c d & dupla d e, & dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, æqualis eſt cōpoſitæ ex tripla a b, & ſextupla c b, & tripla d b. Ipſa enim a b bis aſſumpta eſt, inde & aſſumens ipſam a c, & ex quadrupla ipſius c b, unam facit tertio ipſam a b. Rurſus ablata à quadrupla ipſius c b, una manet tripla ipſius c b. Aſſumens autem triplam ipſius c d, & triplam d b, facit ſextupla ipſius c b. Rurſus ea ablata à quadrupla ipſius d b, remanet ſola d b: quę aſſumens duplā ipſius d e, & duplā ipſius e b, facit triplā ipſius b d. Bene igitur dicit quod o b ad e b eam habet proportionē, quam compoſita ex tripla a b & ſextupla c b, & tripla d b, ad compoſitā ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Rurſus quoniam hæ e d, d c, c a ſunt in eadem proportione, & per conuerſum ſuppoſitionis utraq; ſimul, unaquęq; harum e b, b d, b c, b a erit ſicut e d ad mediam, & ſequentē ipſas d c, c a, hoc eſt ad ipſam d a, ſic utraq; ſimul e b, b d ad utranq; d b, b c, cum utraq; ſimul c b, b a. & componenti ſicut e a ad d a, ita utraq; ſimul e b, b d, cum utraq; ſimul d b, b c, & cū utraq; ſimul c b, b a, ad utrāq; d b, b c, cum utraque ſimul e b, b a. Verum utraq; ſimul c b, b d, cum utraq; ſimul c b, b a, æqualis eſt utriq; ſimul e b, b a, & bis utriq; ſimul d b, b c. Semel enim extremæ ſumūtur, & mediæ bis. At uero utraq; ſimul d b, b c, cum c b, b a, æqualis eſt utriq; ſimul b d, b a, & bis c b, eadem cauſa. Quare eſt ſicut e a ad d a ita compoſita ex e b, b a & dupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad compoſitam ex utraq; ſimul d b, b a, & dupla ipſius c b: quare & dupla ad duplam habet eandem proportionem. Sicut ergo e a ad d a, ita cōpoſita ex dupla utriuſq; ſimul, e b, b a cum quadrupla utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſque ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. quare ſicut e a ad tres quintas ipſius d a, ita compoſita ex dupla utriuſque ſimul e b, b a, & quadrupla utriuſque ſimul c b, b d, ad tres quintas cōpoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. Verū ſicut a e ad tres quintas ipſius d a, ita ſumpta eſt b e ad f g. Sicut ergo e b ad f g, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul e b, b a, et quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad tres quintas cōpoſitæ ex dupla utriuſque a b, b e, & quadrupla ipſius c b. quoniā igitur oſtenſum eſt, ſicut antecedens o b ad conſequens b e, ita antecedens tripla utriuſq; ſimul a b, b d, cum ſextupla ipſius b c ad duplam utriuſq; ſimul a b, b e, et quadruplam utriuſq; c b, b d. ſicut autem conſequens ipſa e b ad aliud quiddam, id eſt ad f g, ita conſequens dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad tres quintas ſequentis, hoc eſt ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. In directa igitur proportionalitate per æquam, ſicut o b ad f g, ita compoſita ex tripla utriuſque ſimul a b, b d, & ſextupla c b ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. Compoſita uero ex tripla utriuſque ſimul a b, b d, & ſextupla c b, ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b, proportionē habet quam quinq; ad duo. Nam tripla utriuſque ſimul a b, b d, ad duplam utriuſq; ſimul a b, b d, proportionem habet ſeſquialterā: ſed & ſextupla c b ad quadruplam c b, eandem habet proportionem ſeſquialteram. Quoniā uero antecedentia ad conſequentia ſeſquialtera ſunt, & proportionē habent eā quam tria ad duo, igitur habebunt ſicut quadragintaquinq; ad triginta. utrunq; enim utriuſque eſt quindecuplum. Sunt autem decem octo tres quintæ de triginta. igitur quadraginta quinq; ad decem octo habent proportionem, quam compoſita ex tripla utriuſq; ſimul a b, b d, cum ſextupla c b ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſque ſimul a b, b d cum quadrupla c b, qualis eſt etiam proportio o b ad f g. ſed quadraginta quinq; ad decem octo eam habent proportionē, quam quinque ad duo: nam quinque & duo ſunt utriuſque nonæ, quare & o b ad f g eā habet proportionem, quam quinque ad duo. Quoniam igitur oſtenſum eſt, quod

o a ad

o a ad g h proportionem habet eam quam quinq; ad duo, & o b ad f g eandẽ proportionem, erit ipſa f h duæ quintæ ipſius totius a b.

IN DECIMVM THEOREMA.

Conſtat iam quod fruſti a d e c diametros eſt ipſa f g,,. quoniã enim ſupponitur ipſa f b diametros ipſius portionis, & iſtæ a c, d e bipartitæ ab ea punctis f g ſunt æquediſtantes ei quæ in b contingit ſectionem, conſtat quod omnes ſimiliter ab illis ductæ æquediſtantes ſiue inter illas, ſiue inter ipſam d e, & uerticem b bipertientur ab ipſa g f. & ideo dixit ipſam f g eſſe diametrum fruſti.

Verũ ſicut cubus a f ad cubũ ipſius d g, ita portio a b c ad portionẽ d e b,,. Quoniã eñ oſtẽſum eſt, ab eo quod portio a b c eſt ſeſquitertia triãgulo a b c. et portio d e b eſt trinagulo d e b. itẽ ſeſquitertia erit ſicut portio a b c ad triangulũ a b c, ita portio d e b ad triangulũ d e b. & permutatim ſicut portio ad portionem, ita triangulus ad triangulũ, & ita quoq; dimidia eorũ: ſicut portio a b c ad portionẽ d e b, ita triãgulus a f b ad triãgulũ d g b. quare ſi deſcribamus parallelogrãma, erũt dupla triangulorũ æquiangula, propterea quod d g & a f ſunt ęquediſtantes. quare & pro portionem habebunt compoſitam ex proportione laterũ a f d g, & f b ad b g. eadem aũt proportio triangulorum & portionũ. Portio igitur habet ad portionem proportionem compoſitã, ex proportione a f ad d g, & ex f b ad b g. Proportio autem f b ad b g eſt eadem ei quæ eſt quadrati ex a f ad quadratum ex d g. Proportio igitur portionis ad portionem, componitur ex proportione quadrati ex a f ad quadratum ex d g, et ex a f ad d g. proportio quoq; cubi ex a f, ad cubum ex d g, componitur ex eiſdẽ, uti oſtenſum eſt in expoſitionibus de Sphæra & cylindro. Eſt ergo ſicut portio ad portionem, ita cubus ex a f ad cubũ ex d g. Et quoniam ſolidum quod baſim habet quadratum ex a f, altitudinem uero lineam cõpoſitam ex dupla ipſius d g, & ipſa a f habet eam proportionem ad cubum ex a f quam dupla ipſius d g cum ipſa a f habet ad f a,,. Nam in eiſdem baſibus exiſtentia habent inuicem ueluti altitudines. Eſt autem ſicut d g ad a f, ita x n ad m n. & ſicut dupla ipſius b g ad a f, ita dupla ipſius n x ad n m: & cõponenti, ſicut dupla n x cum n m, ita dupla d g cum a f ad a f. Oſtẽſum eſt autem, ſicut cubus ex a f ad cubum ex d g, ita cubus ex m n ad cubum ex n x. & m n ad n t, ſunt quatuor proportionales. & ſicut prima ad quartam, ita ſolidum ex prima ad ſolidũ ſibi ſimile ex ſecunda & ſimiliter figuratum. Sicut autem cubus ex d g ad ſolidũ quod baſim habeat quadratum ex d g, altitudinẽ uero rectam, compoſitam ex dupla a f, & ipſa d g, ita d g ad compoſitam ex dupla ipſius a f & ipſa d g. Rurſus enim habentur inuicem ſicut eorum altitudines. Sicut autem d g ad duplam ipſius a f, cũ ipſa d g: ita t n, ad compoſitam ex dupla ipſius o n cũ ipſa t n. eſt enim ſicut a f ad d g, ita m n ad n x, & o n ad n t. & ẽ conuerſo ſicut d g ad a f, ita t n ad n o. Factę igitur ſunt quatuor magnitudines continenter inuicem poſitæ: prima quidem ſolidum quod habet baſim, quadratum ex a f, altitudinem uero rectam compoſitã ex dupla d g & ipſa a f, & ſecunda cubus ex a f, tertia cubus ex d g: quarta ſolidũ quod habet baſim quadratum d g, altitudinem uero rectam compoſitam ex dupla a f & ex ipſa d g. & aliæ quædam rectæ in eadem proportione binæ & binæ ſumptæ, ipſa compoſita ex dupla n x, & ſimpla m n, & ſecunda m n: & tertia n t, & quarta compoſita ex dupla o n & ex n t. igitur per æquam fiet ſicut ſolidum baſim habens quadratum ex a f, & altitudinem rectam compoſitam ex dupla d g & ipſa a f, ad ſolidum baſim habens quadratum ex d g, & altitudinem compoſitam rectam ex dupla a f & ſimpla d g: ita ipſa compoſita ex dupla n x, cum m n, ad cõpoſitam ex dupla n o cum ſimpla n t. Verum ſicut ſolida prædicta inuicem, ita oſtenſum eſt eſſe h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ita compoſita ex dupla x n, & ſimpla m n, ad duplam n o, & ſimplum n t. & componenti, ſicut h k ad k i, ita compoſita ex utraq; ſimul m n, n t, & dupla utriuſq; ſimul x n, n o, ad compoſitam ex

dupla ipſius n o,& ſimpla n t. Sicut autem f g,ad f k, ſcilicet duas eius quintas: utraque enim harum g h, f k, eſt duæ quintæ ipſius g f, quoniam media quinta ponitur ipſa h k: ita compoſita ex quincupla utriuſq; ſimul m n, n t, & decupla utriuſque ſimul x n,n o, ad duplam utriuſq; ſimul m n,n t, et quadruplam utriuſq; ſimul x n,n o. duo enim ex quinq; & quatuor,ex decem duæ quintæ exiſtunt. Quoniã igitur oſtenſum eſt,ſicut f g ad i k,ita quincupla ipſius m n, n t, & decupla ipſius x n,n o,ad duplam ipſius n o & ſimplam n t. Rurſus oſtenſum eſt,quod ſicut f g ad f k,ita quincupla utriuſq; m n,n t, & decupla x n, n o ad duplã ipſius m n,n t, & quadruplam ipſius x n,n o: erit ſicut antecedẽs ad duo ſequentia,ita antecedens ad duo ſequentia: ſicut f g ad f i,ita compoſita ex dupla ipſius o n, & ſimpla n t,et dupla utriuſq; ſimul m n,n t, & quadrupla ipſius x n,n o: quæ eſt ęqualis compoſitę ex dupla m n,et quadrupla x n,et ſexcupla ipſius n o, & tripla ipſius n t. ſic enim ſumptum eſt ſuperius. Quoniam igitur quatuor rectę ſunt cõtinuę proportionales hę m n,n x,o n,n t: & eſt ſicut n t ad t m,ita quædam ſumpta, hoc eſt r i ad f h,hoc eſt ad tres quintas ipſius g f,hoc eſt ipſius m o, & oſtenſæ ſunt in rationali proportionalitate proportionales, erit per prædictũr f duæ quintæ ipſius m n, hoc eſt ipſius f b. igitur b r eſt tres quintæ ipſius b f. igitur b f ad r f proportionem habet, quam quinq; ad duo. quare punctum r eſt centrum grauitatis portionis a b c. Si iam ſumpſerimus centrũ grauitatis portionis b d e in puncto q,erit b q tres quintæ ipſius q g. Factum eſt itaq; ſicut tota f b ad totam b r,ita ablata b g ad ablatam b q. utraque enim earum ad utramque proportionem habet,quam quinq; ad tria. Igitur reſidua f g ad reſiduam q r proportionem habebit,quam quinq; ad tria. Quoniã igitur ſupponitur,ſicut fruſtũ a d,e c ad portionẽ d e b, ita m t ad t n: & ſicut m t,ad t n,ita tres quintę ipſius f g, hoc eſt ipſa f h uel q r ad r i. erit ergo ſicut fruſtum ad portionem,ita q r ad r i. & mutuo afficiuntur, & r eſt centrum totius portionis,igitur ipſum i d eſt centrum fruſti.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in ſecundum æquelibrantium Archimedis Finis.

SERIES CHARTARVM.

* α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ. †† a b c d e f g h i k l m n o p q r ſ t u. Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii. Omnes duerniones, præter ρ & u terniones.

BASILEAE, PER IOANNEM HERVAGIVM, ANNO AB ORBE REdempto, M.D.XLIIII. menſe Martio.





M Vm

1893 SEPT 22

Baer (Frankfurt a/m) L|JU|-

IAC. AVGVST. THVANVS.